北京大学物理学丛书

电动力学及狭义相对论

（第二版）

张宗燧　著

北京大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

电动力学及狭义相对论(第二版)/张宗燧著. —北京:北京大学出版社,2004.2

(北京大学物理学丛书)

ISBN 7-301-06875-1

Ⅰ. 电… Ⅱ. 张… Ⅲ. ①电动力学 ②狭义相对论 Ⅳ. ①O442 ②O412.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 123709 号

书　　　　名:电动力学及狭义相对论(第二版)
著作责任者:张宗燧　著
责 任 编 辑:周月梅
标 准 书 号:ISBN 7-301-06875-1/O·0586
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　15.125 印张　392 千字
2004 年 2 月第 2 版　2004 年 2 月第 1 次印刷
定　　　　价:25.00 元

《北京大学物理学丛书》编委会名单

内 容 提 要

本书分三部分：一为微观的电动力学，一为狭义相对论，一为电子论。第一部分讨论麦克斯韦场方程的性质及解，电子的辐射等等；第二部分为狭义相对论的一个较全面的介绍，包含了四维矢量分析；第三部分介绍了较近代的电子理论的一部分，可供综合性大学和师范院校物理专业师生参考，也可供研究量子电动力学的同志参考。

前　　言

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科.几十年来，在生产技术发展的要求和推动下，人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破.物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展，丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握，促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步.物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导.

为适应现代化建设的需要，为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平，我们决定推出《北京大学物理学丛书》，请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍，为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习，开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材.

本丛书分两个层次.第一个层次是物理系本科生的基础课教材，这一教材系列，将在几十年来几代教师，特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上，力求深入浅出、删繁就简，以适于全国大多数院校的物理系使用.它既吸收以往经典的物理教材的精华，尽可

能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法;同时又注入科技发展的新观点和方法,介绍物理学的现代发展,使学生不仅能掌握物理学的基础知识,还能了解本学科的前沿课题和研究动向,提高学生的科学素质.第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作.这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题,介绍该学科方向的基本内容,力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果.学术专著首先着眼于物理学的各分支学科,然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科.

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者,又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用.

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997年3月

第二版序言

本书作者张宗燧先生是著名理论物理学家，1934 年毕业于清华大学物理系，1938 年获英国剑桥大学博士学位，曾先后任中央大学、北京大学、北京师范大学物理系教授和中国科学院数学研究所理论物理研究室研究员，1957 年当选中国科学院院士(当时称中国科学院学部委员)。

张先生对统计物理学作出了重要的贡献。从 1937 年开始，他解决了合作现象特别是固溶体中 Bethe 近似与准化学近似的等价性和推广 Bethe 近似到次近邻作用等一系列问题。统计物理学权威 Fowler 和 Guggenheim 合著的 Statistical Thermodynamics 书中对张先生的工作有许多介绍。其后，张先生对量子场论的形式体系，特别是量子场论的哈密顿形式、量子电动力学、高阶微商场论、高自旋场论等方面作过深入的研究。他首先给出各种自旋的场的规范不变的对称动量-能量张量。他还推广 Weiss 理论，得到决定定义在任意空间性曲面上的波泛函随曲面形状的变化的方程式，并证明它即使对高阶微商场论也是可积的。经典电动力学也是张先生研究过的领域。

本书是张先生的精心之作，曾于 1957 年由科学出版社出版。本书的取材和写法与其他电动力学书颇有不同。本书的一个特点是，对主要公式的数学推导叙述详细而深入，往往介绍几种不同的方法，包括某些高等的数学方法，对读者获得扎实的数学推导能力和拓广这方面的知识很有帮助。第二个特点是，书中讨论了一些深入的物理问题，解释或揭示了经典电动力学中的各种矛盾，这有助于读者进一步学习和思考。这部分内容主要在书中的小字部分和最后两章中阐述，其中包含了作者自己的研究成果。本书的最后两

章对经典电子论作了相当详细的介绍。这些内容包含了为克服建立相对论性微观理论所遇到的困难的各种尝试，是人们探索物理学基本问题的历史过程的一部分。虽然这些问题的进一步研究需要量子理论，而且最终也需要超出电磁理论的范围，但是书中讨论的内容大多在量子理论中有对应的部分，今天对读者仍很有启发。因此，本书既是一本大学物理系本科生和研究生很好的参考书，也是一本有很高学术水平的专著。

此次再版前理论物理所赵万云研究员通读了本书。他将其中一些物理名词修改为现在通用的规范名词。原书中部分物理名词有俄文译文，为方便读者，再版时将这些名词的中英文对照列表附在书后。他还改正了原书中一些印刷错误和个别笔误。本书的再版得到北京大学出版社的支持，南京大学冯端院士和理论物理所刘寄星研究员、张历宁研究员给予很多关心和帮助，没有他们的支持和帮助，此次再版工作将很难完成。

中国科学院理论物理研究所

戴元本

2003 年 7 月 12 日

序

这本书是为综合性大学物理专业及师范学院物理专业师生的参考而写的。

由章节的目录可以看出，这本书的主要内容分为三部分：一为电动力学的基础理论，一为狭义相对论，一为经典电动力学、电子运动方程的较近代的理论；每一部分约占全部篇幅的三分之一。所以这样地取材，除了第一部分外，需要作一些解释。第一，我们之所以在狭义相对论上花去这样多的篇幅，是因为目前我国介绍狭义相对论的书籍很少，所以一本关于电动力学的书似乎非但应该包含这一部分，而且必须较详尽地介绍这一部分。据作者猜想，这一部分对于教狭义相对论的教师而言，可能是有些用处的。第二，本书对宏观电动力学的理论叙述得比较少，原因是我们已经有了一本极好的宏观理论的书——Тамм 所著《电学原理》——的译本。因此，在此重复宏观理论是不太必要的。第三，本书没有介绍“物质的电子理论”(即用电子在物质——金属，介质，气体——中的性质来解释物质的宏观性质的理论)，是因为用经典理论来作这样的工作，只能是定性的、极不完全的；而如果我们要定量的结果，则非走入量子力学(及统计力学)不可。这样的工作显然不能放在这本书中(除非把它的篇幅扩大一倍)而应该另成一本专书。因此，除了第一部分电动力学的基础及第二部分狭义相对论外，我们只简单地介绍了一些比较近代的经典电动力学。由于篇幅及作者目前精力的限制，这个介绍也不是全面的[①]。虽然如此，作者认为这一些介

---

① 例如狄拉克在 1951，1952 所发表的电子理论(*Proc. Roy. Soc.* **A209**(1951)291；**A212**(1952)330)即未包含在本书内。

绍是有它的意义的。它可以使读者(初步地)了解经典电动力学中处理电子运动方程而遇到的困难,有哪些解决这个困难的企图,等等;这样它可以使读者对于经典电动力学的成就与困难,有更深刻的了解。

以上是关于内容的问题。至于阅读程序,作者试作以下的建议:不妨先读第一、第二两部分的大字,再读这两部分的小字,最后读第三部。理由是:第三部一般讲来不是教学所需的内容,而第一、第二两部的大字是教学上比较有用处的。在写这本书的时候,作者曾作了一些安排,使得读第一、第二两部的大字而不读小字,是完全可以的。至于要阅读第三部,那么最好先阅读第一、第二两部的小字。

对于内容的写法,也有几点需要解释。首先,也许有人在阅读后觉得数学的计算过程,写得过于仔细一些。其实,作者对于某些计算,所以如此不厌详尽,乃是因为考虑到目前我国学生的一般水平及部分教师的水平。在目前的综合性大学及师范学院的教师们中,一部分教师在以往从未学过数学物理方程。将数学上的计算写得过于简短,对于这些少数教师的阅读,是会增加困难的。其次,也许有些读者感觉书中数学气氛太重。其实,书中数学气氛一点也不重。如果读者感觉有些数学上的讨论是不必要的,那么请直接把这些讨论忽略去好了。再其次,也许有些读者感觉这本书对于许多理论,都有批评之处,而拥护得不够热烈。其实,这本书并没有否定任何理论的成就,而只是在指出他们的优点后,也附带地指出他们的缺点。这样的做法在作者看来,正是所有的书所应该做的。只有这样才能使读者更快地、更深刻地认识以往各种理论的成就的程度,由此而建立新的、更好的理论。

直到现在为止,还没有提起这本书的缺点。关于这一点,可以肯定地说,缺点是决不可能避免的。首先,作者自己的科学水平是极有限的,哲学修养也低,单是这两点便不可避免地在书中带来了一些不成熟或错误的讨论、结论。其次,作者在这几年中未曾教过

电动力学的课，因此对于这本书作目前师生教学参考用是否合适——即有些章节是否写得太深、或太浅——没有很好的把握。最后，作者最近身体不好，精神不足，因此虽然极力避免笔误，但事实上无论在文字中或在公式中，笔误也是可能出现的。（说上面这句话的意思，当然不是借此而逃避错误的责任；所有错误的责任，当然是作者的。）主要的缺点当然是由于第一个理由而来的。

因为各种缺点都可能存在，作者诚恳地希望读者对于这本书作些批评。这样，无论对于这本书，或对于作者本人，或对于其他读者，都是有所裨益的。

最后，作者愿借此机会，对苏联红十字医院的几位大夫——尤其是孟家美大夫——表示最诚恳的谢意。没有他们对我的关怀、悉心医治，我的身体情况决不能允许我以课余时间内在一年中完成这本书。作者也愿借此机会，对以前中央大学、北京大学里学过本书内容一部分的同学表示感谢；由于他们与我的讨论，使我澄清了一些有关的问题。当然，我也感谢科学出版社的许多同志为出版这本书而花去的辛勤劳动以及北京师范大学理论物理进修班许多同志所作的校对工作；没有这一些，这本书的出版是不可能的。

作者谨识

于北京师范大学理论物理教研室

1955 年 11 月

目　　录

第一部　电动力学的基础理论

第二部　狭义相对论

第三部　近代的电子理论及电子的一些运动示例

第一部　电动力学的基础理论

第一章　微观理论的基本方程

§1　三个基本假定

如众所周知，电磁学的理论建筑在麦克斯韦(Maxwell)的方程上．我们在这里首先叙述在微观的电磁理论中的麦克斯韦方程．它同电荷不灭的假定、洛伦兹(Lorentz)力的假定，成为微观理论的三个基本假定，成为理论的出发点．

很显然地，无论是麦克斯韦方程；或电荷不灭的假定；或洛伦兹力的假定，都是根据大量的实验结果而得来的(其中绝大部分是宏观世界中的实验)．但在一个微观的、演绎的理论中，它们可以认为是假定，是出发点．将它们认为假定是否正确，主要在于由它们推演出来的理论结果(宏观的及微观的)，是否与实验结果符合．

(1) 电荷不灭的假定

我们首先假定电荷是存在着的，而它在某一个体积中的总量是不能被创造或被消灭的．电荷可以分为两种：第一种是点电荷，即电荷分别集中于一些几何点中；第二种是空间电荷，即电荷分布在空间，使空间各处有一个电荷密度 ρ，而当我们引入一个坐标系 (x,y,z) 去描写各点的位置时，ρ 成为 (x,y,z) 的一个有限的、足够平滑的、可以对 x,y,z 微分的函数．在本书中，我们将尽量避免对于数学上的一些较严谨的讨论(例如一些函数是否可以微分)，如

果这些讨论不带来一些实质上于物理有关的结果[①].

在(x,y,z)点的电荷密度ρ的定义显然为

$$\rho(x,y,z)=\lim_{V\to 0}\frac{e}{V}, \tag{1.1}$$

式中V代表包含(x,y,z)点的一个小体积,e为体积V中的电荷;取极限$V\to 0$时,必须使V中各点俱趋近于(x,y,z).(最末一句话是为了避免V成为一极长而极细的柱体.)这与宏观的理论的不同处,在于此间V可以是数学上的无穷小,而在宏观理论中,V只是一个"物理小"的体积.

我们在开始的几章中只讨论第二种电荷,即假定电荷有一个有限的密度ρ,而不假定电荷集中于几何点中.这二种电荷在理论上需要不同的处理;在下面讨论到电磁场所适合的微分方程时即可以看到.另一方面,先假定带电体(例如电子)有一大小,例如假定电子为一个半径为a的圆球(即讨论第二种电荷),然后令带电体的体积(例如电子的半径a)趋近于零,同时令带电体的总电荷在此变化中不变,也可以得到假定电荷为几何点的理论结果.

在不同时刻t,(x,y,z)点处的密度ρ是可以不同的.因此一般地讲,ρ是x,y,z,t的函数;

$$\rho=\rho(x,y,z,t). \tag{1.2}$$

在宏观理论中,如果我们假定所有的电荷都是点,每个带有电荷e,取同样的速度$\boldsymbol{v}$,而又如果质点的宏观密度为n,那么在一秒中流过一个$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$面的电荷即是图1中的斜柱体中的质点数乘上e,即是

$$ne(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}),$$

即是

① 因为如果不避免这些讨论,那么假定电子是带有一个均匀电荷密度的圆球,也会带来麻烦;因为ρ在圆球的面上是不连续的,更不必谈它有否微商.那时我们必须假定ρ在圆球的中部几乎为一常数,而在圆球的表面附近,ρ逐渐地趋近于零,这便是不必要的讨论.

$\rho(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S})$.

同样，在微观理论中，我们假定在时刻 t 在任意一点(x,y,z)上，有一个矢量 $\boldsymbol{v}$，使

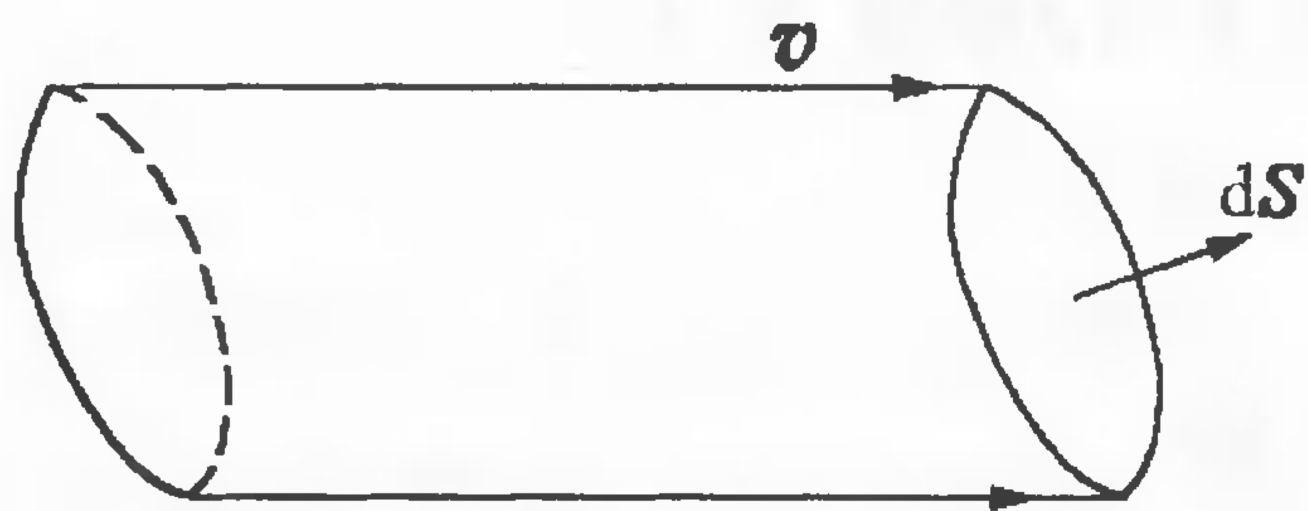


图 1

$$\rho(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) \qquad (1.3)$$

代表在 t 附近的一秒中在(x,y,z)点附近的 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面上所流过的电荷. 在 $\rho=0$ 处，流量亦为零. 流量(1.3)式实际上即是 $\boldsymbol{v}$ 的定义.

我们引入 $\boldsymbol{j}$，定义

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}; \qquad (1.4)$$

正同 $\rho,\boldsymbol{v}$ 一样，$\boldsymbol{j}$ 为 x,y,z,t 的函数. $\boldsymbol{j}$ 将称为电流密度.

极易证明，如果一个带电体有一个均匀电荷密度 ρ，而又如果此带电体整个地以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动(即在运动中没有形变)，那么 $\boldsymbol{v}$ 即是 $\boldsymbol{u}$.

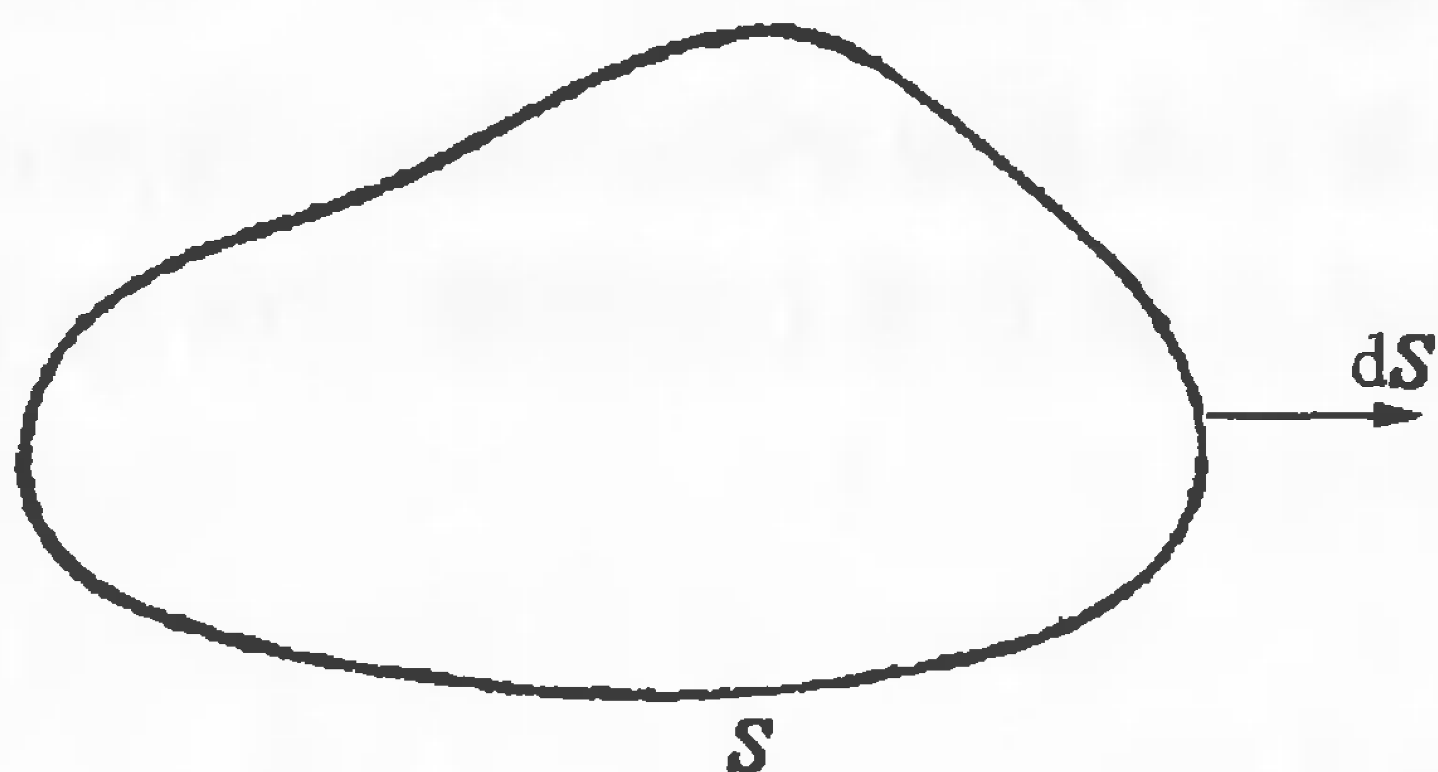


图 2

讨论在空间不随时间改变(以后简称"不改变")的某封闭曲面 $\boldsymbol{S}$(见图 2). 讨论在时刻 t 及 $t+\Delta t$ 中 $\boldsymbol{S}$ 所包含的总电荷的差别，即

$$\int\rho(x,y,z,t+\Delta t)\mathrm{d}V - \int\rho(x,y,z,t)\mathrm{d}V;$$

式中$\int\mathrm{d}V$ 代表体积积分，积分区域为 $\boldsymbol{S}$ 所包含的体积. 因两个积分的积分区域相同，得

$$\int[\rho(x,y,z,t+\Delta t)-\rho(x,y,z,t)]\mathrm{d}V = \int\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t+O[(\Delta t)^2]\right\}\mathrm{d}V. \qquad (1.5)$$

由于电荷在此体积中的总量是不能被创造或被消灭的，那么上式便必然等于电荷在面 $\boldsymbol{S}$ 上的流入. 令 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向为向外的，那么在

面 $\boldsymbol{S}$ 上的流入为

$$-\int \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \Delta t,$$

亦即

$$-\int (\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}) \mathrm{d}V \Delta t; \tag{1.6}$$

式中$\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}$ 代表 $\rho \boldsymbol{v}$ 的散度,等于$(\partial(\rho v_x)/\partial x)+(\partial(\rho v_y)/\partial y)+(\partial(\rho v_z)/\partial z)$. 注意(1. 6)更正确地写时,(1. 6)式中的 $\rho \boldsymbol{v}$ 应注明为 t 时刻的 $\rho \boldsymbol{v}$,同时也应加入 $O[(\Delta t)^2]$项. 使(1. 5),(1. 6)相等,令 $\Delta t \to 0$,即可忽略$(\Delta t)^2$ 项,得

$$\int \left[(\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \mathrm{d}V = 0. \tag{1.7}$$

由于 $\boldsymbol{S}$ 是任意的,$\boldsymbol{S}$ 所包含体积也是任意的,得①

$$\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.8}$$

这称为连续性方程. 由于它是从电荷不灭的假定而获得的,所以在任何 x,y,z,t 都必须满足. 这可以认为是电荷不灭的假定的数学形式.

(2) 麦克斯韦方程

假定在任何时刻 t 在任意一点(x,y,z)处,有两个矢量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$; $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 是 x,y,z,t 的函数,称为矢量场. 我们假定它们适合

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \boldsymbol{v}, \tag{1.9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{1.10}$$

---

① 由(1. 7)得(1. 8)的证明是极易的. 因为如果在某时在某点 P 处,(1. 8)的左方不等于零而等于某值 a,由于连续性,在此时在此点附近各点的

$$\nabla \cdot \rho v + (\partial \rho / \partial t)$$

与 a 同一符号;因此如果取 V 包含此点 P,同时,取得足够地小,那么对于这一个体积,(1. 7)式中的被积函数在各点取同一符号,因此(1. 7)式不能成立. 这类的证明,以后不再重复.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \tag{1.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho; \tag{1.12}$$

式中 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{H}$ 分别地代表 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的旋度，而 c 是一个常数. 显然地，$\boldsymbol{E}$ 即是微观理论中的电场，$\boldsymbol{H}$ 即是微观理论中的磁场. 由(1.9)—(1.12)可以看出，c 代表静电单位电荷与电磁系单位电荷的比值. (1.9)—(1.12)式称为微观的麦克斯韦方程，以后常简称为麦克斯韦方程. 当然，我们应该在此强调，虽然(1.9)—(1.12)在我们的理论中称为假定，它们事实上是很多年的实验结果的总结.

我们在此必须证明(1.8)与麦克斯韦方程互相没有冲突，可以有共同的解. 具体地说，即是要求证明如果已知 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 适合了(1.8)式，那么(1.9)—(1.12)式对于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 来说是有解的. 在这个讨论里，我们首先指出如果 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 为已知的 x,y,z,t 的函数，那么(1.9)，(1.10)两式同 $t=0$ 时刻的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 值(称为起始条件)便决定了 $t>0$ 各时刻的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$. 这是证明的第一步. 其次，我们证明如果已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 满足(1.8)式，而又如果在 $t=0$ 时，(1.11)及(1.12)式都满足，那么在 $t>0$ 的任何时刻，(1.9)及(1.10)的解也满足(1.11)及(1.12). 这是证明的第二步. 以上说明如果我们的起始条件满足(1.11)和(1.12)，又如果已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 满足(1.8)，那么(1.9)—(1.12)有共同的解，而解是惟一的.

第一步中的证明如下：(1.9)和(1.10)的微分方程，与下列微分方程式组

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \\
\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= f_2(y_1, y_2, \cdots, y_n), \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(y_1, y_2, \cdots, y_n)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

的性质相仿佛，所不同的只是在(1.9)和(1.10)中所求的乃是在不同点(x,y,z)上的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，求这些量如何为 t 的函数；而在(1.13)

中所求的乃是相当于不同 n 值的 y,求这些量如何为 t 的函数.换句话说,(1.9)和(1.10)的形式与(1.13)相似,在不同点(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),…上的$\boldsymbol{E}(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{H}(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{E}(x_2,y_2,z_2)$,$\boldsymbol{H}(x_2,y_2,z_2)$,…在(1.9)和(1.10)中的地位相当于(1.13)中的 y_1,y_2,…,y_n.(1.13)有解,并且在固定的起始条件下只有一个解①.如果不要求过分的严谨,我们可以用以下的证明.

已有在 $t=0$的起始条件,即已知在 $t=0$ 时的 y_1,y_2,…的值,称它们为 y_1^0,y_2^0,…,代入(1.13)式右方,即获得 $t=0$ 时的 $\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}y_2/\mathrm{d}t$,…,称它们为$(\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}t)^0$,$(\mathrm{d}y_2/\mathrm{d}t)^0$,…,等等.将(1.13)式两方对 t 微商,再以已知的 y_i^0,$(\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t)^0(i=1,2,\cdots,n)$,代入此式的右方,即获得 $\mathrm{d}^2y_i/\mathrm{d}t^2$ 在 $t=0$ 的值$(\mathrm{d}^2y_i/\mathrm{d}t^2)^0$.将(1.13)两方对 t 微商两次,以已知的 y_i^0,$(\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t)^0$,$(\mathrm{d}^2y_i/\mathrm{d}t^2)^0$ 代入此式的右方,即获得在 $t=0$ 时 $\mathrm{d}^3y_i/\mathrm{d}t^3$ 的值,….以此类推,可以获得在 $t=0$ 时 y_i 对 t 任何高次微商的值,因此,利用

$$y_i(t)=y_i^0+t\left(\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}\right)^0+\frac{1}{2}t^2\left(\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2}\right)^0+\cdots+\frac{1}{n!}t^n\left(\frac{\mathrm{d}^ny_i}{\mathrm{d}t^n}\right)^0+\cdots,$$

便可以算出在 t 时刻的 y_i.

用同样的精神可以证明(1.9)和(1.10)在已知的起始条件下有解,并且解是惟一的.但是必须指出,这个证明是形式的,因为在(1.13)式中只有有限的变数 y_n,而在这里我们有无穷多的点,因而有无穷多的变数(多得不可以列举).因此,严格的讨论不允许我们将(1.9)和(1.10)看成一组常微分方程,而必须以偏微分方程来看待它们.那时,我们非但需要起始条件,而且需要边界条件.我们在此暂时不要求这样严谨的讨论.

第二步的证明如下:在(1.9)式两方乘以 $\nabla\cdot$,得

---

① 严格的证明见 L. Bieberbach:《微分方程理论》,第二章,或В. И. Смирнов:《高等数学教程》第二册 § 51.那里用的是“逐步渐近法”,而 f_1,f_2,…等均假定满足利普希茨(Lipschitz)条件.没有这条件,便不易获得所需要的证明.

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\frac{4\pi}{c}\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}=0.$$

利用已知的(1.8)式,消去 $\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}$,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\cdot\boldsymbol{E}-4\pi\rho\}=0.$$

对 t 积分,得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}-4\pi\rho=f(x,y,z).$$

如果已知在 $t=0$ 时刻 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho$, f 必然为零,因此在任何 $t>0$ 的时刻,(1.12)式也成立.同样在(1.10)式两方乘以 $\nabla\cdot$,得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{H})=0,$$

对 t 积分,得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=g(x,y,z).$$

如果已知在 $t=0$ 时 $\boldsymbol{H}$ 到处的散度为零,g 必然为零,因此 $\boldsymbol{H}$ 的散度保持为零.

(1.9)—(1.12)是为了第二种电荷而建立的.在(1.9)—(1.12)中,ρ 取有限的值.如果要讨论点电荷,由于在点电荷处 ρ 为无穷大,上面的微分方程基本上失去了意义.在下节中,我们将引入一种函数,称为 δ 函数,使点电荷所产生 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的讨论,与带有限密度的电荷所产生的电磁场的讨论,形式上相似.如果要求严格地讨论点电荷所产生的电磁场,那么我们假定在点电荷以外各点的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$,适合 $\rho=0$ 的(1.9)—(1.12)式,而在点电荷上,假定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的性质是奇异的,再假定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在奇异点的周围取某些已知的性质①.这样的讨论是不方便的.

---

① 最后一个假定的必要性可以由静电学中拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V=0$$

的讨论看出.如果 V 除开原点外到处适合上式,V 的解不是惟一的,而必须由原点附近 V 的性质而决定(С. Л. Соболев,《数学物理方程》,第十章).这相当于在原点可以有电荷,电偶极子,电四极子等等的事实.

(3) 洛伦兹力

我们再假定当电荷密度是有限时,在小体积元 $\mathrm{d}V$ 中的电荷所受的力是

$$\rho \mathrm{d}V\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right), \tag{1.14}$$

式中 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 乃是在此体积中某点的电磁场. 正同(1.9)—(1.12)一样,(1.14)虽然在我们的理论中以“假定”的身份出现,但它实际上是许多年的实验结果的总结.

在此我们可以看到如果电荷集中于几何点,(1.14)式便不能应用,因为点电荷对于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 来说是奇异点,那里的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是无穷大,使(1.14)失去了意义. 这个困难与以下所讨论的“电子的自作用力”(§27)是分不开的. 这也是使我们在最初的讨论中宁愿自第二种电荷出发的理由.

总结以上,可见我们的假定乃是连续性方程(即(1.8)式),麦克斯韦方程(即(1.9)—(1.12)式)及洛伦兹力(1.14). 连续性方程告诉我们 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 必须适合某些条件. 麦克斯韦方程告诉我们如何由已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 来决定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$,亦即由已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 来计算由与这些电荷相应的电磁场. 这个电磁场以后将简称为这些电荷所产生的电磁场. 最后洛伦兹力告诉我们电荷所受的力. 很显然,我们在此缺少电荷的运动方程;我们很容易想像,有了这个方程及以上的三个假定,便能自已知的起始条件完完全全地决定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 以及电荷此后的一切情形. 但电荷运动方程的讨论,至今还没有完满地解决. 我们将于第五章及第九章中讨论电子的运动方程.

值得指出: 在我们的出发点中,磁荷是不存在的[①]. 寻常宏观磁荷的出现,乃是由于一个封闭电路所产生的磁场与一个磁偶极

① 当我们考虑电子的自转时,磁荷是存在的,等于某一个矢量的散度,这可以用一个适当的变换消去. 参阅 Д. И. Блохинцев:《量子力学原理》§60 中最末一段讨论.

子相同的事实；这一点是大家所熟知的，我们的理论也采用了这个观点.

§2　δ函数的性质与点电荷的密度

如果一定要引入一个电荷密度来描写一个点电荷，那么我们必须引入一个较奇怪的函数——δ函数. 为简单起见，先讨论一维空间. 令 $\delta(x)$ 定义为以下的函数：

$$\begin{cases}\delta(x)=0, \quad x>0 \text{ 或 } x<0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1.\end{cases} \tag{2.1}$$

那么当我们有一个放在 $x=\xi$ 处的单位电荷，电荷密度 $\rho(x)$ 便成为

$$\delta(x-\xi);$$

因为在 $x\neq\xi$ 处，$\rho=0$，而总电荷

$$\int\rho(x)\mathrm{d}x$$

等于 1. 同理，如果有点电荷 $e^{(1)},e^{(2)},\cdots$ 放在 $x=\xi^{(1)},x=\xi^{(2)},\cdots$ 处，那么，

$$\rho(x)=\sum e^{(i)}\delta(x-\xi^{(i)}).$$

推广至三维空间，得

$$\rho(x,y,z)=\sum e^{(i)}\delta(x-\xi^{(i)})\delta(y-\eta^{(i)})\delta(z-\zeta^{(i)}). \tag{2.2}$$

如果想画出 $\delta(x)$ 函数，那么我们画出如图 3 中的一个曲线 $f(x)$，在原点处 f 为极大，曲线 f 下的面积等于 1，而设想在原点的高峰变为极高极窄时的情形（在变化时面积保持为 1）. 该时的 f 可以想像为我们的 $\delta(x)$.

让我们讨论下面的积分

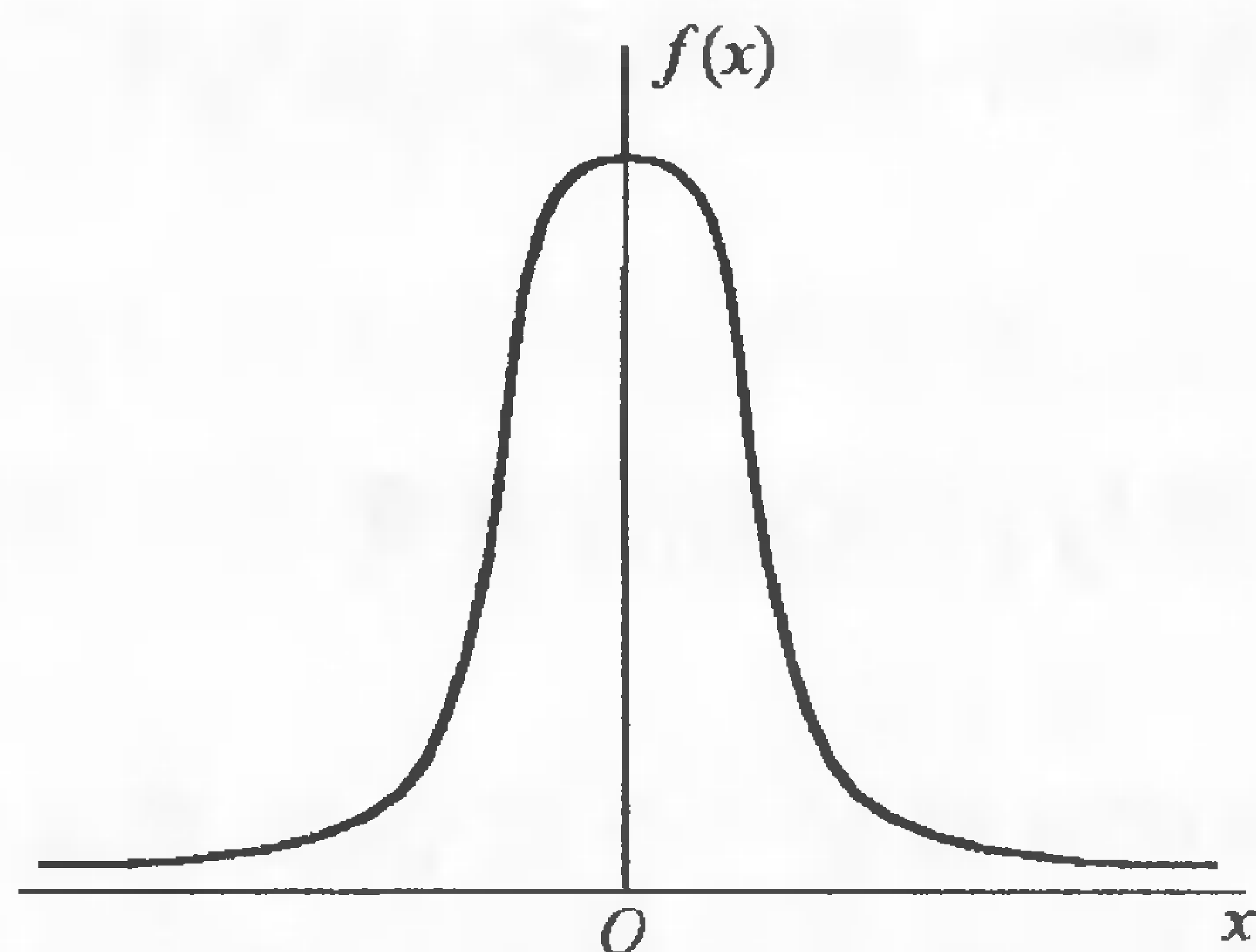


图 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x;$$

式中 $f(x)$ 为某一已知函数. 由于 $x\neq0$ 处对于上面积分的贡献为零，因此积分号中的 $f(x)$ 可以换为 $f(0)$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = f(0). \qquad (2.3)$$

如果积分极限不是 $\pm\infty$ 而是 (a,b)，那么我们很容易看出

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} f(0) & (a,b\text{ 不同符号}), \\ 0 & (a,b\text{ 同一符号}). \end{cases}$$

此外，我们可以看到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t = f(x). \qquad (2.4)$$

严格讲来，(2.1)所定义的 $\delta(x)$ 是不存在的[①]. 那么我们应该如何地去了解像

$$f(x)=\delta(x)$$

的一个式子的意义呢？自一个具体的例出发，我们熟知在傅里叶级数的理论

---

① 由于(2.1)中第一式，适合 $\delta(x)=0$ 的点集的测度等于全部积分区域，$\delta(x)\neq0$ 的点的测度是零，因此 $\delta(x)$ 的勒贝格积分等于零；因此 $\delta(x)$ 的寻常积分，如果存在的话，也必然是零，与(2.1)第二式冲突. 如果只讨论(2.3)的左方，为了数学上的严谨起见，不妨将左方换为斯提叶斯积分

$$\int f(x)\mathrm{d}\varepsilon(x),$$

式中 $\varepsilon(x)$ 代表

$$\varepsilon(x)=1/2, \qquad x\geqslant0$$
$$\varepsilon(x)=-1/2, \qquad x<0$$

的函数. 这样的积分是有意义的. 要严格地讨论 $\delta(x)$，请参阅 L. Schwarz:《分布理论》,1951.

中①，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin n\left(\frac{t-x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\mathrm{d}t=f(x). \tag{2.5}$$

如果 $f(x)$不是连续的，右方应换为

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

将(2.5)与(2.4)比较后，我们便想到可以将

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin[n(t-x)/2]}{\sin[(t-x)/2]}$$

写为 $\delta(x-t)$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin[n(t-x)/2]}{\sin[(t-x)/2]}=\delta(x-t). \tag{2.6}$$

我们在此必须强调，这仅是一个写法而已. 事实上，(2.6)式左方的极限并不存在；写下的(2.6)式仅仅代表(2.5)式，不多也不少.

在傅里叶积分中，我们有同样的情形，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n(t-x)}{\pi(t-x)}=\delta(x-t). \tag{2.7}$$

Д. Иваненко 与 A. Соколов 在《经典场论》中，曾用类似的精神讨论了 $\delta(x)$，认为这是 $\delta(x)$的一个较好的定义，因为这样的定义可以援用到不连续的函数.

以上是带有 $\delta(x)$字样的方程的一个意义. 另外的一类带有 $\delta(x)$的方程以

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{2.8}$$

为典型，式中 $r=\{x^2+y^2+z^2\}^{\frac{1}{2}}$，$\nabla^2$ 为拉普拉斯算符$(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)+(\partial^2/\partial z^2)$. 这个式子中的左方在 $\boldsymbol{r}=0$ 处是没有意义的，因此我们首先要问这个式子代表什么. 原来一个封闭面的面积分

$$\int\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int-\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.9}$$

① 参考 B. И. Смирнов：《高等数学教程》，§150.

是有意义的，右方等于 4π，如果积分面所包含的体积包含原点；或等于零，如果积分面所包含的体积不包含原点. 将(2.9)右方形式地改写为

$$-\int\left(\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V=-\int\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V.$$

如果体积包含原点，那么上式右方等于 4π；如果体积不包含原点或等于 0，因此可以用

$$\int 4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)\mathrm{d}V$$

来描写. 因此我们写下

$$\int-\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V=\int 4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)\mathrm{d}V,$$

由此得

$$-\nabla^2\frac{1}{r}=4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

亦即(2.8)式. 实际上，上式的意义仅是原来的

$$\int\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-4\pi\text{ 或 }0\text{（视面所包含的体积是否包含原点）},\tag{2.10}$$

不比这多也不比这少.

将(2.10)式中所包含的意义，用(2.8)写出，是有实际上的用途的. 例如求证

$$\nabla^2\int\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r_\xi}=-4\pi\rho(x,y,z),\tag{2.11}$$

式中 r_ξ 代表自 (ξ,η,ζ) 至 (x,y,z) 的距离 $[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{1/2}$，我们可以援用以下的办法：

$$\begin{aligned}\nabla^2&\int\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r_\xi}\\&=\int\left(\nabla^2\frac{1}{r_\xi}\right)\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\&=\int-4\pi\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

$$= -4\pi\rho(x, y, z). \tag{2.12}$$

不用多说,这个证明是极形式的.(2.11)的一个较严格的证明见 И. Е. Тамм《电学原理》§ 95 节;在数学上严格的证明见 С. Л. Соболев《数学物理方程》第十一章最后一段;详细的介绍这些证明在本书范围以外.我们在此所强调的即是这些形式上的证明,结果往往是正确的(特殊情形在外).由于运用这些方法方便,我们将时常运用这种方法.

依照以上的讨论,如果点电荷所产生的电磁场 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 满足(1.10),(1.11)及

$$\begin{aligned} &\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H} = \int_V \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \mathrm{d}V + \sum \frac{4\pi}{c} e\,\boldsymbol{v}, \\ &\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} = \sum 4\pi e \end{aligned} \tag{2.13}$$

(第一式中的 V 为 $\boldsymbol{S}$ 所包围的体积,$\sum$ 代表对 $\boldsymbol{S}$ 中所有点电荷取和),那么我们可以写

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sum_i \Big[&\frac{4\pi}{c} e^{(i)} \delta(x - \xi^{(i)}) \\ &\times \delta(y - \eta^{(i)}) \delta(z - \zeta^{(i)})\, \boldsymbol{v}^{(i)} \Big], \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi \sum e^{(i)} \delta(x - \xi^{(i)}) \delta(y - \eta^{(i)}) \delta(z - \zeta^{(i)}). \tag{2.14}$$

(注意我们将 $\int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H}$ 形式地化为 $\int (\nabla \times \boldsymbol{H}) \mathrm{d}V$.)此后当我们讨论点电荷时,我们援用(2.14)式.

引入了 δ 函数后,可以将与点电荷相应的麦克斯韦方程写为

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c} \displaystyle\sum_i e^{(i)} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}^{(i)})\, \boldsymbol{v}^{(i)}, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi \sum e^{(i)} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}^{(i)}); \end{cases} \tag{2.15}$$

式中 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(i)})$代表

$$\delta(x-\xi^{(i)})\delta(y-\eta^{(i)})\delta(z-\zeta^{(i)}),$$

$\boldsymbol{x}$ 代表(x,y,z),$\boldsymbol{\xi}$ 代表(ξ,η,ζ).

我们非但引入函数 $\delta(x)$,并引入它的导数 $\delta'(x)$. 将(2.4)式两方对 x 取导数,得

$$\int f(t)\delta'(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x=f'(x).$$

这个式子同

$$\delta'(x)=0 \quad (x\neq 0)$$

定义了 $\delta'(x)$,正像(2.1)是 $\delta(x)$的定义一样. 一个含有 δ' 的方程的真正意义,讨论起来,正同含有 $\delta(x)$字样的方程的意义的讨论相同,在此不多重复. 值得强调指出的是:如果在含有 $\delta(x)$字样的各个方程上作一切形式上的微分、积分等,则所获得的式子就其所代表的真正意义而言,往往是正确的(如果原来的方程的真正意义是正确的). 因此我们可以在含有 $\delta(x)$字样的方程上作一切形式上的运算.

$\delta(x)$显然可以取得满足下式:

$$\delta(x)=+\delta(-x). \tag{2.16}$$

由此得

$$\delta'(x)=-\delta'(-x). \tag{2.17}$$

此外 $\delta(x)$,$\delta'(x)$有以下的性质,值得提起:

$$f(x')\delta(x'-x)=f(x)\delta(x'-x), \tag{2.18}$$

$$x\delta(x)=0, \tag{2.19}$$

$$\delta(\varphi(x))=\sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\varphi'(x_s)|},$$

式中 x_s 为 $\varphi(x)$的根. 此外又有

$$\begin{aligned}&\delta(ax)=\delta(x)/|a|,\\&\delta(x^2-a^2)=\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}/2|x|,\\&|x|\delta(x^2)=\delta(x)\end{aligned} \tag{2.20}$$

等式. 为了证明这一些,只消讨论双方乘上一任意函数 $f(x)$ 而积分的结果. 详细情形见以上所提起的《经典场论》第一章.

(2.15)中的 $\rho\boldsymbol{v}$,ρ 显然地满足(1.8)式. 为证明此点,我们注意 $\xi^{(i)}$,$\eta^{(i)}$,$\zeta^{(i)}$ 乃是 t 的函数,而 $\boldsymbol{v}^{(i)}$ 乃是

$$\mathrm{d}\xi^{(i)}/\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}\eta^{(i)}/\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}\zeta^{(i)}/\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}=\sum_i e^{(i)}\{&v_x^{(i)}\delta'(x-\xi^{(i)})\delta(y-\eta^{(i)})\delta(z-\zeta^{(i)})\\&+v_y^{(i)}\delta(x-\xi^{(i)})\delta'(y-\eta^{(i)})\delta(z-\zeta^{(i)})+\cdots\},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t}&=\sum_i e^{(i)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi^{(i)}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(i)})\frac{\mathrm{d}\xi^{(i)}}{\mathrm{d}t}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial\eta^{(i)}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(i)})\frac{\mathrm{d}\eta^{(i)}}{\mathrm{d}t}+\cdots\right\}\\&=\sum_i e^{(i)}\{-\delta'(x-\xi^{(i)})\delta(y-\eta^{(i)})\delta(z-\zeta^{(i)})v_x^{(i)}\\&\qquad-\delta(x-\xi^{(i)})\delta'(y-\eta^{(i)})\delta(z-\zeta^{(i)})v_y^{(i)}+\cdots\}.\end{aligned}$$

因此(1.8)满足.

值得指出,(2.15)中的 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(i)})$ 可以换为

$$\delta'(x-\xi^{(i)})\delta(y-\eta^{(i)})\delta(z-\zeta^{(i)})$$

而不影响(1.8)的被满足. 这样的电荷实际上相当于偶极子,重要性次于(2.15)中的点电荷.

§3 能量、动量、角动量的守恒

在这节中我们自麦克斯韦方程证明三个式子;它们分别地代表能量、动量、角动量的守恒.

(1) 能量的守恒

讨论电磁场所施于某体积中的电荷的力在一秒中所作的功

$$A=\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V. \tag{3.1}$$

上式即是寻常理论中力 $\boldsymbol{F}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的标积在我们所讨论的情形下的形式. 因 $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})=0$,得

$$A=\int\rho(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V. \tag{3.2}$$

利用(1.9)式,上式右方成为

$$\int\boldsymbol{E}\cdot\left\{\frac{c}{4\pi}\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right\}\mathrm{d}V. \tag{3.3}$$

将

$$\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\text{ 代替 }\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H},$$

又以

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\text{ 代替 }\nabla\times\boldsymbol{E},$$

(3.3)成为

$$\int\left\{-\frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)-\frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\right\}\mathrm{d}V$$

$$=\int\left\{-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)\right\}\mathrm{d}V-\int\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

因此得

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\mathrm{d}V=-A-\int\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{3.4}$$

所以能将积分号下的 $\partial/\partial t$,移至积分符号外,改写为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$,乃是因为此间所考虑的 V 及包围 V 的面 $\boldsymbol{S}$ 都是不变化的.

由(3.4)式可见,如果称$(8\pi)^{-1}(E^2+H^2)$为电磁场的能量密度 u,$(c/4\pi)\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为每秒中电磁场的能量在 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面上(沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向)所流过的数量,那么(3.4)便正确地代表了能量守恒定律. 在(3.4)双方乘以-1,这个新式子便说在体积 V 中电磁场能量在一秒中的减少,正是电磁场所施于 V 中电荷的力在一秒中所作的功,加上电磁场能量在 V 的表面 $\boldsymbol{S}$ 上在一秒中所流出的值. 如果将 A 写为在 V 中电荷的能 U_{m} 在一秒中的变化(物体的能在

一秒中的变化，即为外界所施于它的力在一秒中所作的功），

$$A = \mathrm{d}U_{\mathrm{m}}/\mathrm{d}t, \tag{3.5}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{U_{\mathrm{m}} + \int \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)\mathrm{d}V\right\} = -\int \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{3.6}$$

这句话的物理意义是：在体积内总能量（电磁场的及电荷的）在一秒中的变化等于在表面上电磁场能量的流入.

必须指出，由于(3.4)式的导出，我们才令$(1/8\pi)(E^2+H^2)$为电磁场能量密度$\boldsymbol{u}$，$(c/4\pi)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$为电磁场能量流密度$\boldsymbol{Y}$($\boldsymbol{Y}$通常称为坡印亭-乌莫夫矢量). 暂时不妨以为要引入这些名词的理由，仅是要将(3.4)式了解为能量守恒定律，如此才可以很容易地记住它及与它相应的事实.（这即是说，如果我们能记住(3.4)式，那么我们正不必引入以上的名词.）

所以要指出此点，乃是要避免对于电磁场能量密度$\boldsymbol{u}$，电磁场能量流密度$\boldsymbol{Y}$作不必要的猜测，例如大家熟知电磁波的进行速度为c，那么我们便会推测

$$uc = |\boldsymbol{Y}|, \tag{3.7}$$

而事实上这个式子只对于平面波有效.

另一方面，始终只强调(3.4)式而忽略$(1/8\pi)(E^2+H^2)$可以代表电磁场的能量密度$\boldsymbol{u}$等事实，也是不正确的. $(1/8\pi)$ (E^2+H^2)是一个物理量，有它的物理性质，其中之一即是（3.4）所代表的事实. 由（3.4）式及能量守恒的一般原则，可以设想它是能量密度. 这个设想完全可能是正确的. 这样的能量密度可能具有其他的性质，有些与物体的能量的性质相似，有些不相似，须具体地由我们的三假定去研究. 这些不相似处不妨碍它的被称为能量密度.

(3.6)似乎对于寻常物质及电磁场是不对称的，因为左方是二者的变化率，右方只是电磁场的能量的流入. 事实上，如果令U_{m}代表在V中电荷的机

械能，那么在时间变化时，由于电荷可以走过 V 的表面，$U_m(t+\Delta t)$，$U_m(t)$不代表同样的电荷的机械能. 另一方面，A 应该是某些不变的电荷的机械能的变化率，因此(3.5)应改为

$$A = \mathrm{d}U_m/\mathrm{d}t + \int \boldsymbol{Y}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

式中 $\boldsymbol{Y}_m$ 代表电荷的机械能的流量，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{U_m + \int \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)\mathrm{d}V\right\} = -\int \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int \boldsymbol{Y}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

显然地，上式对于寻常物质及电磁场是对称的. 对于下面的动量守恒式(3.15)，有类似的讨论，不拟重复.

有一点是极饶兴趣的，便是我们可以引入电荷施力于电磁场的概念. 令这个力大小与洛伦兹力相等，方向相反，于是(3.4)中的($-A$)可以了解为电荷所作用于电磁场的力所作的功，(3.4)可以了解电磁场的能量守恒；电磁场能量的流入加上电荷在电磁场上所作的功等于电磁场能量的增加.

必须强调：这不仅是一个看法而已，而有它的物理内容. 一方面，由电磁场可以承受力这一点，可以加强“电磁场是一种物质”的认识，另一方面，在电磁场可以承受力的理论中，牛顿第三定律——作用与反作用大小相等而方向相反——可以在电动力学中成立. 这一点将在(2)小节中再提起.

(2) 动量的守恒

讨论在体积 V 中电荷所受的力

$$\int \rho\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V. \tag{3.8}$$

以 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 代表($\partial \boldsymbol{E}/\partial t$)，$\dot{\boldsymbol{H}}$ 代表($\partial \boldsymbol{H}/\partial t$)，利用(1.9)，(1.12)，在上式中消去 ρ 及 $\rho\boldsymbol{v}$，得

$$\int\left\{\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\,\nabla \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} - \frac{1}{4\pi c}\dot{\boldsymbol{E}} \times \boldsymbol{H}\right\}\mathrm{d}V.$$

利用(1.10)，(1.11)，将上式写为

$$\int\left\{\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}\nabla\cdot\boldsymbol{H})+\frac{1}{4\pi}[(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4\pi c}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\times\dot{\boldsymbol{H}})\right\}\mathrm{d}V. \tag{3.9}$$

被积分项可以写为

$$\nabla\cdot\left\{\frac{1}{4\pi}\left[\boldsymbol{EE}+\boldsymbol{HH}-\frac{1}{2}(E^2+H^2)\boldsymbol{I}\right]\right\}-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \tag{3.10}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 代表并矢式

$$\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk},$$

而 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 乃是沿 x,y,z 轴的单位矢量. 由(3.9)得(3.10)的一个方法是：将(3.10)中花括号中的并矢式 $\boldsymbol{T}$ 的分量写出,

$$T_{ij}=\frac{1}{4\pi}(E_iE_j+H_iH_j)-\frac{1}{8\pi}\delta_{ij}(E^2+H^2),$$

式中 $i,j,\cdots$ 等取 1,2,3 等值,$E_1,E_2,\cdots,H_1,H_2,\cdots$ 分别代表 E_x, $E_y,\cdots,H_x,H_y,\cdots$;$T_{11},T_{12},\cdots$ 分别代表 $T_{xx},T_{xy},\cdots$ 等,而 δ_{ij} 是一个 i 及 j 的函数,定义为

$$\delta_{ij}=1\quad(i=j),$$
$$\delta_{ij}=0\quad(i\neq j).$$

那时我们所需要的证明即是证明下式：

$$\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}T_{ij}=\left\{\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}\nabla\cdot\boldsymbol{H})+\frac{1}{4\pi}[(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}\right.$$
$$\left.+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}]\right\}_j.$$

这样的证明虽然是直接的,但过于冗长,在此精简[①]. 我们在此采取一个较简单的证明,证明如下：

首先，　$\nabla\cdot(\boldsymbol{EE})=(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$;

前一项由于 ∇ 作用于前一个 $\boldsymbol{E}$ 而获得,后一项由于 ∇ 作用于后一个 $\boldsymbol{E}$ 而获得. 其次,

① 读者可参阅一个类似的计算,И. Е. Тамм:《电学原理》, § 105.

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}E^2\boldsymbol{I}\right)=\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}E^2(\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk})\right]$$
$$=\left(\nabla\cdot\frac{1}{2}E^2\boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{i}+\left(\nabla\cdot\frac{1}{2}E^2\boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{j}+\left(\nabla\cdot\frac{1}{2}E^2\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}E^2\right)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}E^2\right)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}E^2\right)\boldsymbol{k}$$
$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{E}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial y}\cdot\boldsymbol{E}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial z}\cdot\boldsymbol{E}\right)$$
$$=(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}.$$

因此

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{EE}-\frac{1}{2}E^2\boldsymbol{I}\right)=(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}.$$

由于

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-(\nabla\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}=(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{A},$$

得

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{EE}-\frac{1}{2}E^2\boldsymbol{I}\right)=(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}.$$

由此便可获得所需要的证明. 此后类似这些的证明,常常精简.

我们可以证明,对于任何并矢式 $\boldsymbol{T}$,

$$\int(\nabla\cdot\boldsymbol{T})\mathrm{d}V=\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}. \tag{3.11}$$

证明是很简单的. 将 T 写为

$$T_{11}\boldsymbol{ii}+T_{12}\boldsymbol{ij}+\cdots=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{i}+\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{k},$$

式中 $\boldsymbol{T}_1$ 代表矢量 $T_{11}\boldsymbol{i}+T_{21}\boldsymbol{j}+T_{31}\boldsymbol{k}$,等等,便获得

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{i}+\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{k})$$
$$=\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}_1)\boldsymbol{i}+\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}_2)\boldsymbol{j}+\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}_3)\boldsymbol{k}$$
$$=\int(\nabla\cdot\boldsymbol{T}_1)\boldsymbol{i}\mathrm{d}V+\int(\nabla\cdot\boldsymbol{T}_2)\boldsymbol{j}\mathrm{d}V+\int(\nabla\cdot\boldsymbol{T}_3)\boldsymbol{k}\mathrm{d}V$$
$$=\int\nabla\cdot(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{i}+\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{k})\mathrm{d}V$$

$$=\int(\nabla\cdot\boldsymbol{T})\mathrm{d}V.$$

此后类似这些的证明，也常常精简．$\left(\right.$在此应注意如果 $\boldsymbol{T}$ 不是对称的，即如果 $T_{ij}\neq T_{ji}$，那么$\left.\int(\nabla\cdot\boldsymbol{T})\mathrm{d}V\neq\int\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\right)$

利用(3.10)式及方程(3.11)，获得以下的结果：

$$\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V=\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}-\int\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V,\tag{3.12}$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 代表并矢式

$$\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{EE}+\boldsymbol{HH})-\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\boldsymbol{I}.\tag{3.13}$$

(3.12)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V=-\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V+\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}.\tag{3.14}$$

如果将 $(1/4\pi c)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$ 认为是电磁场的动量密度 $\boldsymbol{g}$，$-\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}$ 为一秒中电磁场的动量经过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$（沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向）的流动的数值，那么(3.14)式代表动量守恒定律．因为乘上了 -1 后，(3.14)式的意义即成为：在体积中电磁场动量在一秒中的减少，等于电磁场所施于电荷的力，加上电磁场动量在面上在一秒中的流出．如果将电荷所受的力认为是电荷的机械动量 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ 在一秒中的变化，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}\tag{3.15}$$

代表着：在体积 V 中在一秒中总动量（电磁场的及电荷的）的增加，等于电磁场动量在 $\boldsymbol{S}$ 面上在一秒中的流入．在电荷可以走过表面时，(3.15)应该改变，改变后的式子对于电磁场及电荷是对称的（见(3.7)式后的讨论）．

在(1)中对于 $(1/8\pi)(E^2+H^2)$ 为能量密度 u 的讨论，也可以同样地援用到 $(1/4\pi c)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$．$(1/4\pi c)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$ 为动量密度 $\boldsymbol{g}$，乃是因为它满足(3.15)式．在寻常牛顿力学中的能量动量关系

$$\text{能量} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot(m\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot(\text{动量}),$$

对于电磁场而言是不满足的.在相对论力学中(见本书第七章),一个质点的能量 U 与动量 $\boldsymbol{p}$ 有以下的关系:

$$U = c\{(m_0c)^2 + \boldsymbol{p}^2\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.16}$$

式中 m_0 是一个常数,代表质点在静止时的质量,称为静质量.对于在真空中的平面电磁波,我们有

$$u = c|\boldsymbol{g}|, \tag{3.17}$$

正同 $m_0=0$ 的(3.16)式一样,但在一般情形下,(3.17)式不成立.因此 u 与 $\boldsymbol{g}$ 中的关系,不能自寻常力学或相对论力学中质点的动量能量所适合的关系用比拟法而获得,必须自我们的出发点(1.8),(1.9)—(1.12),(1.14)具体去讨论.

(3.14)也可以如此地解释:左方的解释与前相同,即 $(1/4\pi c)\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 依然代表电磁场动量密度,右方第一项解释为在体积中的电荷在一秒中所给予体积中的电磁场的动量,右方第二项代表在体积面上由外流入体积内的电磁场动量.因此(3.14)代表电磁场动量的守恒.注意这个解释与以上的解释完全相同.事实上,在新的解释中,在面上流入了电磁场的动量 $\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}$,成为体积内的电磁场动量的增加,但其中一部分由电磁场送给了电荷(即(3.14)右方第一项取去负号),余下的一部分成为(3.14)左方,如此便获得了原来对于(3.14)的解释.

应当指出:引入电荷施力于电磁场的概念,对于(3.14)的认识是有所帮助的.该时我们将(3.14)右方第一项了解为电荷所施于电磁场的力,第二项代表体积外电磁场所施于体积内电磁场的力,那么(3.14)便成为电磁场的牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$.如此 $\boldsymbol{T}$ 便代表张力.在这样的理论中,无论我们讨论在体积内外电磁场相互所施的力,或讨论电磁场所施于电荷及电荷所施于电磁场的一对力,牛顿第三定律都成立.有些作者认为这个看法是更正确的,认为根据场的物质性,张力是不可避免的,因而认为张力是客观的实在;在本书作者看来,虽然这样的看法并不能带来实际上

有用的、不同于(3.14)的结果，但这样的看法是应该为我们所采取的①.

(3) 角动量的守恒

取空间任意固定点为原点，令 $\boldsymbol{r}$ 代表矢量(x,y,z)，那么我们可以证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$
$$=-\int\boldsymbol{r}\times\left[\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\right]\mathrm{d}V+\int\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}). \tag{3.18}$$

证明方法与前雷同，因过于冗长，在此精简. $(1/4\pi c)\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$显然代表电磁场角动量密度. 令$-\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T})$代表在一秒中在 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面上(沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向)所流过的电磁场的角动量的值，那么上式显然代表角动量的守恒.

这里引起兴趣的问题乃是：我们由量子力学，知道组成电磁波的光子有自旋现象，因而有自旋角动量，而$(1/4\pi c)\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$中含有 $\boldsymbol{r}$，好像只代表轨道运动的角动量. 事实上可以证明这非但包含了轨道运动的角动量，也包含了自旋的角动量②. 在寻常的量子力学的场论中，自旋的角动量与场的(或波函数的)各分量在寻常三维空间转动下的变换性质有密切的联系，而如果场的(或波函数的)各分量在三维空间转动下的变换正如一个矢量时，自旋角动量的值是 1 (单位是$(1/2\pi)\times$普朗克常数). 因此，自旋角动量与场的可能偏振情形有关，而同时表示电磁场自旋角动量的式子不包含 $\boldsymbol{r}$③. 但在这个理论中的总角动量，不适合“规范不变性”的要求(规范不变性将在本书 § 7 中讨论)，因此必须加以改变. 用减去一项而同时不影响角动量守恒的办法，可以

---

① 所遗憾的，即是这样的力并不完全地决定运动，像力学中的情形似的. 事实上，(3.14)只能部分地决定运动；完全地决定运动的乃是麦克斯韦方程.

② 参阅 А.И. Ахиезер 及 В.Б. Береотецкий 合著：《量子电动力学》§ 3.

③ 在此理论中电磁场的自旋角动量见 Д. Иваненко 及 А. Соколов：《经典场论》§ 30.

将角动量变得适合规范不变性. 如此获得的电磁场的总角动量密度正是$(1/4\pi c)\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$①. 在经典的场论中，有同样的情形（见下面§50）.

在电磁场的理论中有这三种守恒，是令人满意的.

§4 守恒定律的应用

我们在此指出守恒定律的两个应用. 这一节是比较不重要的.

(1) 由能量守恒定律证明麦克斯韦方程的解的惟一性

在这里我们证明：如果已给某一体积V，而

(i) $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 在 $t=0$ 时刻在 V 中各点上的值是已知的（起始条件）；

(ii) $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$（即 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 中之一）在 V 的表面 $\boldsymbol{S}$ 上在所有的时刻是已知的（边界条件）；那么在 V 中满足麦克斯韦方程的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 只有一个解. $\rho,\rho\boldsymbol{v}$ 在此讨论中作为已知量.

证明如下：

令 $\boldsymbol{E}^{(1)},\boldsymbol{H}^{(1)}$为一个解，$\boldsymbol{E}^{(2)},\boldsymbol{H}^{(2)}$为另一个解，令 $\boldsymbol{E}^*=\boldsymbol{E}^{(1)}-\boldsymbol{E}^{(2)},\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{H}^{(1)}-\boldsymbol{H}^{(2)}$，那么 $\boldsymbol{E}^*,\boldsymbol{H}^*$满足 $\rho=0,\rho\boldsymbol{v}=0$ 的麦克斯韦方程. 利用获得(3.4)的方法，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^{*2}+\boldsymbol{H}^{*2})\mathrm{d}V=-\int\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\tag{4.1}$$

由于(ii)，$\boldsymbol{E}^*,\boldsymbol{H}^*$中之一在 $\boldsymbol{S}$ 上为零，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^{*2}+\boldsymbol{H}^{*2})\mathrm{d}V=0,$$

亦即

$$\int\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^{*2}+\boldsymbol{H}^{*2})\mathrm{d}V=\text{常数}.$$

利用(i)，得

$$\int\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^{*2}+\boldsymbol{H}^{*2})\mathrm{d}V=0.\tag{4.2}$$

如果 $\boldsymbol{E}^*,\boldsymbol{H}^*$不完全等于零，上式左方必然大于零；因此 $\boldsymbol{E}^*=\boldsymbol{H}^*=0$，给了我们所需要证明的 $\boldsymbol{E}^{(1)}=\boldsymbol{E}^{(2)},\boldsymbol{H}^{(1)}=\boldsymbol{H}^{(2)}$.

---

① 参阅 T. S. Chang（张宗燧），*Proc. Camb. Phil. Soc.* **44**(1947) 76—86.

很显然地，如果令 V 为全部空间，那么(ii)应换为另一条件，使在无穷远处的面积分

$$\int_{\infty}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

等于零，亦即要 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 在无穷远处非但趋近于零，而且以适当的速度趋近于零，例如要求

$$\boldsymbol{E} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \boldsymbol{H} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{4.3}$$

等等. "O"在上式中代表数量级. 不幸地，在通常有辐射的情形下，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 等不适合(4.3)式.

(2) 由动量守恒定律去计算辐射压力

在(3.14)的讨论中，我们曾将 $\boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 解释为体积 V 外电磁场所施于 V 内(邻近于表面的)电磁场的力. 不难看出，这一项也等于 V 中全部物质(电磁场及电荷)所受的总力. 事实上，(3.14)左方乃是 V 中电磁场所受的总力，(3.14)右方第一项取去负号成为 V 中电荷所受的总力；将此项移至左方，即得所需要的证明. 因此，$\boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可称为辐射压力①.

如果我们所欲求的乃是 V 中电荷所受的总力，那么由于(3.14)的左方可以不等于零，它不一定等于 $\boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的面积分. 讨论以下的具体情形.

图 4

设 $fhgi$ 为一物体(见图 4)，设电磁波由 fg 左方某处自左而右地射至此物体的表面 $fabg$ 上. 令 ab 为一单位面积. 假定电磁波经过行程 ac 后已完全被吸收，即假定在 cd 右方电磁波的强度为零. 先计算 $abcd$ 体积中电荷所受

---

① 按辐射压力即光压力，为著名科学家 П. Н. Лебедев 首先在实验室中证实. 参阅 П. Н. Лебедев 选集，1949，p. 154.

的总力 $\boldsymbol{F}$.

依照(3.14),

$$\boldsymbol{F}=\int_{ab}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}+\int_{cd}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}+\int_{ac}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}+\int_{bd}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{abcd}\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V. \tag{4.4}$$

因 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 在 cd 面上等于零,上式右方第二项可以忽略.第三项第四项由于对称性相互抵消.如果第五项可以忽略,得

$$\boldsymbol{F}=\int_{ab}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}. \tag{4.5}$$

称 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向为 $\boldsymbol{n}$,得

$$\boldsymbol{F}=\int_{ab}\mathrm{d}S(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}). \tag{4.6}$$

亦即总力 $\boldsymbol{F}$ 等于 ab 面上一个压力$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})$所合成的力.

必须指出两点:

(i) 实际上物体中电荷所受的力,并不在 ab 的几何面上.取邻近于 ab 在 ab 右方的一小块体积 V',如果在此 V' 的表面上 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 不完全等于零,那么利用(3.14)式可以算出 V' 中电荷所受的力而证明这个力不等于零.事实上,电磁波进入物体后经过一个很小的距离(除开 X 射线及有高度渗透性的 γ 射线外),往往强度即几乎变为零,因此受力的电荷几乎完全在 ab 右方一个薄层内.因此粗糙地讲我们可以认为受力处即是 ab 表面.在这个意义下,我们说电磁波施一个压力 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}$ 在物体的表面 ab 上.

(ii) 我们指出由(4.4)推出(4.5)时,我们曾忽略了(4.4)中的第五项.这严格讲来是不正确的,因为第五项不等于零.虽然如此,在某种情形下,忽略第五项还是可以的.例如让电磁波自 $t=0$ 起以不变的强度不断地射至物体而讨论 t 很大时的情形.那时在每一点的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 对于时间的变化都近似为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos 2\pi\nu t,\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\cos 2\pi\nu t. \tag{4.7}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V\quad 或\quad \int\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$

对于时间的平均等于零.因此令 $\overline{\boldsymbol{F}},\overline{\boldsymbol{T}}$ 代表 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{T}$ 对于时间的平均,得

$$\overline{\boldsymbol{F}}=\int_{ab}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\overline{\boldsymbol{T}}. \tag{4.8}$$

能量、动量、角动量守恒定律的其他应用,在此不拟多加讨论.它们非但

在经典电动力学中带来了许多结果，在量子电动力学中也具有巨大的影响. 能量动量守恒的重要性，比较容易体会；角动量守恒的重要性比较难以体会. 但在事实上，在量子力学中，在原子核物理中，它的重要性是非常突出的. 例如用角动量的能否守恒，可以粗糙地判断一个原子核反应，能否顺利地进行.

§5　假想的磁荷与麦克斯韦方程

在我们的理论中，磁荷是不存在的；但如果我们欲在理论中引进磁荷，这样的工作是极容易做的. 在此节中，我们在麦克斯韦方程中引入磁荷，同时引入磁荷所受的力，再证明§3中的守恒定律依然有效.

称 $\tilde{\rho}$ 为磁荷密度，$\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}}$为磁荷流密度；它们为 x,y,z,t 的函数，适合

$$\nabla \cdot \tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = 0, \tag{5.1}$$

与(1.8)相似，表示着磁荷的守恒. 显然地，(1.11)式应改为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 4\pi\tilde{\rho}. \tag{5.2}$$

经过此改变后，(1.10)必须作一些相应的变更，使得在 $t=0$ 的起始条件(5.2)及运动方程(1.10)可以带来在 $t>0$ 时的(5.2). 变更后的(1.10)式成为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{5.3}$$

证明是极易的，不必写出. 因此，麦克斯韦方程成为

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{v}, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \dfrac{4\pi}{c}\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 4\pi\tilde{\rho}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \end{cases} \tag{5.4}$$

注意在第一式及第二式中符号的不同.

我们再假定 $\mathrm{d}V$ 中磁荷所受的力为

$$\tilde{\rho}\left(\boldsymbol{H} - \frac{\tilde{\boldsymbol{v}}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V. \tag{5.5}$$

所以这样的假定，乃是可以由此获得三种守恒定律.

我们在此只证明能量守恒定律，因为另外两个的证明是类似的. 电磁场

所作的功 A 为

$$\begin{aligned}&\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V+\int\tilde{\rho}\left(\boldsymbol{H}-\frac{\tilde{\boldsymbol{v}}}{c}\times\boldsymbol{E}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}V\\&\quad=\int\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V+\int\tilde{\rho}\boldsymbol{H}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}V\\&\quad=\int\left\{\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E})-\frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)\right\}\mathrm{d}V\\&\quad=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\mathrm{d}V-\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\end{aligned}\tag{5.6}$$

因此获得了(3.4)式，亦即能量守恒的式子．可注意的是：此处的能量密度 u，能量流密度 $\boldsymbol{Y}$，依然分别地为

$$\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2),\quad\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}),$$

与以前的结果相同，并不因磁荷的引入而有所改变．同样，我们证明

$$\begin{aligned}&\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V+\int\tilde{\rho}\left(\boldsymbol{H}-\frac{\tilde{\boldsymbol{v}}}{c}\times\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V\\&\qquad=\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}-\int\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V,\end{aligned}\tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{EE}+\boldsymbol{HH})-\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\boldsymbol{I},$$

$$\begin{aligned}&\int\boldsymbol{r}\times\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V+\int\boldsymbol{r}\times\tilde{\rho}\left(\boldsymbol{H}-\frac{\tilde{\boldsymbol{v}}}{c}\times\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V\\&\qquad=\int\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T})-\int\frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{r}\times\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V,\end{aligned}\tag{5.8}$$

代表着动量与角动量的守恒．此间的电磁场动量密度，角动量密度，动量流密度，角动量流密度如何地为 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 的函数，与§3中的结果完全相同，并不因磁荷的引入而有所改变．毋庸多说，它们的数值是有了变化的，因为 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 的值在磁荷引入后必然有所变化．

此外，麦克斯韦方程(5.4)的解的存在的讨论，解的惟一性的讨论，也正同以前一样，不必重复．

(5.4)式对于电及磁有一个对称性；即如果我们将 ρ 换为 $\tilde{\rho}$，$\boldsymbol{v}$ 换为 $\tilde{\boldsymbol{v}}$，$\tilde{\rho}$ 换为 $-\rho$，$\tilde{\boldsymbol{v}}$ 换为 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{E}$ 换为 $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{H}$ 换为 $-\boldsymbol{E}$，那么(5.4)是不变的．事实上，在这样的变化中，(1.8)变为(5.1)，(5.1)变为(1.8)，(5.4)中第一第二两式互相对换，第三第四两式互相对换．因此如果已知 $\tilde{\rho}=\tilde{\rho}\,\tilde{\boldsymbol{v}}=0$，又已知

$$\rho=f_\rho(x,y,z,t),\quad\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}_v(x,y,z,t),$$

而求得(5.4)的解

$$\boldsymbol{E} = f_E(x,y,z,t),\quad \boldsymbol{H} = f_H(x,y,z,t), \tag{5.9}$$

那么当我们已知

$$\rho = \rho\boldsymbol{v} = 0,\quad \tilde{\rho} = f_\rho(x,y,z,t),\quad \tilde{\boldsymbol{v}} = f_v(x,y,z,t)$$

时,(5.4)的解便是

$$\boldsymbol{E} = -f_H(x,y,z,t),\quad \boldsymbol{H} = f_E(x,y,z,t). \tag{5.10}$$

因此知道了一个电荷所发出的电磁场,便可以很快地求得一个磁荷所发出的电磁场.

由于磁荷是假想的,在实际上是不存在的,我们以后不讨论它.

§6　一个以均匀而小的速度运动着的电子的电磁场

讨论一个以均匀而小的速度运动着的电子所产生的电磁场.这固然是一个极特殊的情形,但是我们在此讨论它,使我们对于电子所产生的电磁场有一些初步的认识.

由于电子始终用同一速度 $\boldsymbol{v}$ 运动,那么密度 ρ 必然适合下列式子:

$$f(x+v_x\Delta t, y+v_y\Delta t, z+v_z\Delta t, t+\Delta t) = f(x,y,z,t); \tag{6.1}$$

亦即是在 t 时刻某点 P 上的密度 ρ,必须与在 $t+\Delta t$ 时刻,在离 P 为 $\boldsymbol{v}\Delta t$ 的点 Q 上的密度 ρ 相同. 同样地,$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 也必须适合上式.(6.1)可以写为

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{6.2}$$

取 x 轴的方向,使与 $\boldsymbol{v}$ 方向平行,得

$$v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

应用此到 ρ,$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$,得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v\frac{\partial \rho}{\partial x},\quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -v\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x},\quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -v\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x}. \tag{6.3}$$

当 $v=0$ 时,我们熟知

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi, \tag{6.4}$$

$$\varphi(x,y,z,t)=\int\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,t)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$(r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}), \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{H}=0.$$

当 $\boldsymbol{v}$ 为极小量而不等于零时,我们立即可以想像

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi+O(\boldsymbol{v}/c), \tag{6.6}$$

式中 φ 依然为(6.5)式右方. 在 O 项中所以写入 $\boldsymbol{v}/c$ 而不写 $\boldsymbol{v}$,在此尚无法证明,但这可以猜想得到,因 v/c 为无量纲①的量. 事实上,在本节的讨论中可以不写 v/c 而写 v. 以(6.3)代入(1.9)式,得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{v}=-\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\nabla\cdot\boldsymbol{E}$$

$$=\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}\right).$$

因此

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}-\nabla\varphi',$$

式中 φ' 为一尚未决定的标量. 因 $\boldsymbol{v}=0$ 时的 $\boldsymbol{H}$ 为零,φ' 与 v/c 或 (v/c) 的高次项同级. 代入(1.11),得

$$\nabla\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}-\nabla\varphi'\right\}=0,$$

所以

$$-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\nabla^2\varphi'=0.$$

由(6.6),可证 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 为 $O(v/c)$,因此

$$\nabla^2\varphi'=O(v^2/c^2).$$

因为 φ' 至低与 v/c 同级,得 $\varphi'=O(v^2/c^2)$. 因此

① 现改为量纲一. ——编者注

$$H=\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{6.7}$$

最后我们验证(6.6),(6.7)能否满足(1.10)式.(1.10)左方 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 为 $O(v/c)$(由(6.6)式),右方为

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\frac{1}{c}v\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x}=O\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

因此(1.10)的能否满足,与(6.6)式中尚未决定的 $O(v/c)$ 有关,在此不拟讨论.

总结以上,

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi+O\left(\frac{v}{c}\right),\quad \boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{6.8}$$

乃是(1.9)—(1.12)式的解.由此可以计算一个如此运动着的电子所产生的电磁场的总能量、总动量、总角动量.因为以后尚须计算一个以任意而均匀的速度运动着的电子所产生同样的问题,因此这问题在此不作为讨论的重点.

对于离开电子较远的地点,电子可以认为几乎集中于一点 A. 那时

$$\varphi(x,y,z,t)=e/r, \tag{6.9}$$

式中 e 代表电子总电荷,r 代表自电子 A 处至 (x,y,z) 点的距离.为简单起见,以 P 点代表 (x,y,z),称为场点.(6.5)式中的 (ξ,η,ζ) 将称为源点;因为(6.5)式中的 (ξ,η,ζ) 为产生电磁场的电源的坐标.(6.9)式中的 φ 为 t 的函数,因为 r 代表自电子 A 至场点 P(即 (x,y,z) 点)的距离,而 A 的位置是变化的.由(6.8),(6.9),得

$$\boldsymbol{E}=\frac{e\boldsymbol{r}}{r^3}+O\left(\frac{v}{c}\right),\quad \boldsymbol{H}=\frac{e}{c}\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{6.10}$$

此处 $\boldsymbol{r}$ 代表自电子 A 至场点 P 的矢量.

寻常的毕奥-萨伐尔定律可以自(6.10)式立即获得.令电子在一线形导体中流动,速度都是 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}$ 的方向与导体平行.令 S 为导体截面,n 为电子密度,那么以 $d\boldsymbol{l}$ 为长的一段导线中的电子所产生的磁场为(见图 5)

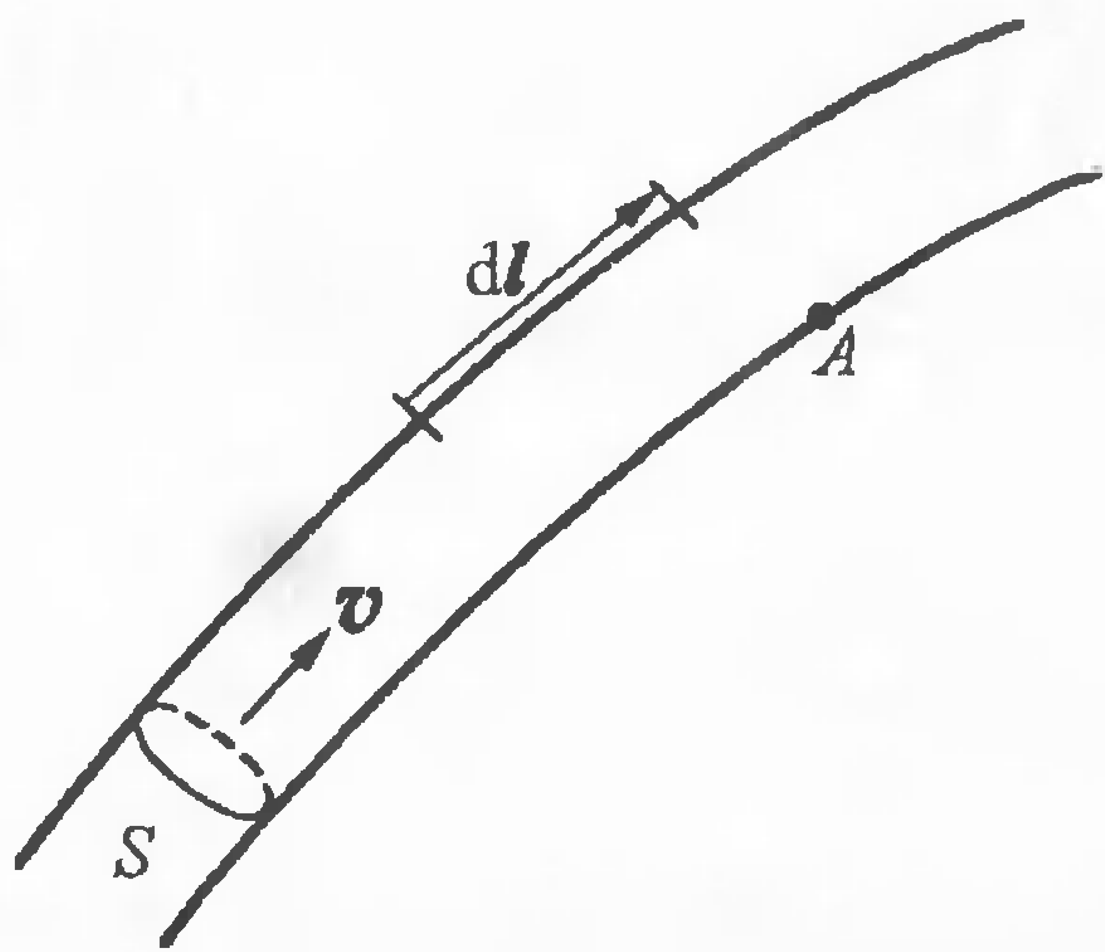


图 5

$$n|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|S\,\frac{e}{c}\,\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad (6.11)$$

但 $nSve$ 为静电单位的电流强度 I，因此上式成为

$$(I/c)(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r})/r^3.$$

对 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 积分，得

$$\boldsymbol{H}(P)=(I/c)\int\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}/r^3. \qquad (6.12)$$

让我们在此研究两个以均匀而不相等的小速度 $\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}$ 运动着的电子的相互作用力，同这两个电子的电磁场的总能，总动量. 在此计算中，我们暂且利用 §13 中的结果，即(6.10)中第一式的 $O(v/c)$ 实际上为 $O(v^2/c^2)$，(6.10)中第二式中的 $O(v^2/c^2)$ 实际上为 $O(v^3/c^3)$，而在计算中忽略 $\boldsymbol{v}^{(1)2},\boldsymbol{v}^{(2)2}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 等的三次方.

(i) 先讨论作用力. 令 $e^{(1)},e^{(2)}$ 为两个带电体的总电荷，$\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)}$ 为它们的中心所在处，令 $\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}$ 为它们的速度，令 $\boldsymbol{r}^{(12)}=\boldsymbol{r}^{(2)}-\boldsymbol{r}^{(1)}$. 暂且不讨论它们个别所产生的电磁场所施于它们本身的力，即不讨论第一个电荷所产生的电磁场所施于第一个电荷的力等等；这些力称为“自作用力”，将在第五章中讨论. 当两个电荷的距离比它们本身大小大出很多时，第一个电荷所产生的电磁场在第二个电荷处的值分别地等于

$$e^{(1)}\boldsymbol{r}^{12}/(r^{12})^3, \quad (e^{(1)}/c)\,\boldsymbol{v}^{(1)}\times\boldsymbol{r}^{12}/(r^{12})^3.$$

因此第二个电荷受力

$$e^{(2)}\left\{e^{(1)}\frac{\boldsymbol{r}^{12}}{(r^{12})^3}+\frac{\boldsymbol{v}^{(2)}}{c}\times\left[\frac{e^{(1)}}{c}\boldsymbol{v}^{(1)}\times\frac{\boldsymbol{r}^{12}}{(r^{12})^3}\right]\right\}.$$

同样第一个电荷受力

$$e^{(1)}\left\{e^{(2)}\frac{\boldsymbol{r}^{21}}{(r^{21})^3}+\frac{\boldsymbol{v}^{(1)}}{c}\times\left[\frac{e^{(2)}}{c}\boldsymbol{v}^{(2)}\times\frac{\boldsymbol{r}^{21}}{(r^{21})^3}\right]\right\}.$$

因 $\boldsymbol{r}^{12}=-\boldsymbol{r}^{21}$，两个力的总和为

$$e^{(1)}e^{(2)}\frac{\boldsymbol{r}^{(12)}}{(r^{12})^3}\times(\boldsymbol{v}^{(1)}\times\boldsymbol{v}^{(2)}), \qquad (6.13)$$

不等于零.因此作用与反作用在这里不是大小相等而方向相反,与力学中的情形不同.

这是毋庸奇怪的,因为一般来讲只在两个物体互相接触时作用才必然与反作用相等而相反.如果两物体不互相接触,一个物体对另一个物体的影响是由第一个物体以有限的速度射出一些"力场",而这个"力场"遇到第二个物体才使后者受力,那么根本不能,也不必要求作用和反作用的相等和相反.两个电荷间的相互作用显然属于这一类型的.

必须指出,如果我们引入电磁场也可以承受力的观念,那么我们可以在讨论作用与反作用时,只讨论接触着的两个物体(场或带电体),而获得"作用反作用相等而相反"的理论;详情见§3中(3.17)式后的讨论.在电磁场可以承受力的理论中,我们在考虑两个带电荷的力,发现它们不相等时所以会认为牛顿第三定律不成立,乃是因为我们忘记了场的物质性,忘记了场也可以承受力.

一个饶有兴趣的点是:一个电荷及一个假想的磁荷的作用力是相等而相反的.令 e 代表电荷,$\tilde{e}$ 代表磁荷,它们的速度为 $\boldsymbol{v},\tilde{\boldsymbol{v}}$,位置为 $\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{r}}$.再令 $\boldsymbol{r}^{12}$ 代表自 $\boldsymbol{r}$ 至 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ 的矢量.那么用(5.5)式,得磁荷所受的力

$$\tilde{e}\left\{\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\frac{\boldsymbol{r}^{12}e}{(r^{12})^3}-\frac{1}{c}\,\tilde{\boldsymbol{v}}\times\frac{\boldsymbol{r}^{12}e}{(r^{12})^3}\right\}.$$

根据§5最后一节讨论,磁荷在电子处所产生的电磁场分别为

$$-\tilde{\boldsymbol{v}}\times\frac{\boldsymbol{r}^{21}\tilde{e}}{(r^{21})^3},\quad \frac{\boldsymbol{r}^{21}\tilde{e}}{(r^{21})^3};$$

因此电荷 e 所受的力为

$$e\left\{-\tilde{\boldsymbol{v}}\times\frac{\boldsymbol{r}^{21}\tilde{e}}{(r^{21})^3}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\frac{\boldsymbol{r}^{21}\tilde{e}}{(r^{21})^3}\right\}.$$

因 $\boldsymbol{r}^{12}=-\boldsymbol{r}^{21}$,我们便证明了以上两个力的相等和相反.

(ii) 讨论两个电荷所成系统的总能量.令 $\boldsymbol{E}^{(1)},\boldsymbol{H}^{(1)},\boldsymbol{E}^{(2)},\boldsymbol{H}^{(2)}$ 分别地为第一个电荷,第二个电荷所产生的电磁场.显然地

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{(1)}+\boldsymbol{E}^{(2)},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{(1)}+\boldsymbol{H}^{(2)}.$$

电磁场的总能可分为两部分,一为

$$\int \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^{(1)2}+\boldsymbol{H}^{(1)2}+\boldsymbol{E}^{(2)2}+\boldsymbol{H}^{(2)2})\mathrm{d}V, \tag{6.14}$$

这一部分称为“自能”,将在本节最末一段中讨论(在第三章中将重新讨论这个问题,在那里速度 v 是任意大小的);另一部分是

$$\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}^{(2)}+\boldsymbol{H}^{(1)}\cdot\boldsymbol{H}^{(2)})\mathrm{d}V. \tag{6.15}$$

讨论电荷间距离较电荷本身大小大出很多的情形;那时在计算(6.15)时我们可以将电子认为是几何点.令 $\boldsymbol{r}_1$ 为自第一个电荷至场点的矢量,$\boldsymbol{r}_2$ 为自第二个电荷至场点的矢量,得

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}^{(1)}=e^{(1)}\boldsymbol{r}_1/r_1^3, & \boldsymbol{H}^{(1)}=(\boldsymbol{v}^{(1)}/c)\times\boldsymbol{E}^{(1)},\\ \boldsymbol{E}^{(2)}=e^{(2)}\boldsymbol{r}_2/r_2^3, & \boldsymbol{H}^{(2)}=(\boldsymbol{v}^{(2)}/c)\times\boldsymbol{E}^{(2)}.\end{cases} \tag{6.16}$$

将(6.16)式代入(6.15)式得

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\int\left[1+\frac{\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v}^{(2)}}{c^2}\right](\boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}^{(2)})\mathrm{d}V\right.$$
$$\left.-\int\frac{(\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}^{(2)})(\boldsymbol{v}^{(2)}\cdot\boldsymbol{E}^{(1)})}{c^2}\mathrm{d}V\right\}. \tag{6.17}$$

为求这些积分的值,取坐标系使两电荷的坐标分别为

$$(b,0,0),\quad (-b,0,0).$$

我们所须要求的积分乃是

$$\int E_x^{(2)}E_x^{(1)}\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\frac{(x+b)(x-b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{[(x-b)^2+y^2+z^2]^{3/2}[(x+b)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$
$$=\iint\frac{2\pi\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x(x+b)(x-b)}{[(x-b)^2+\rho^2]^{3/2}[(x+b)^2+\rho^2]^{3/2}} \tag{6.18}$$
$$(\rho^2=y^2+z^2)$$

及

$$\int E_y^{(1)}E_y^{(2)}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\left\{\int(E_y^{(1)}E_y^{(2)}+E_z^{(1)}E_z^{(2)})\mathrm{d}V\right\}$$
$$=\iiint\frac{(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2[(x-b)^2+y^2+z^2]^{3/2}[(x+b)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

$$= \iint \frac{\pi\rho^3 \mathrm{d}\rho \mathrm{d}x}{[(x-b)^2+\rho^2]^{3/2}[(x+b)^2+\rho^2]^{3/2}}. \tag{6.19}$$

其他的积分如

$$\int E_x^{(1)} E_y^{(2)} \mathrm{d}V, \quad \int E_y^{(1)} E_z^{(2)} \mathrm{d}V$$

等等都等于零. 积分结果为:(6.18)等于零,(6.19)等于 $2\pi/r_{12}$. 因此(6.17)成为

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(1+\frac{\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v}^{(2)}}{c^2}\right)\cdot\frac{4\pi}{r_{12}}-\frac{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}{c^2}\int E_x^{(1)}E_x^{(2)}\mathrm{d}V\right.$$
$$\left.-\frac{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}{c^2}\int E_y^{(1)}E_y^{(2)}\mathrm{d}V-\frac{v_z^{(1)}v_z^{(2)}}{c^2}\int E_z^{(1)}E_z^{(2)}\mathrm{d}V\right\}$$
$$=\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{r_{12}}\left\{\left[1+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v}^{(2)}}{c^2}\right]+\frac{1}{2c^2}\frac{(\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{r}_{12})(\boldsymbol{v}^{(2)}\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{(r_{12})^2}\right\}. \tag{6.20}$$

这个结果可以同量子力学中所计算出来的结果比较. 在量子力学中,我们有 Breit 公式①;在此公式中两个电子的相互作用能为

$$(e^2/r_{12})-\frac{1}{2}(e^2/r_{12})\{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)}+(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\cdot\boldsymbol{n})\}, \tag{6.21}$$

式中 α 代表狄拉克算子,相当于此间的速度(乘以 c^{-1}),$\boldsymbol{n}$ 代表 $\boldsymbol{r}_{12}/r_{12}$. 要比较两种力学的结果,应比较经典力学中的总能与量子力学中的总能,即比较

$$\frac{1}{2}m^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)2}+\frac{1}{2}m^{(2)}\boldsymbol{v}^{(2)2} \tag{6.22}$$

加上(6.20)与

$$(\boldsymbol{p}^{(1)2}/2m^{(1)})+(\boldsymbol{p}^{(2)2}/2m^{(2)}) \tag{6.23}$$

加上(6.21). 理由是:(6.23)中的 $\boldsymbol{p}$ 是量子力学中质点的动量,与 $m\boldsymbol{v}$ 不同,使(6.22),(6.23)成为不同的两个量. 实际上,如果忽略了"自相互作用",

$$\boldsymbol{p}^{(1)}=m^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)}+(e^{(1)}/c)(e^{(2)}\boldsymbol{v}^{(2)}/cr_{12})②.$$

忽略了 $\boldsymbol{v}^{(1)}$,$\boldsymbol{v}^{(2)}$ 的方($m_1\boldsymbol{v}^{(1)2}$,$m_2\boldsymbol{v}^{(2)2}$除外),以 $\boldsymbol{v}$ 代替 αc,计算(6.21)加上

---

① 参阅 G. Breit, *Phy. Rev.* **34**(1929)553,或 А. И. Ахиезер 与 В. Б. Берестецкий 合著:《量子电动力学》§ 37.

② $\boldsymbol{p}$ 应该为 $m\boldsymbol{v}+(e/c)\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ 代表电磁场的矢量势(矢量势的讨论见本书 § 7). 此处的 $e^{(2)}\boldsymbol{v}^{(2)}/cr_{12}$ 乃是第二个电荷所产生电磁场在第一个电荷处的矢量势.

(6.23)所得的值,得

$$\frac{1}{2}m^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)2}+\frac{1}{2}m^{(2)}\boldsymbol{v}^{(2)2}+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{r_{12}}\left[1+\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v}^{(2)}}{c^2}\right]$$

$$-\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{r_{12}^3}(\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{r}_{12})(\boldsymbol{v}^{(2)}\cdot\boldsymbol{r}_{12}),\tag{6.24}$$

这与(6.20)加上(6.22)的和是不同的.

(iii) 其次讨论两个电荷所成系统的电磁场的总动量. 显然地,正如它们的电磁场的总能量可以分为(6.14)及(6.15)一样,总动量可以分为

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\int\boldsymbol{E}^{(1)}\times\boldsymbol{H}^{(1)}\mathrm{d}V+\int\boldsymbol{E}^{(2)}\times\boldsymbol{H}^{(2)}\mathrm{d}V\right\}\tag{6.25}$$

同

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\int\boldsymbol{E}^{(1)}\times\boldsymbol{H}^{(2)}\mathrm{d}V+\int\boldsymbol{E}^{(2)}\times\boldsymbol{H}^{(1)}\mathrm{d}V\right\}\tag{6.26}$$

的两项. (6.25)将在(iv)中讨论.

当两个电荷的距离比它们本身大小大得很多时,在(6.26)式中我们可以应用(6.10)式. (6.26)式可以写为

$$\frac{1}{4\pi c^2}\int[(\boldsymbol{v}^{(1)}+\boldsymbol{v}^{(2)})(\boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}^{(2)})$$

$$-\boldsymbol{E}^{(2)}\boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v}^{(2)}-\boldsymbol{E}^{(1)}\boldsymbol{E}^{(2)}\cdot\boldsymbol{v}^{(1)}]\mathrm{d}V.$$

自(6.18),(6.19)等的积分结果,得

$$\int\boldsymbol{E}^{(2)}\boldsymbol{E}^{(1)}\mathrm{d}V=\int\boldsymbol{E}^{(1)}\boldsymbol{E}^{(2)}\mathrm{d}V=\frac{2\pi}{r_{12}}\left\{\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{12}}{(r_{12})^2}\right\}e^{(1)}e^{(2)},$$

$$(\boldsymbol{I}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk})$$

$$\int\boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}^{(2)}\mathrm{d}V=\frac{4\pi}{r_{12}}e^{(1)}e^{(2)};$$

由此算出电磁场总动量为

$$\frac{1}{2c^2}\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{r_{12}}\left[\{\boldsymbol{v}^{(1)}+\boldsymbol{v}^{(2)}\}+\left(\frac{\boldsymbol{v}^{(2)}\cdot\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}+\frac{\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\right)\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\right]_0.\tag{6.27}$$

电荷的动量为

$$m^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)}+m^{(2)}\boldsymbol{v}^{(2)},\tag{6.28}$$

总动量为(6.27)及(6.28).

在量子力学中这样的问题没有计算过. 如果用 $\boldsymbol{p}^{(1)}$加上 $\boldsymbol{p}^{(2)}$作为总动量,得

$$m^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)}+m^{(2)}\boldsymbol{v}^{(2)}+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{c^2r_{12}}(\boldsymbol{v}^{(1)}+\boldsymbol{v}^{(2)}),$$

与以上所求得的总动量不一样.

(iv) 讨论(6.14)及(6.25). 这在实质上即是讨论一个电子所产生的电磁场的总能量 U 及总动量 $\boldsymbol{G}$. 这一个计算是很重要的,理由见后. 由于这个计算的重要性,我们应该计算 $\boldsymbol{v}$ 取任意值时的能量和动量. 这一计算将在第三章中补入. 在这里我们只讨论 v 取极小值时的情形.

(6.14),(6.25)的计算与(6.15),(6.26)的计算有一极不同处,即我们不能将电子认为无穷小而应用(6.10)式. 如果形式地应用(6.10)式,那么(6.14)中的积分是不收敛的. 因此,为具体计算一个电子的电磁场的能量和动量起见,我们必须引入一个不是几何点的模型,例如假定电子为一个圆球等等. 此外必须假定在此圆球中各点的电荷密度. 计算出的能量和动量的值,与这些假定是有关的. 为举例起见,讨论 $\boldsymbol{v}=0$ 的情形. 那时电磁场的总动量等于零. 如果假定电子是一个以 a 为半径的圆球,球中电荷密度是均匀的,得电磁场的总能量 U,

$$U=(3/5)(e^2/a)$$

(e 是电子总电荷);如果假定电子是一个以 a 为半径的圆球而假定电荷均匀地集中于圆球表面上,得

$$U=(1/2)(e^2/a).$$

由此可见 U 值与模型有关,同时也可见当 a 趋近于零时,U 趋近于无穷大,亦即是点电荷的电磁场的能量是无穷大.

称静止电荷的电场为 E_0,称与之相应的 U 为 U_0. 当 $\boldsymbol{v}$ 取小值而不等于零时,援用(6.6),(6.7)式,得

$$U=U_0+O(v/c), \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}&=\frac{1}{4\pi c}\int\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{4\pi c}\int\boldsymbol{E}_0\times\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}_0\right)\mathrm{d}V+O(v^2/c^2)\\&=\frac{1}{4\pi c}\int\{\boldsymbol{v}E_0^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_0)\boldsymbol{E}_0\}\mathrm{d}V+O(v^2/c^2).\end{aligned}$$

由于

$$\int E_{0i}E_{0j}\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\delta_{ij}\int(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0)\mathrm{d}V,\quad\int\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\int E_0^2\mathrm{d}V,$$

$$(\boldsymbol{I} = \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk})$$

$$\int (\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0) \mathrm{d}V = 8\pi U_0,$$

得电子的电磁场的总动量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= \frac{1}{4\pi c^2}\left\{\boldsymbol{v}\, 8\pi U_0 - \frac{1}{3}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{I}) 8\pi U_0\right\} + O(v^2/c^2) \\ &= (4/3)(U_0/c^2)\,\boldsymbol{v} + O(v^2/c^2). \end{aligned} \tag{6.30}$$

最后我们计算一个电子的电磁场的总角动量.取任意不动点为原点,计算对于此点的角动量

$$\frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \mathrm{d}V, \tag{6.31}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 代表自原点至场点的矢量.令 $\boldsymbol{\xi}$ 为自原点至电子中心的矢量,$\boldsymbol{r}_e$ 为自电子中心至场点的矢量,得

$$\boldsymbol{r}_e = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{r}_e.$$

因此,(6.31)等于

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{r} \times \left[\boldsymbol{E} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)\right] \mathrm{d}V &= \int \boldsymbol{r}_e \times \left[\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{E}^2}{c} - \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})}{c}\right] \mathrm{d}V \\ &+ \int \boldsymbol{\xi} \times \left[\boldsymbol{E} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)\right] \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

由于(在 $\boldsymbol{v}$ 极小时电子所产生的 $\boldsymbol{E}$ 的)球面对称性,可证

$$\int (\boldsymbol{r}_e \times \boldsymbol{v})(E^2/c) \mathrm{d}V = 0;$$

又因(在 $\boldsymbol{v}$ 极小时)$\boldsymbol{r}_e$ 与 $\boldsymbol{E}$ 平行,得

$$-\int (\boldsymbol{r}_e \times \boldsymbol{E})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})/c \mathrm{d}V = 0,$$

因此总角动量等于

$$\boldsymbol{\xi} \times \int \boldsymbol{E} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right) \mathrm{d}V = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{G},$$

这即是说对于角动量的计算而言,我们可以将动量认为集中于电子的中心.

两个电子所成系统的电磁场的角动量的计算,留给读者.

§7　标量势及矢量势

在这节中我们将引入一个标量 φ 及一个矢量 $\boldsymbol{A}$,使得(1.9)—

(1.12)的求解大大地简单化.

首先,自(1.11)式,我们知道 $\boldsymbol{H}$ 必然是某一矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z,t)$的旋度,

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{7.1}$$

由已知的 $\boldsymbol{H}$ 去求 $\boldsymbol{A}$,所得的答显然不是惟一的;因为在 $\boldsymbol{A}$ 上可以加上任何标量 $\psi(x,y,z,t)$的梯度而不影响(7.1)式. 自(7.1)式及(1.10),得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\frac{1}{c}\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right),$$

所以

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0;$$

因此 $\boldsymbol{E}+c^{-1}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$必然为某一标量的梯度,得

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{7.2}$$

这样引入的 $\boldsymbol{A},\varphi$ 分别称为矢量势及标量势. 值得指出,如果已知 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 取(7.1),(7.2)右方的形式,那么(1.10),(1.11)便都满足.

很显然地,当 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 为已知量,而 $\boldsymbol{A}_1,\varphi_1$为(7.1),(7.2)式对 $\boldsymbol{A}$,φ求解时所得的某一个解,那么不论下式中 f 是什么标量,

$$\boldsymbol{A}_1+\nabla f,\quad \varphi_1-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{7.3}$$

也是一个解. 为了证明这一点,只消将(7.3)代入(7.1),(7.2)即行. 利用这一点,我们可以取(7.1),(7.2)的某一个解,使它满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{7.4}$$

证明是极简单的. 令 g 为一标量,适合

$$\nabla^2 g-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=-\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right\}, \tag{7.5}$$

那么

$$\boldsymbol{A}_1+\nabla g,\quad \varphi_1-\frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t} \tag{7.6}$$

便是我们所需要的解;因为由于(7.5),

$$\nabla\cdot\{\boldsymbol{A}_1+\nabla g\}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_1-\frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

$$=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\nabla^2 g-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=0,$$

亦即是说,(7.6)满足(7.4).

(7.4)通常称为洛伦兹条件,它非但在电磁理论中出现,也在重力场的讨论中出现.在那里它称为希尔伯特(Hilbert)-洛伦兹条件.

值得指出,(7.1),(7.2),(7.4)并不完全地决定了$\boldsymbol{A},\varphi$.事实上,如果g^*满足

$$\nabla^2 g-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=0, \tag{7.7}$$

$\boldsymbol{A}_1,\varphi_1$满足(7.1),(7.2),(7.4),那么

$$\boldsymbol{A}_1+\nabla g^*,\quad \varphi_1-\frac{1}{c}\frac{\partial g^*}{\partial t} \tag{7.8}$$

也满足(7.1),(7.2),(7.4).

现在讨论用$\boldsymbol{A},\varphi$作变数后的麦克斯韦方程(1.9)—(1.12).(1.12)变为

$$-4\pi\rho=-\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\nabla\cdot\left\{-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right\}$$

$$=\nabla^2\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t}=\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{7.9}$$

$$-4\pi\frac{\rho\boldsymbol{v}}{c}=-\nabla\times\boldsymbol{H}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$=-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right\}$$

$$=-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$

$$=\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}$$

$$=\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2},$$

亦即

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho\,\boldsymbol{v}}{c}, \tag{7.10}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{7.11}$$

(7.1),(7.2),(7.4),(7.10),(7.11)的重要性,不仅是由于可以自麦克斯韦方程获得它们的事实,而且是由于可以自它们获得麦克斯韦方程的事实.事实上,令 $\boldsymbol{A},\varphi$ 满足(7.4),(7.10),(7.11),再令 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 满足(7.1),(7.2),那么这样的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 便满足麦克斯韦方程.因此,为解麦克斯韦方程,我们先求(7.4),(7.10),(7.11)式中的 $\boldsymbol{A},\varphi$;再自(7.1),(7.2)中求 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$.由于(7.1),(7.2),(7.4),(7.10),(7.11)是麦克斯韦方程的结果,这样的求解不会使我们遗失了任何解答.另一方面,这样的求解有实际上的方便处,因为(7.11)式中只有一个未知量,(7.10)乃是三个式子,每一个式子,也只含了一个未知量.缺点是将以前的一阶微分方程(原来的(1.9)—(1.12)只含有对 t 的一次微商)变为现在的二阶微分方程.

类似(7.11)的微分方程,将称波方程.当右方为零时,我们称它为齐次方程;当右方不为零时,我们称它为非齐次方程.关于它们的求解,将在以后讨论.

在此必须指出(7.4),(7.10),(7.11)是有共同解的.为证明这一点,让 $\boldsymbol{A},\varphi$ 分别地为(7.10),(7.11)的解,而在 $t=0$ 时,适合下面的起始条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{7.12}$$

$$\nabla^2\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t} + 4\pi\rho = 0. \tag{7.13}$$

(7.13)亦即是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} = 0. \tag{7.14}$$

自(1.8),(7.10),(7.11),得

$$\left\{\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi}{c}\left\{\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}=0. \tag{7.15}$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+c^{-1}(\partial\varphi/\partial t)$满足上式而同时满足起始条件(7.12)和(7.14),我们可以想像它在任何大于零的时刻保持为零.这便是所需的证明.当然这个证明是不严格的;严格的证明涉及了边界条件;引入了边界条件,即可严格地证明它在 $t>0$ 各时刻都等于零.这些讨论出乎本书范围以外,读者可以参阅 С. Л. Соболев 所著《数学物理方程》第十二章§3.

(7.1),(7.2),(7.4),(7.10),(7.11)将在此后的理论中广泛地被运用,在这里值得指出一个名词.当 $\boldsymbol{A},\varphi$分别地变为

$$\boldsymbol{A}+\nabla f,\quad \varphi-c^{-1}(\partial f/\partial t)$$

(式中 f 是任意标量)时,我们称 $\boldsymbol{A},\varphi$受了一个规范变化(一个 f 相当于一个“规范”).在此变化中不变的量称为规范不变量,例如 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 即是规范不变量.当 f 取得适当,使变化后的 $\boldsymbol{A},\varphi$满足洛伦兹条件(7.4),我们说新的 $\boldsymbol{A},\varphi$取“满足洛伦兹条件的规范”.

§8 赫 兹 势

我们在此节证明上节中的(7.4),(7.10),(7.11)可以通过一个新的势的引入而再简化.

首先,我们证明存在着一个矢量 $\boldsymbol{P}$,使

$$\rho=-\nabla\cdot\boldsymbol{P},\quad \rho\boldsymbol{v}=(\partial\boldsymbol{P}/\partial t). \tag{8.1}$$

这个矢量称为“极化矢量”.在此须注意这个极化矢量与介质中由于分子极化而产生的极化矢量,乃是绝不相同的两回事.(8.1)的证明如下:

令 $\boldsymbol{P}'$为 $\rho\boldsymbol{v}$ 对时间 t 的积分

$$\boldsymbol{P}'=\int\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}t. \tag{8.2}$$

由此得

$$\rho \boldsymbol{v} = (\partial \boldsymbol{P}'/\partial t).$$

现在

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P}' = \nabla \cdot \int \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}t = \int (\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}) \mathrm{d}t = \int -\frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}t$$

$$= -\rho(x,y,z,t) + \rho(x,y,z,0). \tag{8.3}$$

令 $\boldsymbol{P}_0$ 为 x,y,z 的函数,适合

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P}_0 = -\rho(x,y,z,0), \tag{8.4}$$

那么 $\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{P}_0$ 便是我们所求的 $\boldsymbol{P}$,它满足(8.1)式.

其次,我们证明存在着一个矢量 $\boldsymbol{\Pi}$,使取洛伦兹规范的 $\boldsymbol{A},\varphi$ 成为

$$\boldsymbol{A} = \partial \boldsymbol{\Pi}/\partial t, \quad \varphi = -c\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}. \tag{8.5}$$

$\boldsymbol{\Pi}$ 将称为赫兹势.证明与上是极类似的.

令 $\boldsymbol{\Pi}'$ 为 $\boldsymbol{A}$ 对时间 t 的积分,

$$\boldsymbol{\Pi}' = \int \boldsymbol{A} \mathrm{d}t, \tag{8.6}$$

得

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}'}{\partial t}.$$

现在

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}' = \nabla \cdot \int \boldsymbol{A} \mathrm{d}t = \int \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}t = \int -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathrm{d}t$$

$$= -c^{-1}[\varphi(x,y,z,t) - \varphi(x,y,z,0)].$$

令 $\boldsymbol{\Pi}_0$ 为 x,y,z 的函数,满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}_0 = -c^{-1}\varphi(x,y,z,0),$$

那么 $\boldsymbol{\Pi}'+\boldsymbol{\Pi}_0$ 便是我们所求的 $\boldsymbol{\Pi}$;它满足(8.5)式.

引入了 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{\Pi}$,(7.4)式便已经满足,(7.10),(7.11)分别地成为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}, \tag{8.7}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(-c\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}) = -4\pi(-\nabla \cdot \boldsymbol{P}). \tag{8.8}$$

这两个式子可以用下面一个式子

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{\Pi} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{P} \tag{8.9}$$

来代替;因为由(8.9)可以求得(8.7),(8.8).

由以上可见(7.4),(7.10),(7.11)可以由(8.1),(8.5),(8.9)来代替.我

们先由 $\rho,\rho\boldsymbol{v}$ 求出 $\boldsymbol{P}$,由(8.9)求出 Π,再代入(8.5),求 $\boldsymbol{A}$ 及 φ. 这个理论的实际用处可以自电偶极子的放射的讨论看到,在那里设

$$\rho = a\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta'(z-\eta)$$

(a 是一常数),由此可求出

$$\boldsymbol{P} = -ak\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\eta) \quad (\boldsymbol{k}\text{ 为沿 } z \text{ 轴单位矢量}).$$

(8.9)在该情形下的求解正同(7.10),(7.11)在点电荷情形下的求解. 假定此电偶极子静止不动,

$$\Pi = -\frac{a\boldsymbol{k}}{c}\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{1/2}},$$

由此即可计算 $\boldsymbol{A},\varphi$ 及 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$.

由(7.1),(7.2)及(8.5)得

$$\boldsymbol{E} = \nabla\nabla\cdot\Pi - c^{-2}\partial^2\Pi/\partial t^2, \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{H} = c^{-1}\nabla\times(\partial\Pi/\partial t). \tag{8.11}$$

我们在本书中将极少用到本节中的理论.

§9 纵场及横场

在量子电动力学中,我们时常将电磁场分为纵场及横场,使横场相当于真正的光子. 为此,我们在此介绍纵场及横场的理论.

(1) 如果一个场 $\boldsymbol{K}(x,y,z,t)$满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{K} = 0, \tag{9.1}$$

我们称它为横场. 这理由是:如果 $\boldsymbol{K}$ 是一个波,

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0\cos 2\pi\nu[t - c^{-1}(n_x x + n_y y + n_z z)],$$

那么由于(9.1),$\boldsymbol{K}_0$ 必然与波的进行方向(n_x,n_y,n_z)垂直. 如果 $\boldsymbol{K}$ 满足

$$\nabla\times\boldsymbol{K} = 0, \tag{9.2}$$

我们称它为纵场. 这个名称是由连续介质的机械运动处得来的. 在那里在不同时刻 t 在各点(x,y,z)的物质有一速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$,而在点 P 的$\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}$ 代表在 P 附近的物质绕 P 点的转动速度. 在 P 点的 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ 的意义为在 P 附近的物质没有绕 P 的转动而只

有沿各个不同方向的压缩或伸长，因此适合 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ 的场称为纵场. 横场，纵场有时也称为横波，纵波.

我们首先证明任何矢量场 $\boldsymbol{K}$ 可以写为一个纵场 $\boldsymbol{K}^l$ 及横场 $\boldsymbol{K}^t$ 的和. 证明如下：

不论 ψ 为什么标量，$\nabla\psi$ 为一纵场. 取 ψ 满足

$$\nabla^2\psi=\nabla\cdot K, \tag{9.3}$$

亦即

$$\psi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{K}}{r}\mathrm{d}V. \tag{9.4}$$

让我们计算 $\nabla\psi$.

为清楚起见，将(9.4)写为

$$\psi(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{K}(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{1}{r}\mathrm{d}V_\xi, \tag{9.5}$$

式中 ∇_ξ 代表

$$\boldsymbol{i}(\partial/\partial\xi)+\boldsymbol{j}(\partial/\partial\eta)+\boldsymbol{k}(\partial/\partial\zeta),$$

$\mathrm{d}V_\xi$ 代表 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$，$r$ 代表 $\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}^{\frac{1}{2}}$. 由(9.5)，得

$$\nabla\psi=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{K}(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{1}{r}\mathrm{d}V_\xi. \tag{9.6}$$

因

$$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla_\xi\frac{1}{r},$$

(9.6)可以改写为

$$\nabla\psi=+\frac{1}{4\pi}\int\left[\nabla_\xi\left\{\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{K}(\xi)\frac{1}{r}\right\}-\frac{\nabla_\xi\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{K}(\xi)}{r}\right]\mathrm{d}V.$$

上式右方第一项可以化为面积分. 如果 V 为全部空间，而 $\boldsymbol{K}$ 在无穷远处可以认为零，那么第一项可以认为零，得

$$\nabla\psi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla_\xi\nabla_\xi\cdot\boldsymbol{K}(\xi)}{r}\mathrm{d}V. \tag{9.7}$$

另一方面，不论 $\boldsymbol{\Phi}$ 为什么矢量场，$\nabla\times\boldsymbol{\Phi}$ 为一横场. 取 $\boldsymbol{\Phi}$ 适合

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Phi} = -\nabla \times \boldsymbol{K},$$

得

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla_\xi \times \boldsymbol{K}(\xi,\eta,\zeta,t)}{r} \mathrm{d}V_\xi. \tag{9.8}$$

不难计算

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\Phi} &= \frac{1}{4\pi}\int \nabla \times \left\{\frac{\nabla_\xi \times \boldsymbol{K}(\xi)}{r}\right\}\mathrm{d}V_\xi \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\left[-\nabla_\xi \times \left\{\frac{\nabla_\xi \times \boldsymbol{K}(\xi)}{r}\right\} + \frac{\nabla_\xi \times (\nabla_\xi \times \boldsymbol{K}(\xi))}{r}\right]\mathrm{d}V_\xi \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \nabla_\xi \times [\nabla_\xi \times \boldsymbol{K}(\xi)]\, \frac{1}{r}\mathrm{d}V_\xi. \end{aligned} \tag{9.9}$$

现在不难证明 $\boldsymbol{K}=\nabla\times\boldsymbol{\Phi}+\nabla\psi$. 自(9.7),(9.8),得

$$\nabla \times \boldsymbol{\Phi} + \nabla\psi = \frac{1}{4\pi}\int\left(-\frac{1}{r}\nabla_\xi^2 \boldsymbol{K}\right)\mathrm{d}V_\xi.$$

设 $\nabla^2 \boldsymbol{K}$ 为 $-4\pi b$,得

$$\boldsymbol{K} = \int\left[\frac{b(\xi)}{r}\right]\mathrm{d}V_\xi = \frac{1}{4\pi}\int -\frac{1}{r}\nabla_\xi^2 \boldsymbol{K}\mathrm{d}V_\xi,$$

因此

$$\boldsymbol{K} = \nabla \times \boldsymbol{\Phi} + \nabla\psi, \tag{9.10}$$

右方第一项是横场,第二项是纵场;他们分别是 $\boldsymbol{K}^t,\boldsymbol{K}^l$.

如果一个 $\boldsymbol{K}$ 可以有两种分解为横场(波)及纵场(波)的办法,那么它们必然是相同的. 为证明这一点,先证明既是横场(波)且是纵场(波)的场必然是零. 令 $\nabla\cdot\boldsymbol{K}'=\nabla\times\boldsymbol{K}'=0$. 自 $\nabla\times\boldsymbol{K}'=0$,得

$$\boldsymbol{K}' = -\nabla\varphi', \tag{9.11}$$

代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{K}'=0$,得

$$\nabla^2\varphi' = 0. \tag{9.12}$$

在适当的边界条件下(例如 φ' 在边界上为零,而在边界所包含的体积中每点上 φ' 均适合上式——即 φ' 在此体积中无奇异点),那么(9.12)的惟一解是零;这即是我们所欲证明的. 如果 $\boldsymbol{K}$ 有两种分解为横波、纵波的方法:

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^{t'}+\boldsymbol{K}^{l'},$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^{t''}+\boldsymbol{K}^{l''},$$

那么，

$$\boldsymbol{K}^{t'}-\boldsymbol{K}^{t''}=\boldsymbol{K}^{l''}-\boldsymbol{K}^{l'}.$$

因此上式任何一方既是横波，又是纵波，因此

$$\boldsymbol{K}^{t'}=\boldsymbol{K}^{t''},\quad \boldsymbol{K}^{l'}=\boldsymbol{K}^{l''};$$

亦即是两种分解方法是同样的.

因此(9.10)，(9.7)，(9.9)乃是 $\boldsymbol{K}$ 的惟一分法. 以上的讨论结果是：任何矢量场可以写为一个纵场及一个横场的和，而且只有一个写法. 同时我们也证明了一个矢量场 $\boldsymbol{K}$ 完完全全地由它的散度及旋度决定.

我们当然可以应用以上的理论到 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\rho\boldsymbol{v}$ 等等上去，但是这样的计算过于冗长，我们在下节用另一个办法. 由于分解的惟一性，这办法的结果与直接应用以上理论的结果是一样的.

(2) 我们自麦克斯韦方程开始. 自(1.11)式，我们得

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{9.13}$$

利用 $\boldsymbol{A}$ 上可以任意地加上一个标量的梯度的性质，我们取适当的 $\boldsymbol{A}$，使它满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0. \tag{9.14}$$

以(9.13)代入(1.10)，得

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0,$$

得

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{9.15}$$

由(9.13)，(9.14)，(9.15)，我们立即看出 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的一个分解是

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}^{t}=\nabla\times\boldsymbol{A}, & \boldsymbol{H}^{l}=0,\\ \boldsymbol{E}^{t}=-c^{-1}\partial\boldsymbol{A}/\partial t, & \boldsymbol{E}^{l}=-\nabla\varphi.\end{cases} \tag{9.16}$$

以(9.15)代入(1.12)，得

$$\nabla^{2}\varphi=-4\pi\rho; \tag{9.17}$$

以(9.13),(9.15)代入(1.9),得

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\rho \boldsymbol{v}}{c}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi. \tag{9.18}$$

$\boldsymbol{H}^l,\boldsymbol{E}^l$ 适合下列式子:

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\dfrac{4\pi}{c}(\rho\boldsymbol{v})^l,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho.\end{cases} \tag{9.19}$$

$\boldsymbol{H}^l,\boldsymbol{E}^l$ 满足后三个式子乃是显然的.至于第一个式子,我们可以用下法证明:

依照(9.6),

$$\begin{aligned}(\rho\boldsymbol{v})^l&=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int[\nabla_\xi\cdot\rho\boldsymbol{v}(\xi)]\frac{1}{r}\mathrm{d}V_\xi\\ &=+\frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{1}{r}\mathrm{d}V_\xi\\ &=\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho}{r}\mathrm{d}V_\xi\\ &=\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial t}\varphi,\end{aligned} \tag{9.20}$$

而

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}^l}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi;$$

因此(9.19)的第一个式子也满足.附带指出,由于(9.20),使(9.18)的右方成为$-4\pi(\rho\boldsymbol{v})^t/c$.

将麦克斯韦方程中的$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\rho\boldsymbol{v}$分别写为横场及纵场的和,与(9.19)相减,便证明$\boldsymbol{H}^t,\boldsymbol{E}^t$满足

$$\begin{cases}\nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}(\rho \boldsymbol{v})^t, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0. \end{cases} \tag{9.21}$$

这说明 $\boldsymbol{E}^t, \boldsymbol{E}^l, \boldsymbol{H}^t, \boldsymbol{H}^l$ 分别地适合类似麦克斯韦方程的微分方程.

(3) 由于 $\boldsymbol{E}^l, \boldsymbol{H}^l$ 适合(9.19),我们可以证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{1}{8\pi}(E^{l2} + H^{l2})\mathrm{d}V$$
$$= -\int \boldsymbol{E}^l \cdot (\rho \boldsymbol{v})^l \mathrm{d}V - \frac{c}{4\pi}\int (\boldsymbol{E}^l \times \boldsymbol{H}^l) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

表示纵场的能量守恒,也可以获得表示动量及角动量守恒的式子.同样由于 $\boldsymbol{E}^t, \boldsymbol{H}^t$ 适合(9.21),我们也可以获得 $\boldsymbol{H}^t, \boldsymbol{E}^t$ 的能量、动量、角动量守恒的式子.

但我们的兴趣是在于总能量及总动量.总能量 U 的式子为

$$\frac{1}{8\pi}\int [(\boldsymbol{E}^t + \boldsymbol{E}^l)^2 + (\boldsymbol{H}^t + \boldsymbol{H}^l)^2]\mathrm{d}V.$$

一般地讲,一个横场 $\boldsymbol{K}^t$ 及一个纵场 $\boldsymbol{C}^l$ 所构成的

$$\int \boldsymbol{K}^t \cdot \boldsymbol{C}^l \mathrm{d}V$$

等于零.因为

$$\nabla \times \boldsymbol{C}^l = 0, \quad \boldsymbol{C}^l = -\nabla \psi,$$

因此

$$\int \boldsymbol{K}^t \cdot \boldsymbol{C}^l \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{K}^t \cdot (-\nabla \psi)\mathrm{d}V = \int (\nabla \cdot \boldsymbol{K}^t)\psi \,\mathrm{d}V = 0 \tag{9.22}$$

(因 $\nabla \cdot \boldsymbol{K}^t = 0$).因此总能量成为

$$\frac{1}{8\pi}\int [(\boldsymbol{E}^l)^2 + (\boldsymbol{H}^l)^2]\mathrm{d}V + \frac{1}{8\pi}\int [(\boldsymbol{E}^t)^2 + (\boldsymbol{H}^t)^2]\mathrm{d}V. \tag{9.23}$$

第一项等于

$$\frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{E}^l\cdot(-\nabla\varphi)\mathrm{d}V=\frac{1}{8\pi}\int(\nabla\cdot\boldsymbol{E}^l)\varphi\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iint[\rho(x,y,z,t)\rho(x',y',z',t)/r]\mathrm{d}V\mathrm{d}V'.$$

这说明纵场在时刻 t 所贡献的总能量为在该时刻的库仑能.(9.23)中第二项为

$$\frac{1}{8\pi}\int\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]^2\mathrm{d}V.$$

这等于

$$\frac{1}{8\pi}\int\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}\right]\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-\boldsymbol{A}\cdot\nabla^2\boldsymbol{A}\right]\mathrm{d}V\quad(\text{因 }\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0)$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2+\sum_i\nabla A_i\cdot\nabla A_i\right]\mathrm{d}V.$$

因此总能等于

$$\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V+\frac{1}{8\pi}\int\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2+\sum_i(\nabla A_i\cdot\nabla A_i)\right]\mathrm{d}V.\tag{9.24}$$

如果我们将以上所遇到的 $\int\boldsymbol{A}\cdot\nabla^2\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$ 一项变为

$$\int\left[\frac{1}{c^2}\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{A}^2}{\partial t}-\boldsymbol{A}\cdot\frac{4\pi\rho\boldsymbol{v}^t}{c}\right]\mathrm{d}V$$

$$=\int\left[\frac{1}{c^2}\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\boldsymbol{A}\cdot\frac{4\pi\rho\boldsymbol{v}}{c}\right]\mathrm{d}V,$$

总能成为

$$\frac{1}{2}\int\left(\rho\varphi+\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}V+\frac{1}{8\pi c^2}\int\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}V.$$

这个式子证明了当 $\boldsymbol{A}$ 不变化时能量等于

$$\frac{1}{2}\int\left(\rho\varphi+\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}V.$$

如果我们用满足(7.4),(7.10),(7.11)的 $\boldsymbol{A},\varphi$ 来表出总能,得

$$\int\rho\varphi\mathrm{d}V+\frac{1}{8\pi}\int\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\sum\nabla A_i\cdot\nabla A_i\right.$$
$$\left.-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\right\}\mathrm{d}V, \tag{9.25}$$

或

$$\frac{1}{2}\int\left(\rho\varphi+\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}V$$
$$+\frac{1}{8\pi c^2}\int\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}V.$$

(9.24),(9.25)将在第二部第八章中遇到. 在那里(§52)我们补充(9.25)的证明.

总动量的计算如下. 它等于

$$\frac{1}{4\pi c}\int(\boldsymbol{E}^t\times\boldsymbol{H}^t+\boldsymbol{E}^l\times\boldsymbol{H}^l+\boldsymbol{E}^t\times\boldsymbol{H}^l+\boldsymbol{E}^l\times\boldsymbol{H}^t)\mathrm{d}V. \tag{9.26}$$

一般地讲,

$$\int\boldsymbol{K}^l\times\boldsymbol{C}^t\mathrm{d}V=0,$$

证明与(9.22)的证明相仿. 在此 $\boldsymbol{H}^l=0$,上式没有特殊的用处. (9.26)中第一项为

$$\frac{1}{4\pi c}\int\left[-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]\mathrm{d}V$$
$$=-\frac{1}{4\pi c^2}\int\left[(\nabla\boldsymbol{A})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\nabla\boldsymbol{A}\right]\mathrm{d}V. \tag{9.27}$$

因

$$O=\int\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}V$$
$$=\int\left[\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\cdot\nabla\boldsymbol{A}\right]\mathrm{d}V$$
$$=\int\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\nabla\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

(因 $(\partial/\partial t)(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=0$),(9.27)中第二项等于零. (9.26)中第二项,第三项等于零,第四项等于

$$\frac{1}{4\pi c}\int(-\nabla\varphi)\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi c}\int\varphi\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$$
$$=\frac{1}{4\pi c}\int\varphi(-\nabla^2\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=-\frac{1}{4\pi c}\int\nabla^2\varphi\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$
$$=\frac{1}{c}\int\rho\boldsymbol{A}\mathrm{d}V.$$

因此总动量为

$$\frac{1}{c}\int\rho\boldsymbol{A}\mathrm{d}V-\frac{1}{4\pi c^2}\int(\nabla\boldsymbol{A})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\mathrm{d}V. \tag{9.28}$$

如果用满足(7.4),(7.10),(7.11)的 $\boldsymbol{A},\varphi$ 来表示总动量,得

$$\frac{1}{c}\int\rho\boldsymbol{A}\mathrm{d}V-\frac{1}{4\pi c^2}\int[(\nabla\boldsymbol{A})\cdot(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)-(\nabla\varphi)(\partial\varphi/\partial t)]\mathrm{d}V.$$

此式的证明见第二部第八章§54.

最后在此补充一句,即如果将 $\boldsymbol{K}(x,y,z,t)$ 展为傅里叶积分

$$\boldsymbol{K}(x,y,z,t)=\int\boldsymbol{K}(k_1,k_2,k_3,t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k},\quad(\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}=\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3) \tag{9.29}$$

那么 $\boldsymbol{K}^l,\boldsymbol{K}^t$ 立刻成为

$$\boldsymbol{K}^l=\int\boldsymbol{K}(k,t)\cdot\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}, \tag{9.30}$$

$$\boldsymbol{K}^t=\int\left[\boldsymbol{K}(k,t)-\boldsymbol{K}(k,t)\cdot\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\right]\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}, \tag{9.31}$$

因为上面第一式右方的旋度等于零,第二式右方的散度等于零,而两个式子右方的和乃是 $\boldsymbol{K}(x,y,z,t)$. 引入 ∇^{-2} 算符,定义为

$$\nabla^{-2}\boldsymbol{K}=\int[\boldsymbol{K}(k,t)/(-k^2)]\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}. \tag{9.32}$$

所以用此名称,乃因 ∇^2 乘上此算符等于以 1 乘上 $\boldsymbol{K}$ 的算符. 因此由(9.30),(9.31),(9.32)可以证明

$$\boldsymbol{K}^l=+\nabla^{-2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{K}=\nabla\nabla\cdot(\nabla^{-2}\boldsymbol{K}), \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}^t&=\boldsymbol{K}-\nabla^{-2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{I}-\nabla^{-2}\nabla\nabla)\cdot\boldsymbol{K}\\&=\boldsymbol{K}-\nabla\nabla\cdot\nabla^{-2}\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{I}-\nabla\nabla\nabla^{-2})\cdot\boldsymbol{K}.\end{aligned} \tag{9.34}$$

事实上,(9.33),(9.34)即是(9.7)及(9.9)式. 理由是 ∇^{-2} 即是算符

$$-\frac{1}{4\pi}\int(1/r)\mathrm{d}V,$$

因此(9.7)右方即是

$$\nabla^{-2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{K},$$

而(9.9)右方即是

$$-\nabla^{-2}\{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{K}-\nabla^{2}\boldsymbol{K}\}=\boldsymbol{K}-\nabla^{-2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{K}.$$

用(9.30),(9.31)去讨论横场和纵场,虽然不够严格,但有它的方便处：使计算简单化.

第二章　宏观电磁学

本书的主要目的是讨论微观的电磁学，因此宏观的电磁学不是主要的讨论对象①. 虽然如此，我们在此介绍宏观电磁学中一些最主要的理论，同时又补入一些在一般教科书中处理得不够明确的问题.

§10　宏观的麦克斯韦方程的导出

在这一节中我们将从微观的麦克斯韦方程(1.9)—(1.12)导出宏观的麦克斯韦方程. 这里所讨论的介质是不动的②.

(1) 宏观场的定义

令 $\overline{\boldsymbol{E}}(x,y,z,t)$ 代表

$$\frac{1}{(4\pi a^3/3)}\iiint_V \boldsymbol{E}(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta, \tag{10.1}$$

式中积分区域 V 为

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\leqslant a^2 \tag{10.2}$$

的一个小圆球；a 在此处为一不变的长度. (10.1)代表微观场 $\boldsymbol{E}$ 在以 (x,y,z) 为中心以 a 为半径的圆球中的各点上在 t 时刻的值的平均. a 的值不能太小，也不能太大. 如果 a 太小，那么 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 的性质与 $\boldsymbol{E}$ 相同，个别电子的影响依旧在 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 中表现出来；如果 a 太大，那么

---

① 要学习宏观的电磁学，可以阅读 Tamm 所著的《电学基础》.

② 在运动的介质中的宏观麦克斯韦方程的导出，可参阅 Tamm 的《电学原理》第八章.

各处的电场的不同性(指由“宏观”而言的不同性),在 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 中便不能全部表现出来. 因此 a 必须为一个就宏观观点而言是小的,而就微观观点而言是大的长度,我们简称它为物理小而数学大的量.

注意(10.1)中不包含对时间的平均. 如果它包含了对时间的平均,那么一个以高频率振动(因而带有大量的能)的物体,变为一个不振动的物体;这显然是不可能被允许的.

又可注意这样的一个平均步骤,不可能把一个有奇异点的 $\boldsymbol{E}$,变为一个无奇异点的 $\overline{\boldsymbol{E}}$,把一个带有不连续性的 $\boldsymbol{E}$,变为一个连续的 $\overline{\boldsymbol{E}}$. 这仅是说明“点电荷”的假定,在宏观理论中,在最严格的要求下,依旧会带来许多困难. 但显然地,和原来的 $\boldsymbol{E}$ 的不连续性比较,$\overline{\boldsymbol{E}}$ 的不连续性变小了许多,因此我们可以粗糙地认为 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 是连续的,可以微分的.

现在让我们证明

$$\partial\overline{\boldsymbol{E}}/\partial x = \overline{(\partial \boldsymbol{E}/\partial x)}, \tag{10.3}$$

式中 $\overline{(\partial \boldsymbol{E}/\partial x)}$ 代表 $\partial \boldsymbol{E}/\partial x$ 的平均. 证明如下:

$$\frac{\partial\overline{\boldsymbol{E}}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{V'}\boldsymbol{E}(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta - \int_{V}\boldsymbol{E}(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\right], \tag{10.4}$$

式中 V' 代表适合

$$(\xi - x - \Delta x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leqslant a^2$$

的体积. V 及 V' 的不同即是图 6 中两块月形体积 $AFGBHA$ 及 $ACBEDA$(图 6 中 $ACBGFA$ 为 V, $ADEBHA$ 为 V'). 称圆球 $ACBGFA$ 的表面上的表面元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,月形体积 $AFGBHA$ 即为小块体积 $(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i})\Delta x$ 等所合成 ($\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i}\Delta x$ 即图 6 中阴影的面积,上涂以平行线,整个面积极似一

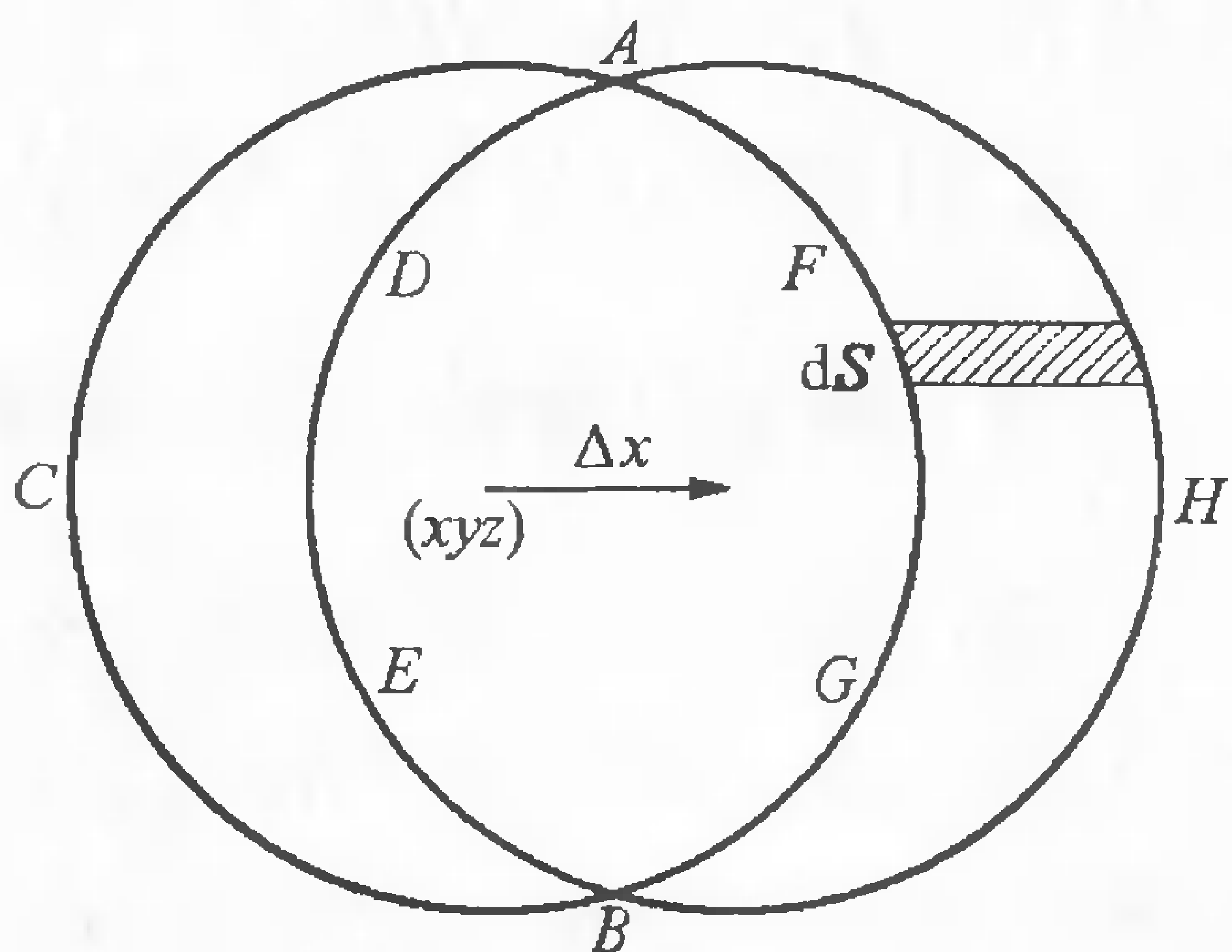


图 6

平行四边形).因此(10.4)等于

$$\frac{1}{\Delta x}\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i})\Delta x\boldsymbol{E}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i}\boldsymbol{E}=\int\mathrm{d}V\,\nabla\cdot(\boldsymbol{i}\boldsymbol{E})$$

$$=\int\mathrm{d}V(\partial\boldsymbol{E}/\partial x)=\overline{(\partial\boldsymbol{E}/\partial x)},$$

即是我们所欲证明的.

在微观的麦克斯韦方程(1.9)—(1.12)两方取平均,利用类似(10.3)的式子,得

$$\nabla\times\overline{\boldsymbol{H}}=c^{-1}\partial\overline{\boldsymbol{E}}/\partial t+(4\pi/c)\,\overline{\rho\boldsymbol{v}},\tag{10.5}$$

$$\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}}=-c^{-1}\partial\overline{\boldsymbol{H}}/\partial t,\tag{10.6}$$

$$\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{H}}=0,\tag{10.7}$$

$$\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{E}}=4\pi\overline{\rho}.\tag{10.8}$$

同时(1.8)取平均后,成为

$$\nabla\cdot\overline{\rho\boldsymbol{v}}+\partial\overline{\rho}/\partial t=0.\tag{10.9}$$

式中 $\overline{\rho},\overline{\rho\boldsymbol{v}},\overline{\boldsymbol{H}}$ 分别代表 $\rho,\rho\boldsymbol{v},\boldsymbol{H}$ 的平均.

宏观电场 $\boldsymbol{E}$,宏观磁感应 $\boldsymbol{B}$ 定义为

$$\boldsymbol{E}=\overline{\boldsymbol{E}},\quad \boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{H}}.\tag{10.10}$$

代入(10.6),(10.7)得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-c^{-1}(\partial\boldsymbol{B}/\partial t),\tag{10.11}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\tag{10.12}$$

这是寻常的宏观麦克斯韦方程中的两个式子.为求其他两个式子,我们必须研究 $\overline{\rho}$ 及 $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$.为简单起见,假定介质是不运动的.

(2) 静止介质的 $\overline{\rho},\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ 的研究

先讨论具有下列性质的分子.它们都是中性的,即含有同样多的正电负电.各个分子中的正负电荷,虽然可以改变它们在分子中的地位,但不能脱离它们原来所属的分子.显然地,当每一个分子的各个电荷分别地集中于一点,$\rho=\rho\boldsymbol{v}=0$,因而 $\overline{\rho}=\overline{\rho\boldsymbol{v}}=0$.现在讨论当它们在分子中的位置自以上的情形有所变化后的 $\overline{\rho},\overline{\rho\boldsymbol{v}}$.这

个变化我们简称之为极化过程. 由于电荷不能脱离原来所属的分子的事实,由它们所获得的 $\bar{\rho},\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ 称为束缚 $\bar{\rho}$,束缚 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$,以 $\bar{\rho}^b,\overline{\rho \boldsymbol{v}}^b$ 代表之.

先讨论一个分子. 称其中第 j 个电荷的位置为 $\boldsymbol{r}_j$(意即矢量 $\boldsymbol{r}_j$ 的顶端),称此分子中的

$$\sum_j e_j \boldsymbol{r}_j \tag{10.13}$$

为此分子的偶极矩 $\boldsymbol{p}$. 在极化前,$\boldsymbol{r}_j$ 都相等,因此 $\boldsymbol{p}=0$ $\left(\text{因} \sum e_j=0\right)$. 称$(x,y,z)$点附近一个单位体积中各个分子的偶极矩的和为$(x,y,z)$点的电极化强度 $\boldsymbol{P}$. 显然地,$\boldsymbol{P}$ 也是一种微观量的平均:

$$\boldsymbol{P}=\overline{\rho \boldsymbol{r}}. \tag{10.14}$$

值得指出,(10.13)右方的值与所采用的原点没有关系,换一个原点只是在(10.13)右方上加上一项,等于 $\sum e_j$ 乘上两个原点的距离矢量,因而等于零. 因此令 $\Delta \boldsymbol{r}_j$ 为极化后 j 电荷的矢量 $\boldsymbol{r}_j$ 与极化前分子中各电荷的共同所在处 $\boldsymbol{r}^{(0)}$ 的差别,得

$$p=\sum e_j \Delta \boldsymbol{r}_j. \tag{10.15}$$

这个共同所在处可以称为分子在极化前的中心.

我们现在要证明由于这些分子的极化,则

$$\bar{\rho}=-\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \quad \overline{\rho \boldsymbol{v}}=\partial \boldsymbol{P}/\partial t. \tag{10.16}$$

为简单起见,假定只有一种分子而先讨论分子中第一类电荷 e_1 对于 $\bar{\rho},\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ 的贡献. 讨论在图 7 中在面 $\boldsymbol{S}$ 左方的总电荷由于极化过程而产生的改变. 在面元 d$\boldsymbol{S}$ 处作一柱体,柱体的母线 AB 为矢量 $\Delta \boldsymbol{r}_1$. 如果某些分子的中心在极化前在此柱体内,那么这些分子的第一类电荷在

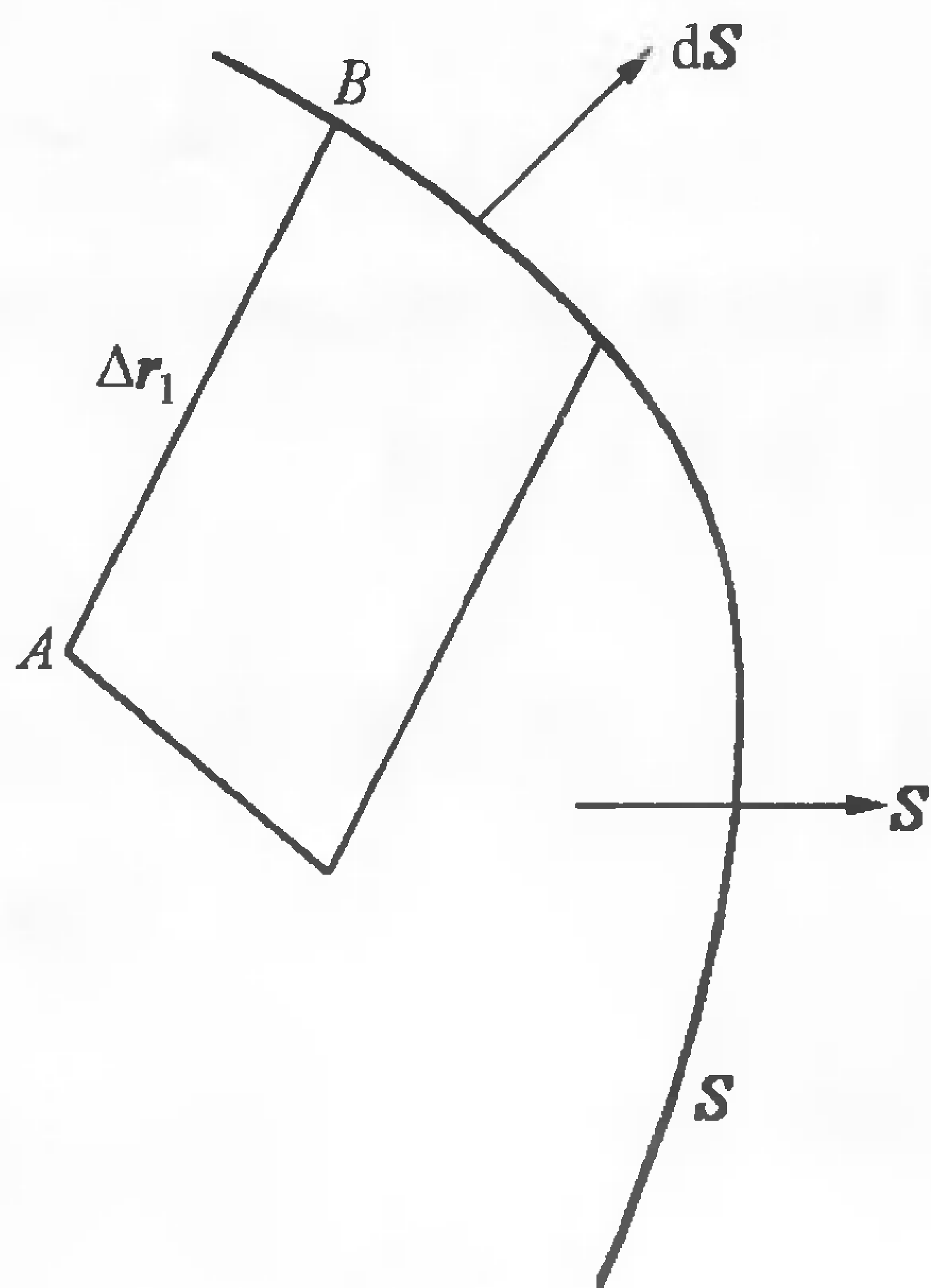


图　7

极化过程中便走过 d$\boldsymbol{S}$ 面，自左至右. 因此称 $\boldsymbol{v}$ 为分子密度，$\boldsymbol{S}$ 面左方电荷的改变便成为

$$-\int v(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_1)e_1 \tag{10.17}$$

(注意 d$\boldsymbol{S}$ 的方向为自左至右). 如果 $\Delta\boldsymbol{r}_1$ 的方向是自右至左的，上式依旧可用，图中的柱体改为在 $\boldsymbol{S}$ 的右面. 当我们讨论分子中各种电荷的贡献，便得

$$-\sum_j\int v(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_j)e_j.$$

这即是

$$-\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P}. \tag{10.18}$$

上式也就是 $\boldsymbol{S}$ 面左方在极化后的总电荷，因为在极化前，ρ 到处为零. 把以上的理论推广到多种分子，显然是极易而不必多讨论的. (注意在这个理论中我们忽略了在 A，B 处的 $\boldsymbol{P}$ 的差别. 如果将 A；B 处的 $\boldsymbol{P}$ 的差别加以考虑，则(10.18)中的 $\boldsymbol{P}$ 应写为 B 点的 $\boldsymbol{P}$，同时应补入四极矩及高极矩等项；详细讨论见 L. Rosenfeld：《电子论》，第二章.)

比较在 $t+\Delta t$ 时及 t 时的(10.18)，便获得了

$$\int\overline{\rho\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\Delta t=-\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P}_t+\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P}_{t+\Delta t}.$$

这说出 $\boldsymbol{S}$ 左面总电荷的减少必须等于在 $\boldsymbol{S}$ 面上电荷自左至右的流出. 由上式获得

$$\overline{\rho\boldsymbol{v}}=\partial\boldsymbol{P}/\partial t. \tag{10.19}$$

取 $\boldsymbol{S}$ 为一封闭曲面，$\boldsymbol{S}$ 中的总电荷根据(10.18)式应为

$$-\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P}=\int\mathrm{d}V(-\nabla\cdot\boldsymbol{P}),$$

因此

$$\bar{\rho}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}. \tag{10.20}$$

(10.19)及(10.20)中的 $\bar{\rho}$ 和 $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ 满足(10.9)式，是令人满意的.

除了这些电荷外，我们假定各个分子中有些电子绕着分子中某固定点而旋转. 现在让我们计算由于这些电子而产生的 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ 和 $\bar{\rho}$.

为简单起见，假定在一点(x, y, z)附近只有一种分子，各个分子中只有一个旋转的电子，旋转的情形都一样，即电子运动轨道都是一个以 a 为半径的圆周，轨道平面的法线方向都是 $\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{b}$ 是单位矢量，与电子运动方向一起服从右手定则). 讨论在一个面 S 上由于这些电子而出现的电流 I(见图 8). 如果 S 面的周围曲线 Γ 不通过某一个电子的轨道所构成的圆面，那么这个电子的轨道或者与 S 不相交，或者相交于两点. 它在这两点上所贡献的电流相等而相反，因此相抵消掉. 因此对于面 S 上的电流 I 有贡献的电子而言，它们的轨道所构成的圆面，必须与 Γ 相交于一点. 令 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 Γ 曲线中一小段($\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向与面 S 的方向服从右手定则). 作一柱体，中心轴为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，底面为一圆，半径为 a，底面的法线方向为 $\boldsymbol{b}$；那么如果电子轨道中心在此柱体中，轨道所包围的圆面必然为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 线段所贯穿，而如果中心不在此柱体中，圆面便不能为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 线段所贯穿. 因此称 v 为分子密度，e 为电子的电荷，f 为电子在一秒中的旋转次数，得

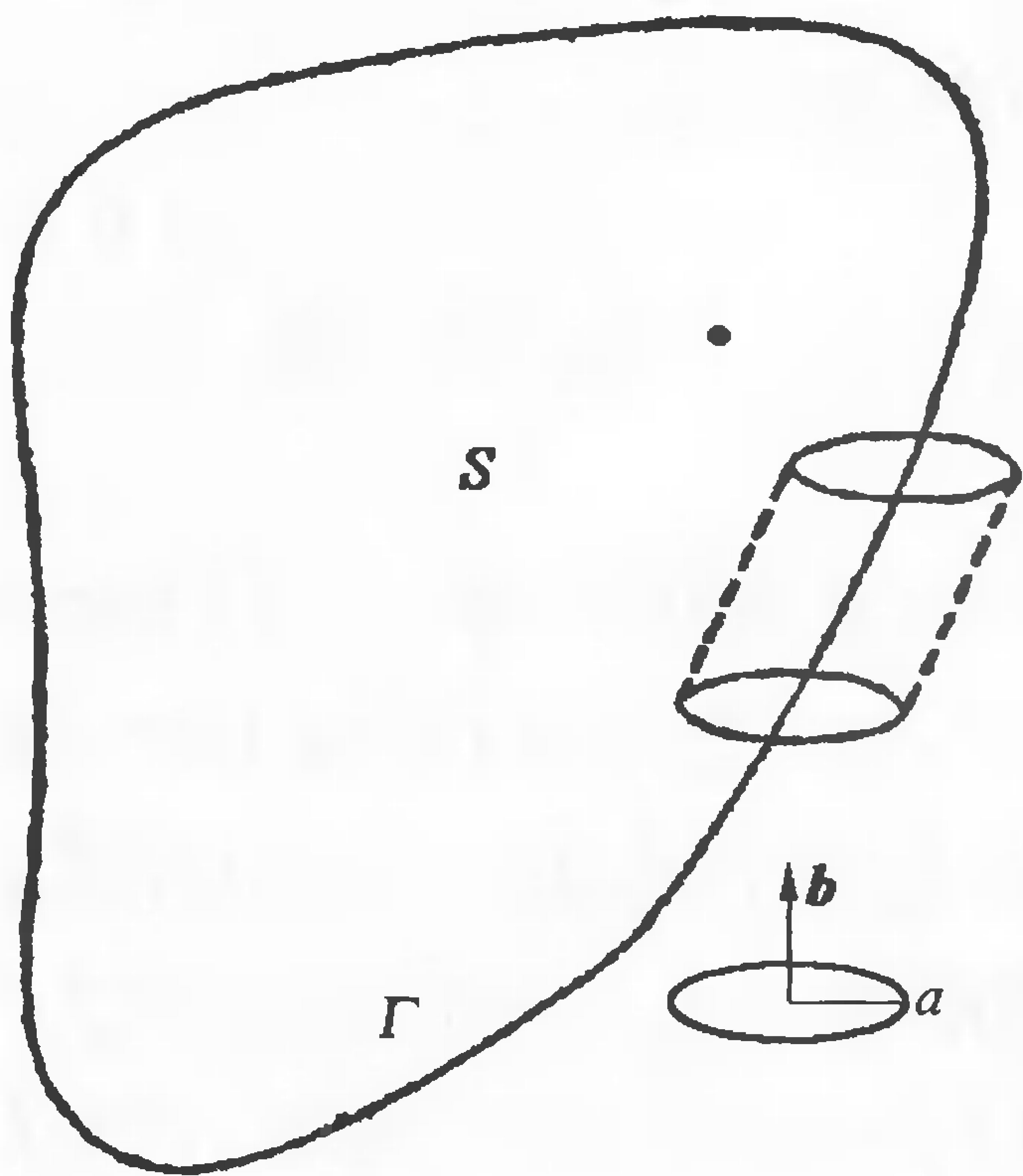


图 8

$$I = \sum_{\mathrm{d}l} v\pi a^2 \mathrm{d}l \cos(\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \boldsymbol{b})(ef) = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{M}c, \qquad (10.21)$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 代表

$$c^{-1} ef v\pi a^2 \boldsymbol{b}, \qquad (10.22)$$

作为一个宏观量，上式可以到处取不同的值，但

$$\bar{I} = \int \overline{\rho \boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

因此

$$\int \overline{\rho \boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{M}c = \int (\nabla \times \boldsymbol{M})c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S};$$

由此得

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = (\nabla \times \boldsymbol{M})c. \tag{10.23}$$

由于(10.9)及上式，得 $\partial\bar{\rho}/\partial t=0$，因此

$$\bar{\rho} = f(x,y,z). \tag{10.24}$$

令轨道半径 a 在 $t=0$ 时为零，逐渐变大. 在此过程的每一阶段，(10.23)均有效，因此(10.24)有效. 但在 $t=0$ 时，电子是不旋转的，电子在轨道中心，而如果在该时电子的电荷与轨道中心的正电荷抵消，$\bar{\rho}=0$. 因此在任何大于零的时刻 $\bar{\rho}=0$. 这样的 $\bar{\rho}$ 及 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ 适合(10.9)式，令人满意，这样的 $\bar{\rho}$ 和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$，我们以 $\bar{\rho}^b$ 和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}^b$ 代表.

除开以上的电荷外，我们再假定一些自由运动的电荷. 所谓“自由”，乃是指不为其他物体束缚住，可以单独地运动，并非指它不受力. 这些电荷的 $\bar{\rho}$ 和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$，我们以 $\bar{\rho}^f$ 和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}^f$ 代表之，我们假定它们满足(10.8)式.

我们只假定有以上三种电荷，而不假定其他种的电荷. 事实上，真正的带电体的性质，是介乎这三种之间的. 例如离子既对于 $\bar{\rho}^b$ 和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}^b$ 有所贡献，也对 $\bar{\rho}^f$ 和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}^f$ 有所贡献.

以上面的 $\bar{\rho}$ 和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ 代入(10.8)，(10.5)式得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi[\bar{\rho}^f - \nabla \cdot \boldsymbol{P}],$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = c^{-1}\partial \boldsymbol{E}/\partial t + (4\pi/c)(\overline{\rho \boldsymbol{v}}^f + (\partial \boldsymbol{P}/\partial t) + c\nabla \times \boldsymbol{M}).$$

引入电感应 $\boldsymbol{D}$，宏观的磁场 $\boldsymbol{H}$，定义为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}, \tag{10.25}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M}, \tag{10.26}$$

便获得了

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi \bar{\rho}^f, \tag{10.27}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = c^{-1}\partial \boldsymbol{D}/\partial t + (4\pi/c)\,\overline{\rho \boldsymbol{v}}^f. \tag{10.28}$$

这便是宏观麦克斯韦方程的另外两个式子. 至此，我们已完完全全

地导出了静止介质的宏观的麦克斯韦方程. 为简化符号起见,$\overline{\rho}^f$和 $\overline{\rho \boldsymbol{v}}^f$ 此后即用 ρ 和 $\rho \boldsymbol{v}$ 来代表.

(10.22)只对圆周的轨道运动有效. 但我们可以将此推广. 推广的结果为: $\boldsymbol{M}$ 为一个单位体积中各个分子的 $\boldsymbol{m}$ 的和,而 $\boldsymbol{m}$ 的定义为

$$\boldsymbol{m} = (1/2c)\int(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j})\mathrm{d}V, \tag{10.29}$$

式中 $\boldsymbol{j}$ 为分子中各点的电流密度,$\boldsymbol{r}$ 为自分子中心至积分点的矢量. 可以证明,当电流集中于一线形导体中,

$$\boldsymbol{m} = i/2c\int(\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}),$$

式中 i 为导体中电流. 对于我们所叙述的特殊情形,这等于

$$c^{-1}(\pi a^2)ef\boldsymbol{b}.$$

以上所述,有些是极明显的,有一些需要仔细的证明,但这些证明在此精简.

(3) 能量、动量、角动量守恒定律

自宏观的麦克斯韦方程(10.11),(10.12),(10.27),(10.28),我们可以导出代表能量、动量、角动量守恒的式子. 我们在此只写出第一个式子;其他两个式子读者可以自己推出.

自宏观的麦克斯韦方程,得

$$\delta\boldsymbol{B} = -c(\nabla \times \boldsymbol{E})\delta t,$$

$$\delta\boldsymbol{D} = c\delta t[\nabla \times \boldsymbol{H} - (4\pi/c)\rho\boldsymbol{v}];$$

式中 $\rho\boldsymbol{v}$ 即是以前的 $\overline{\rho\boldsymbol{v}}^f$,$\delta\boldsymbol{B}$ 和 $\delta\boldsymbol{D}$ 代表在 δt 时中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 在固定于空间的点上的变化. 由上二式,得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B})\mathrm{d}V \\ &\qquad = \int\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V\delta t + \int\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V\delta t \\ &\qquad = \int\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V\delta t + \delta t\int\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \end{aligned} \tag{10.30}$$

因此

$$+\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}V,\quad \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}\mathrm{d}V \tag{10.31}$$

分别代表电能同磁能的增加.

在此,必须较详细地讨论(10.31)式中两项的意义.为此,只消讨论第一项即够.让我们首先处理静电学中介质不存在的情形,那时能量守恒式成为

$$\delta\left(\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2+U_E\right)=W_{\text{out}}, \tag{10.31a}$$

式中$\frac{1}{2}m_iv_i^2$代表各个自由电子的动能,U_E为电场能量,W_{out}为外界力(不是电力)所作的功.由此及

$$m_i\boldsymbol{v}_i\delta\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{f}_i\delta\boldsymbol{r}_i \tag{10.31b}$$

($\boldsymbol{f}_i$代表第i个自由电子上的总力),可以求出

$$\sum\boldsymbol{f}_{Ei}\delta\boldsymbol{v}_i=\sum(\boldsymbol{f}_i-\boldsymbol{f}_{i\,\text{out}})\delta\boldsymbol{v}_i=-\delta U_E \tag{10.31c}$$

($\boldsymbol{f}_{Ei}$代表电场所施于第i个自由电子的力).当介质存在时,我们必须在上面(10.31a)式的左方的括号中补入介质的动能,将U_E改为U_E加上介质的弹性内能U_{elas}.当介质不运动时,我们获得

$$\sum\boldsymbol{f}_{Ei}\delta\boldsymbol{v}_i=-\delta(U_E+U_{\text{elas}})^{①}. \tag{10.31d}$$

与(10.30)比较,可见

$$\frac{1}{4\pi}\int\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}V=-\delta(U_E+U_{\text{elas}}), \tag{10.31e}$$

上式是极重要的.为体会这一点,让我们讨论介质不动而$\boldsymbol{f}_{i\,\text{out}}$等于

---

① 这里将U_E和U_{elas}分开,是为了说明的方便.事实上它们可能是分不开的.(10.31e)的另一个证明如下.让我们将(10.31c)推广至

$$\sum\boldsymbol{f}_{Ei}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i=-\delta U_E-\sum\boldsymbol{f}_{E\text{b}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\text{b},$$

式中右方第二项(不计负号)乃电场对于束缚电子所作的功.当介质没有运动时,我们可以想像

$$\sum\boldsymbol{f}_{E\text{b}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\text{b}=\delta U_{\text{elas}};$$

代入上式,即获得(10.31e).这个证明只对于稀薄气体可靠,是不够严格的.

$-f_{Ei}$的情形. 该时介质及自由电子的动能是不变的,因此

$$W_{\text{out}} = \delta(U_E + U_{\text{elas}}). \tag{10.31f}$$

但此时

$$W_{\text{out}} = -\int \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V \delta t; \tag{10.31g}$$

与(10.31f),(10.30)相合,便获得了(10.31e). 当介质有运动时,(10.31d)左方应补入一项,代表由电场及介质中相互作用而来的力在介质运动时所作的功. 该时我们简称(10.31d)的左方全体为电场及介质力所作的功 W.

由于介质能吸热或放热的事实;真正的能量守恒定律必须考虑到这一层. 引入介质所吸的热量 Q,再补入能量流动 U^*,能量放射 U^{**} 等,我们获得

$$\delta(\text{动能} + U_E + U_{\text{elas}}) = Q + W_{\text{out}} - U^* - U^{**}.$$

在此后我们忽略 U^*,U^{**},而以 U 代表 U_E+U_{elas}. 引入外界力,使过程为一可逆过程. 那时我们知

$$Q = T\mathrm{d}S,$$

式中 T 为绝对温度,S 为熵(自由电子,介质,电磁场所合成的总系统的熵). 因此,以 Ψ 代表 $U-TS$,讨论可逆等温过程,重复以上的讨论,得在介质不运动时的

$$\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = -\delta\Psi \tag{10.31h}$$

及一般情形下的

$$W = -\delta\Psi. \tag{10.31i}$$

我们此后将利用介质不运动时的(10.31h)式求 Ψ,再利用一般情形下的(10.31i)式求自由电子及介质各部分由于电场的作用及介质间的相互作用而受到的力.

由 Ψ 去求 U,S 等乃是热力学中的问题,在此不拟讨论,读者可参阅 Becker 所著《电磁学》第一卷最末一章.

对于一般寻常物体,

$$\boldsymbol{D} = k(T)\boldsymbol{E}, \tag{10.32}$$

式中 k 只是 T 的函数而不是 $\boldsymbol{E}$ 的函数. 在求 Ψ 时,空间各点的介质可以是不同的物体,但介质是不动的,因此

$$k = k(T, x, y, z).$$

在此情形下,(10.31)第一项可以对 $\boldsymbol{D}$ 积分,得

$$\Psi = \int \frac{1}{8\pi} D^2/k \mathrm{d}V = \int \frac{1}{8\pi} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = \int \frac{1}{8\pi} k E^2 \mathrm{d}V. \tag{10.33}$$

积分常数乃是 Ψ 中与 $\boldsymbol{E}$ 无关的一部分,在上式中没有写出. 在用(10.31i)式去求力时,这一部分给我们与 $\boldsymbol{E}$ 无关的一部分力.

(10.31)中第二项的性质基本上与第一项是相似的. 但 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ 中在某些情形下没有像(10.32)式的简单关系,因此我们没有类似(10.33)的式子. 详情见 § 12.

在动量守恒的式子中,我们没有相当于 Q 的一项. 由动量守恒式,可知电磁场及介质所合成的系统的动量密度 $\boldsymbol{g}$ 及动量流密度 $\boldsymbol{T}$ 分别为

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}), \tag{10.34}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{HB}) - \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}). \tag{10.35}$$

后者也可以认为是张力. (10.34),(10.35)的导出在此精简.

§ 11 静电学的主要内容

正如在上节所说的,一般的较简单的电磁理论不是本书的主要对象. 在此节中我们只扼要地叙述静电学的内容.

(1) 基本方程

基本方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} = 0, & (\partial \boldsymbol{E}/\partial t) = 0, & (\partial \boldsymbol{D}/\partial t) = 0, \\ \rho \boldsymbol{v} = 0, & \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, & \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho. \end{cases} \tag{11.1}$$

此外介电常数 k 也适合

$$\partial k/\partial t = 0. \tag{11.2}$$

如果 $\boldsymbol{D}$ 有不连续性，在某一个面 S 上不连续，那么

$$D_{n1} + D_{n2} = 4\pi\sigma, \tag{11.3}$$

式中 σ 代表面上的电荷密度，D_{n1}，D_{n2}代表在面的两方的 $\boldsymbol{D}$ 的沿法线的分量(法线自面 S 出发，分别地往面的两方去，见图 9). 显然，(11.1)及(11.3)中的 ρ 和 σ 乃是自由电荷的 ρ 和 σ. 此点以后不再提起.

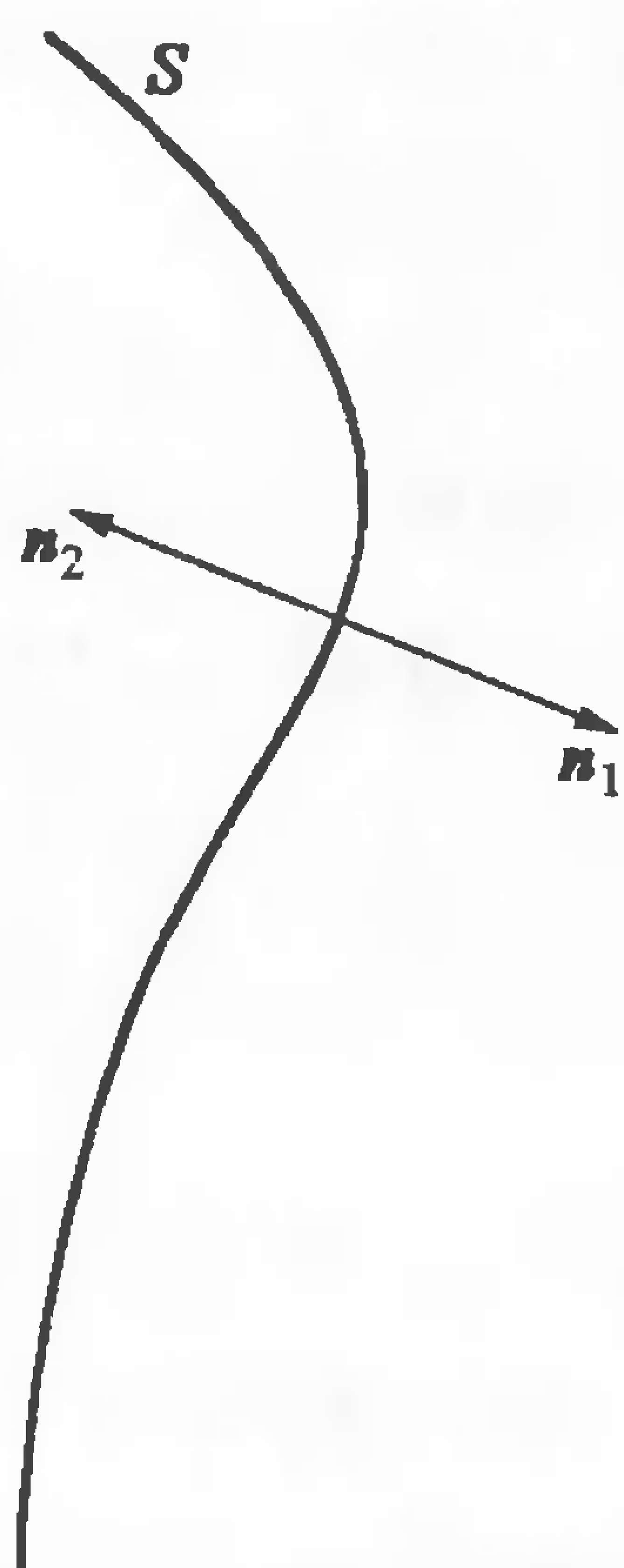


图 9

讨论一个电荷在真空中所产生的电场. 由(11.1)，得

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \tag{11.4}$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho. \tag{11.5}$$

因此，当 ρ 是一个有限的、足够平滑的 x, y, z 的函数，

$$\varphi = \int (\rho/r) \mathrm{d}V, \tag{11.6}$$

$$\boldsymbol{E} = \int (\rho \boldsymbol{r}/r^3) \mathrm{d}V. \tag{11.7}$$

如果令此电荷的大小趋近于零，则在此电荷外的各点上

$$\varphi = e/r, \quad \boldsymbol{E} = e\boldsymbol{r}/r^3.$$

如果将电荷认为一点，那么由于在此点上 $\boldsymbol{E}$，φ 没有意义的事实，我们便必须去求一个 φ，它在空间除开某些点外的各点上满足

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

但虽然固定了这些被除开的点，解依然不是惟一的. 例如：除开原点外，

$$1/r, \quad (\partial/\partial r)(1/r), \quad (\partial/\partial y)(1/r), \quad (\partial^2/\partial x^2)(1/r), \quad \cdots$$

都是 $\nabla^2\varphi=0$ 的解. 为使解成为惟一的解,必须在这些奇异点附近规定 $\boldsymbol{E}$ 或 φ 的性质,例如在原点附近要求 φ 几乎与 $1/r$ 相同. 那时 φ 的惟一解即是 $1/r$. 这样的讨论是不方便的. 我们在这几章中不这样地去讨论点电荷.

要证明当(11.5)有解时,解必然是(11.6),这是极易的(读者可参阅 Tamm《电学原理》§ 12). 要证明(11.6)确满足(11.5),也没有很多的困难(读者可参阅 Tamm《电学原理》§ 95). 这些讨论不在此重复.

当(11.5)中的 ρ 有一部分逐渐地集中,或成为点电荷,或成为一面电荷,或成为一电偶层(двоиной слой)(即面上任何一小块上有一偶极子,方向与面的法线平行),那么(11.6)变为

$$\phi=\sum\frac{e_i}{r_i}+\int\frac{\rho\mathrm{d}V}{r}+\int\frac{\omega\mathrm{d}S}{r}+\int\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)(-p), \tag{11.8}$$

式中 ω 代表面电荷密度,$p\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面上的偶极矩,ρ 代表除开集中的电荷外的其他电荷. (11.8)也可以直接地由假定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\nabla\boldsymbol{E}$ 有不连续性,假定在 $\boldsymbol{E}$ 和 $\nabla\boldsymbol{E}$ 不连续的面以外各点上(11.5)是成立的,再假定类似(11.3)等边界条件而获得. 这个讨论也不拟在此写出.

(11.8)的第一项可以对 x,y,z 作多次微分,点电荷所在处除外. 第二项也可以微分多次(如果 ρ 的性质是足够平滑的);事实上 ∇^2 作用于其上是有意义的,而等于 $-4\pi\rho$(只消 ρ 对 x,y,z 的一级偏微商是连续的). 第三项和第四项的性质是饶有兴趣的,分别地扼要叙述如下:

令 $\boldsymbol{S}$ 为一个面,面上有面电荷密度 ω. 令 $\boldsymbol{S}$ 的公式为 $f(x,y,z)=0$,在面右各点 $f>0$,在面左各点 $f<0$. 面电荷 ω 所产生的电势为

$$\phi=\int\frac{\omega(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S_{\xi}, \tag{11.9}$$

式中(ξ,η,ζ)代表面上的点，r代表自场点至源点的距离. 上式乃是场点的位置的函数，而这个函数在$\boldsymbol{S}$面附近是连续的(证明方法为讨论上式对于场点的一致收敛性). 但是面电荷所产生的电场不是连续的. 如图10，取面上C点为原点，取O_z轴沿C点上的法线$\boldsymbol{n}^{(C)}$的方向，自左至右，在法线$\boldsymbol{n}^{(C)}$上任意一点A的坐标为$(0,0,z)$，它的电场的z分量为

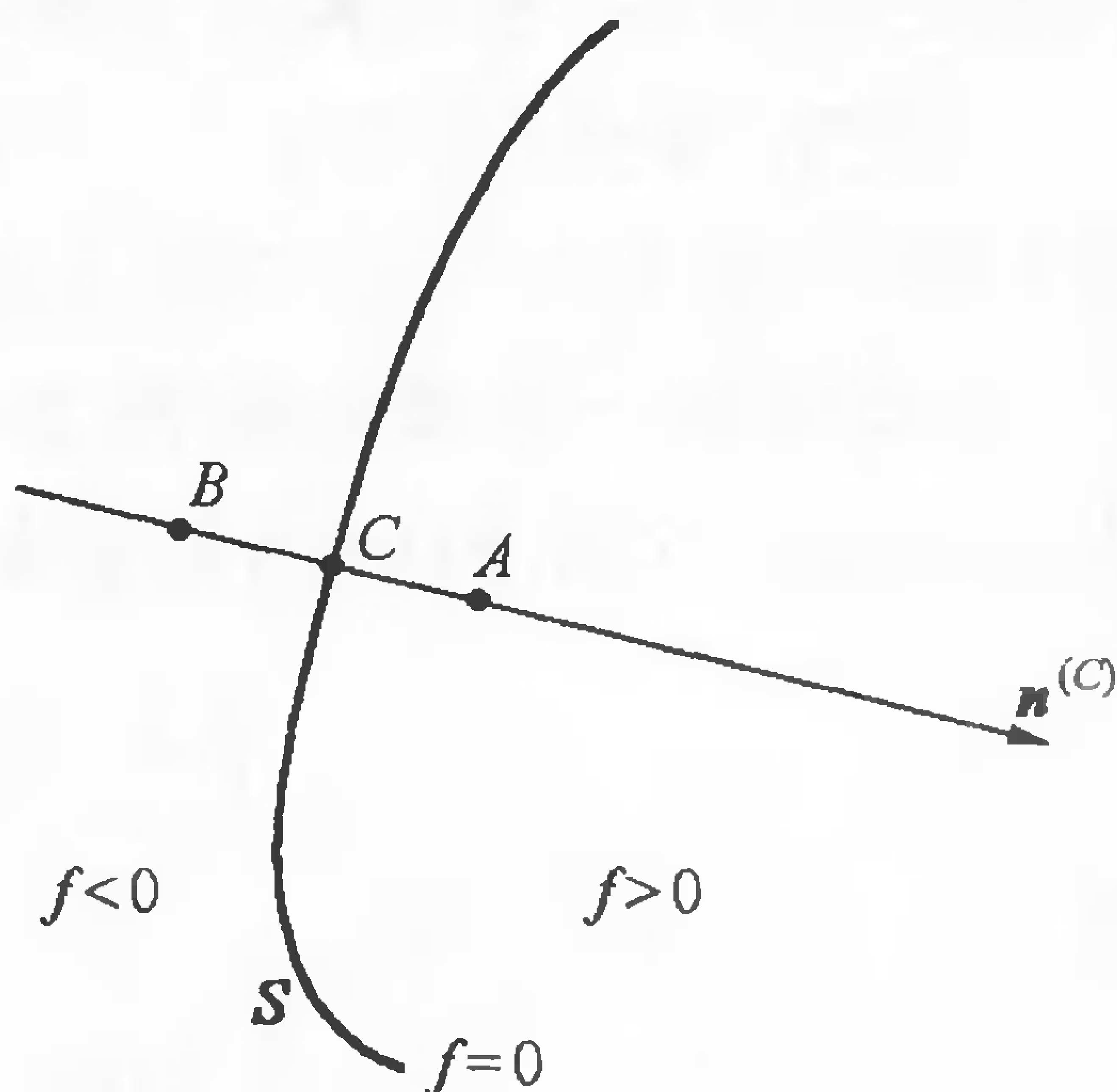


图　10

$$\int[(z-\zeta)/r^3]\omega(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S_\xi. \tag{11.10}$$

可以证明，上式对于$z=0$时是有意义的，可以称为$E_z(C)$. 我们又可以证明当A在面的右方(见图10)，

$$\lim_{A\to C}\int[(z-\zeta)/r^3]\omega(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S_\xi=2\pi\omega(C)+E_z(C); \tag{11.11}$$

如果B是法线$\boldsymbol{n}^{(C)}$上另一点，在面的左方(见图10)，得

$$\lim_{B\to C}\int[(z-\zeta)/r^3]\omega(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S_\xi=-2\pi\omega(C)+E_z(C). \tag{11.12}$$

这说明了面的两方的点上的E_z是不连续的. 引入$\varepsilon(x)$函数，定义为

$$\begin{cases}\varepsilon(x)=1/2, & x>0,\\ \varepsilon(x)=-1/2, & x<0,\end{cases} \tag{11.13}$$

便可以将以上结果写为

$$E_n(z)=4\pi\omega(C)\varepsilon(f)+E_n', \tag{11.14}$$

式中E_n代表$\boldsymbol{E}$沿$\boldsymbol{n}^{(C)}$方向的分量，E_n'代表一个连续的函数. 至于$\boldsymbol{E}$的与面相切的方向的分量E_t，我们很容易证明它是连续的. 以

上所述的证明,可参阅任何数学物理方法的书.

电偶层的情形与以上是不同的. 称此表面的方程为 $f=0$,令面右的点的 $f>0$,面左的点的 $f<0$. 令表面的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 自左至右. 令电偶层上的偶极矩的方向为 $\boldsymbol{n}^{(C)}$,偶极矩密度为 p. 那么由于此电偶层而产生的电场的电势为

$$\phi=\int p(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\xi})r^{-1}. \tag{11.15}$$

因

$$\nabla_{\xi}r^{-1}=-\nabla r^{-1},$$

(11.15)式成为

$$\phi=-\int p(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla)r^{-1}.$$

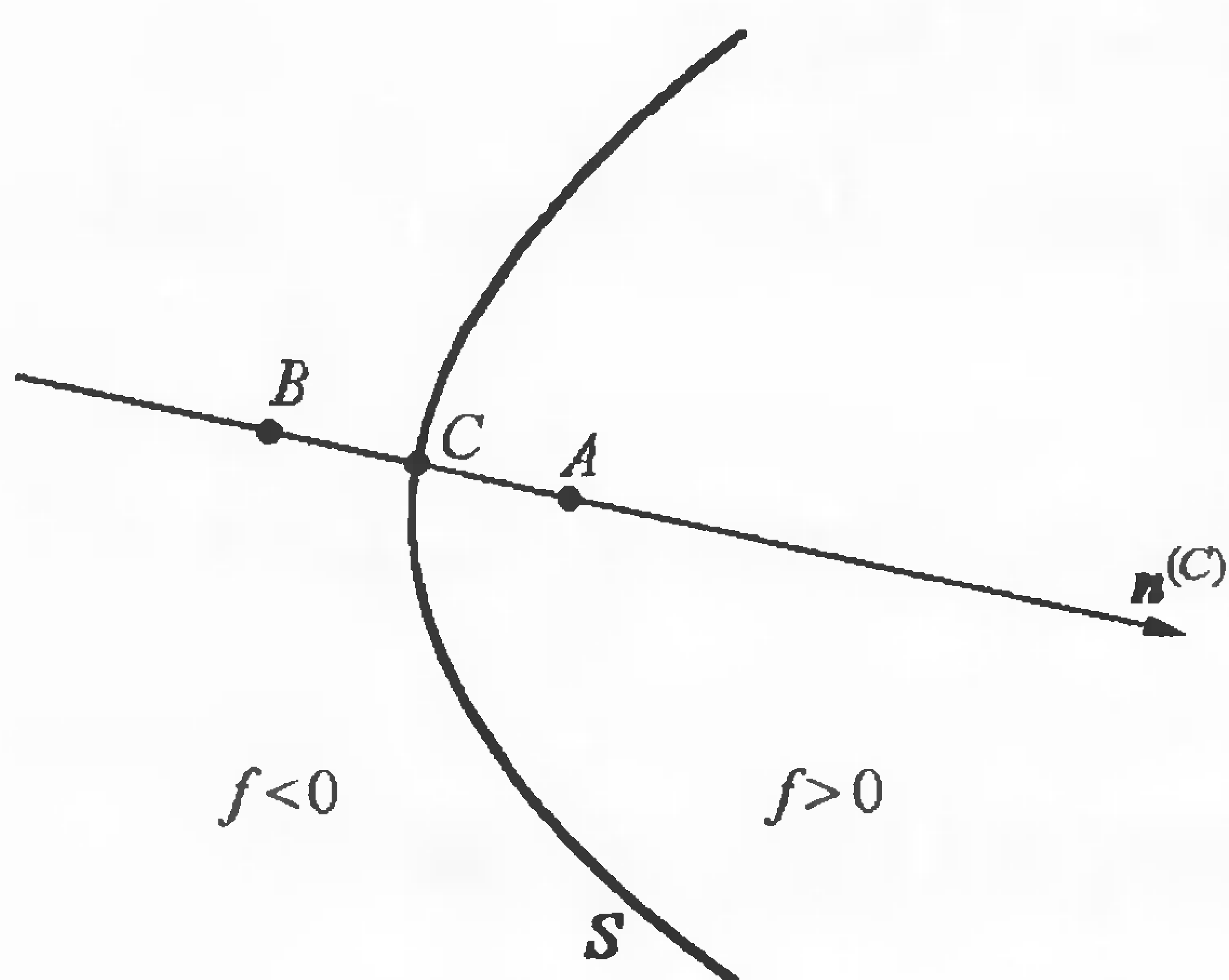


图　11

这个 ϕ 不是连续的. 见图 11,在面上 C 点作法线 $\boldsymbol{n}^{(C)}$,取线上两点 A,B,分别在面的右方及左方,我们可以证明 $\phi(C)$是有意义的,而

$$\begin{cases}\lim\limits_{A\to C}\phi(A)=2\pi p(C)+\phi(C),\\ \lim\limits_{B\to C}\phi(A)=-2\pi p(C)+\phi(C).\end{cases} \tag{11.16}$$

因此对于 $\boldsymbol{n}^{(C)}$法线上各点而讲,

$$\phi=4\pi p(C)\varepsilon(f)+\phi', \tag{11.17}$$

式中 ϕ' 为一连续函数. 因此对于 $\boldsymbol{n}^{(C)}$上各点而讲,$\boldsymbol{E}$ 沿 $\boldsymbol{n}^{(C)}$方向的分量 E_{n} 满足下式,

$$E_{\mathrm{n}}=-4\pi p(C)\delta(f)(\nabla f\cdot\boldsymbol{n}^{(C)})+E_{\mathrm{n}}', \tag{11.18}$$

式中 E_{n}' 为一连续函数. 矢量 $\boldsymbol{E}$ 则满足

$$\boldsymbol{E}=-4\pi p(C)\delta(f)\nabla f+\boldsymbol{E}',$$

式中 $\boldsymbol{E}'$ 为一连续矢量. 由上可见 ϕ 是不连续的,而 E_{n} 变化剧烈,它的式中含有 $\delta(f)$. 以上叙述的证明,也不拟在此补充.

寻常在静电学中的问题即是在已知的边界条件下求

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho \tag{11.19}$$

的解,式中 ρ 是已知的. 令

$$\varphi' = \varphi - \int \rho \mathrm{d}V/r,$$

那么 φ' 满足

$$\nabla^2\varphi' = 0, \tag{11.20}$$

所以亦即是在已知边界条件下求(11.20)的答. 如果 φ 在一封闭面 S 上是已知的,而我们要求面内体积中的 φ,这样的问题称为狄里克雷(Dirichlet)内问题;如果 φ 在一封闭面 S 上是已知的,而我们要求面外体积中的 φ,这样的问题称为狄里克雷外问题①;如果在一封闭面 S 上 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi$ 是已知的,而我们要求面内体积的 φ,这样的问题称为诺伊曼(Neumann)内问题;如果在一面封闭 S 上 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi$ 是已知的,而我们要求面上体积的 φ,这样的问题称为诺伊曼外问题. 可以证明狄里克雷内外问题及纽曼外问题都有解,而诺伊曼内问题只在

$$\int(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi)\mathrm{d}S = 0 \tag{11.21}$$

的情形下才有解. 又可以证明前面三个的解是惟一的,而纽曼内问题的解可以带一个任意常数. 这些讨论见 Соболев 书②.

在一般物理学书籍中,(11.20)的求解往往通过特殊的方法,例如用镜像法(метод отражения)、变数分解法(метод разделения переменных),由此可以利用某些特殊函数的性质,获得了所求的答. 这些方法可以参阅 Jeans 所著《电磁学》. 在静电学中比较难以了解的问题是介质的机械力问题,我们在此对于这问题作一个简单的介绍.

---

① 在外问题中,我们要求 φ 在无穷远处趋近于零.

② 解的惟一性的证明见十六章. 解的存在的证明见十九章. 这书证明援用了面电荷及电偶层的电势的性质,将求解的过程变为求一个积分方程的解的过程,由此求出(11.21)的条件.

（2）介质的机械力

在第 10 节，在介质不动的情形下，我们用热力学的理论求出了 Ψ 的形式(10.33)。如果介质可以运动时，那么当介质各处的速度 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ 取小值时，

$$\Psi=\frac{1}{8\pi}\int\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V+O(\boldsymbol{u}). \tag{11.22}$$

考虑一个可逆等温的变化；那时我们证明了(10.31i)

$$-\mathrm{d}\Psi=W, \tag{11.23}$$

W 代表由于电场及介质中相互作用而来的力在自由电子及介质上所作的功（详细讨论见§10(3)）。因此 W 应该等于

$$\int(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}_\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}_m)\mathrm{d}V\delta t,$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是自由电荷的速度，$\boldsymbol{f}_\rho\mathrm{d}V$ 是 $\mathrm{d}V$ 中自由电荷所受的力，$\boldsymbol{u}(x,y,z)$ 是在 (x,y,z) 附近的介质的速度，$\boldsymbol{f}_m\mathrm{d}V$ 是 $\mathrm{d}V$ 中的介质所受的力，δt 是所讨论的过程进行所需的时间。因此我们得

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-\int(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}_\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}_m)\mathrm{d}V. \tag{11.24}$$

我们的目的即在上式中求出 $\boldsymbol{f}_\rho$ 及 $\boldsymbol{f}_m$。因为过程是可逆的，$\boldsymbol{u}$ 是无穷小，因此可以忽略(11.22)中的 $O(u)$。

显然地在 $\boldsymbol{u}=0$ 时，$\boldsymbol{f}_\rho=\rho\boldsymbol{E}$ 是(11.24)的一个解。这个特殊情形下的(11.24)即是忽略磁场后的(10.30)。在一般情形下，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{8\pi}\int\frac{D^2}{k}\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{8\pi}\int\left(-\frac{1}{k^2}\frac{\partial k}{\partial t}D^2+\frac{1}{k}2\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{8\pi}\int\left(-\frac{\partial k}{\partial t}E^2+2\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{11.25}$$

用 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 代入，对第二项作分部积分，再抛去面积分的一项（即假定讨论全部空间的 Ψ），得

$$\frac{d\Psi}{dt}=-\frac{1}{8\pi}\int\frac{\partial k}{\partial t}E^2 dV+\int\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}dV. \tag{11.26}$$

为简单起见,让介质为气体.该时 k 成为物质密度 γ 的函数.因此称某一块物质的 k 的变化率为 Dk/Dt,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t}&=\frac{Dk}{Dt}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)k=\frac{dk}{d\gamma}\frac{D\gamma}{Dt}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)k\\&=\frac{dk}{d\gamma}\left\{\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\gamma\right\}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)k.\end{aligned}$$

利用连续性方程

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\gamma)+\partial\gamma/\partial t=0,$$

简化 $\partial k/\partial t$ 为

$$\partial k/\partial t=(dk/d\gamma)\gamma\nabla\cdot\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)k.$$

以此代入(11.26),再以 $-\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}$ 代替(11.26)中的 $\partial\rho/\partial t$,作分部积分,抛去所有的面积分,得

$$\frac{d\Psi}{dt}=\int\left\{\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{8\pi}E^2\boldsymbol{u}\cdot\nabla k-\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\left(E^2\frac{dk}{d\gamma}\gamma\right)\right\}dV; \tag{11.27}$$

因此得

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_\rho=\rho\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{f}_m=-\dfrac{1}{8\pi}E^2\nabla k+\dfrac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2\dfrac{dk}{d\gamma}\gamma\right).\end{cases} \tag{11.28}$$

这便是我们所需要的式子.

由(11.28)的导出,可知 $\boldsymbol{f}_m$ 乃是在(x,y,z)点的介质(会同它的束缚电子)所受的力.至于这个力具体地如何产生,在微观理论中相当于什么分子力,在我们如此简单的理论中是不可能回答的.

由(11.28)可以计算分开两个介质的表面层所受的力.在图 12 中,令 Γ',Γ''两曲面包围着这个表面层.令 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ'(或 Γ'')的法线,方向如图.令 k',k'',γ',γ'',代表两个介质的介电常数及密度.令 E'_t,E'_n,E''_t,E''_n 代表电场沿曲面方向、沿法线 $\boldsymbol{n}$ 方向的分量在两个介质中在 Γ',Γ''处所取的值.如果表面层中没有自由电荷,则

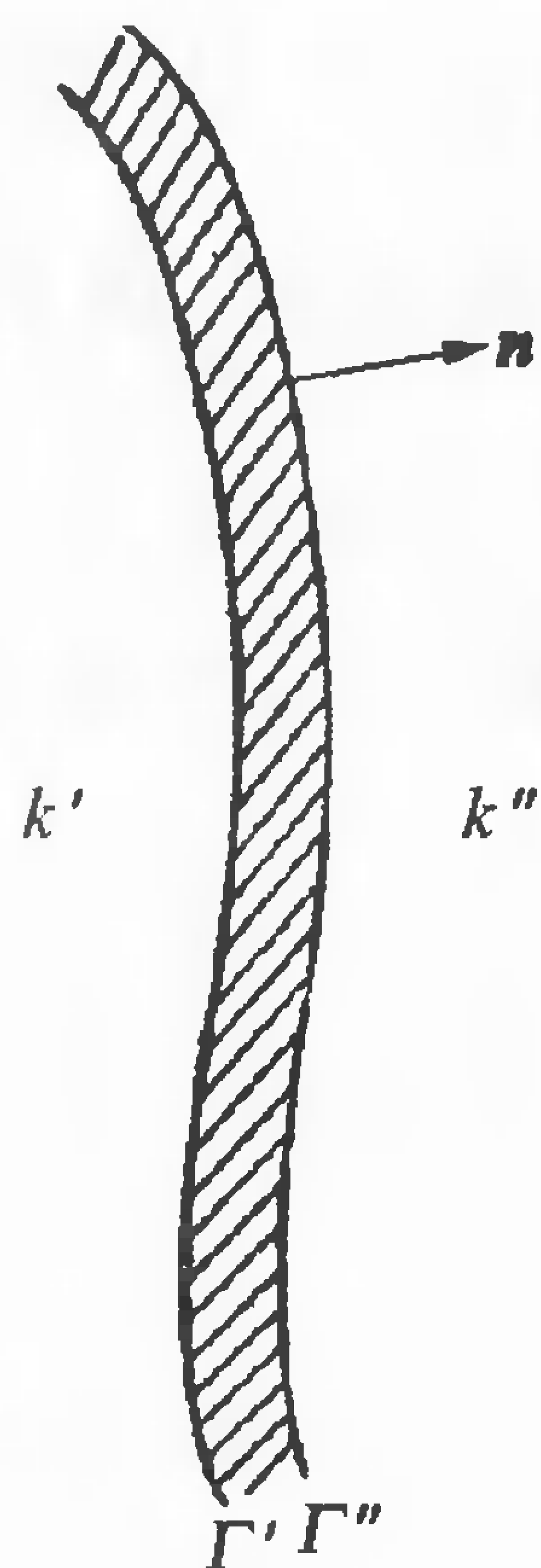


图 12

$$k'E'_{\rm n} = k''E''_{\rm n}.$$

这是由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$ 而得来的. 自 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,得

$$E'_{\rm t} = E''_{\rm t}.$$

取(11.28)右方对 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 的积分,得

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{f}_m\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n} &= \int -\frac{1}{8\pi}(E_{\rm t}^2+E_{\rm n}^2)\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}n + \frac{1}{8\pi}E^2\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}\gamma\Big|_{\Gamma'}^{\Gamma''}\\ &= \int -\frac{1}{8\pi}E_{\rm t}^2\mathrm{d}k + \int -\frac{1}{8\pi}(k^2E_{\rm n}^2)\frac{1}{k^2}\cdot\mathrm{d}k\\ &\quad + \frac{1}{8\pi}\left(E^2\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}\gamma\right)'' - \frac{1}{8\pi}\left(E^2\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}\gamma\right)'\\ &= -\frac{1}{8\pi}E_{\rm t}^2(k''-k') - \frac{1}{8\pi}(k^2E_{\rm n}^2)\left(-\frac{1}{k''}+\frac{1}{k'}\right)\\ &\quad + \frac{1}{8\pi}\left(E^2\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}\gamma\right)'' - \frac{1}{8\pi}\left(E^2\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}\gamma\right)'. \qquad (11.29)\end{aligned}$$

这可以认为是表面层单位面积在 $\boldsymbol{n}$ 方向所受的力.

这个问题的值得提出,乃是因为我们不可以将表面层看作为一个几何面,因此与以前的讨论极不相似.如果将表面层看作一个几何面,计算的结果便有所不同.为说明这一点,让我们计算表面层作为几何面时所受的力.

令一封闭面 $\boldsymbol{S}$ 包含一体积 V_1,其中有某一介质 k';称面外的体积为 V_2,其中充满了另一种介质 k'',我们的计算现在应该自

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_{V_1}\frac{1}{8\pi}kE^2\mathrm{d}V + \int_{V_2}\frac{1}{8\pi}kE^2\mathrm{d}V\right\}$$

$$= -\int_{V_1+V_2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}_\rho + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}_m)\mathrm{d}V - \int \boldsymbol{u}_S\cdot\boldsymbol{f}_S\mathrm{d}S$$

出发,上式中 $\boldsymbol{u}_S$ 代表 $\boldsymbol{S}$ 面上一点的速度,$\boldsymbol{f}_S$ 为面上单位面积所受的力.现在

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_1}\frac{1}{8\pi}kE^2\mathrm{d}V = \int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}kE^2\right)\mathrm{d}V + \int(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S})\frac{1}{8\pi}kE^2,$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}kE^2\right)\mathrm{d}V &= -\frac{1}{8\pi}\int\frac{\partial k}{\partial t}E^2\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi}\int\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\mathrm{d}V\\ &= -\frac{1}{8\pi}\int\frac{\partial k}{\partial t}E^2\mathrm{d}V + \int\varphi\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V - \frac{1}{4\pi}\int\varphi\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8\pi}\int\frac{\partial k}{\partial t}E^2\mathrm{d}V &= -\frac{1}{8\pi}\int\left[\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}(-\gamma\nabla\cdot\boldsymbol{u})E^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla k)E^2\right]\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{8\pi}\int\left\{-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\left(E^2\gamma\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}\right) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla k)E^2\right\}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int\gamma\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}E^2\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

$$\int\varphi\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V-\frac{1}{4\pi}\int\varphi\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\int\varphi(-\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}V-\frac{1}{4\pi}\int\varphi\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\int\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}V-\frac{1}{4\pi}\int\varphi\left\{\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+4\pi\rho\boldsymbol{v}\right\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\approx\int\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho\mathrm{d}V.$$

(因 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t+4\pi\rho\boldsymbol{v}=C\nabla\times\boldsymbol{H}$,因而涉及了在此所忽略的磁能). 注意上式中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向对于 V_1 而言是向外的. 对于 V_2 作同样的计算,相加,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{V_1+V_2}\frac{1}{8\pi}kE^2\mathrm{d}V\right)=\int_{V_1+V_2}\boldsymbol{u}\cdot\left[\frac{1}{8\pi}E^2\nabla k-\nabla\left(E^2\gamma\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}\right)\right]\mathrm{d}V$$

$$+\int\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\left[\left(\frac{1}{8\pi}kE^2\right)'-\left(\frac{1}{8\pi}kE^2\right)''+\left(\frac{1}{8\pi}\gamma\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}E^2\right)'\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{8\pi}\gamma\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}E^2\right)''\right]+\int(\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)\mathrm{d}V.$$

因此表面层上单位面积所受的力为

$$\left(\frac{1}{8\pi}\gamma\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}E^2\right)''-\left(\frac{1}{8\pi}\gamma\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\gamma}E^2\right)'+\left(\frac{1}{8\pi}kE^2\right)''-\left(\frac{1}{8\pi}kE^2\right)',\tag{11.30}$$

方向沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,大小与(11.29)不同. 当 $\boldsymbol{E}_t=0$ 时,两个式子是相等的.

它们的所以不同,解释不是简单的. 主要的原因是在表面层中 k 的变化,$\boldsymbol{E}$ 的变化都是很剧烈的,所以虽然表面层的能 $\frac{1}{8\pi}\int kE^2\mathrm{d}V$ 可以忽略,它的内部的变化是不能忽略的.

必须强调地指出,$\boldsymbol{f}_m$,$\boldsymbol{f}_\rho$ 式中可能分别地含有与 $\boldsymbol{u}$ 垂直,与 $\boldsymbol{v}$ 垂直的一项,而这些项无法用上法求出. 要求这一些项,必须用动量守恒定律. 用了这一定律,可以证明在 $\boldsymbol{f}_m$,$\boldsymbol{f}_\rho$ 中应该不包含这一些项①.

---

① 在这里,动量守恒定律基本上即是要求 $\boldsymbol{f}_m+\boldsymbol{f}_\rho$ 是一个张量的散度.

§12 宏观电动力学中的几个问题

宏观电动力学的场方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{12.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho \boldsymbol{v}, \tag{12.2}$$

$$\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{H}), \tag{12.3}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}, \tag{12.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{12.5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \tag{12.6}$$

$$\boldsymbol{D} = k\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}.$$

一个最重要的特殊情形是稳定电流的情形. 那时

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \cdots = 0.$$

因此

$$\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla \varphi.$$

$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{D}$ 的情形与静电学的情形相同;同时 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$ 的研究可以与 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{D}$ 的研究分开. 当 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$ 中的关系(12.3)是已知的,而 $\rho \boldsymbol{v}$ 也是已知的,我们可以自(12.1),(12.2),(12.3)中求出 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$. 例如在顺磁或抗磁质的物体中,我们可以假定

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

式中 μ 为一常数,称为磁化率,在永磁体中,我们可以假定

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0,$$

式中 $\boldsymbol{M}_0$ 为一常数,称为永磁矩,在这些情形下(12.1)—(12.3)的求解是容易的.

自(12.1)及(12.4),得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = -4\pi \nabla \cdot \boldsymbol{M}. \tag{12.7}$$

将此式与电场 $\boldsymbol{E}$ 的(12.6)比较,可以看出 $-\nabla\cdot\boldsymbol{M}$ 正好像是磁荷密度似的. 由于这个缘故,我们称 $-\nabla\cdot\boldsymbol{M}$ 为磁荷密度.

宏观电动力学中的问题是极丰富的;让我们在此讨论几个问题(其他问题可参阅 Tamm 著《电学原理》).

(1) 封闭稳定线形电路是否同一个磁壳等效?

首先,讨论一个如此的电路与一个与它相当的磁壳在磁场中所受的力. 为简单起见,只讨论真空中的情形.

令图 13 中 Γ 曲线代表此线形电路,令 i 为电路中电流(静电单位). 因 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{B}$ 在此是一样的,它所受的力是

$$\int_\Gamma \frac{i}{c}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{H}). \qquad (12.8)$$

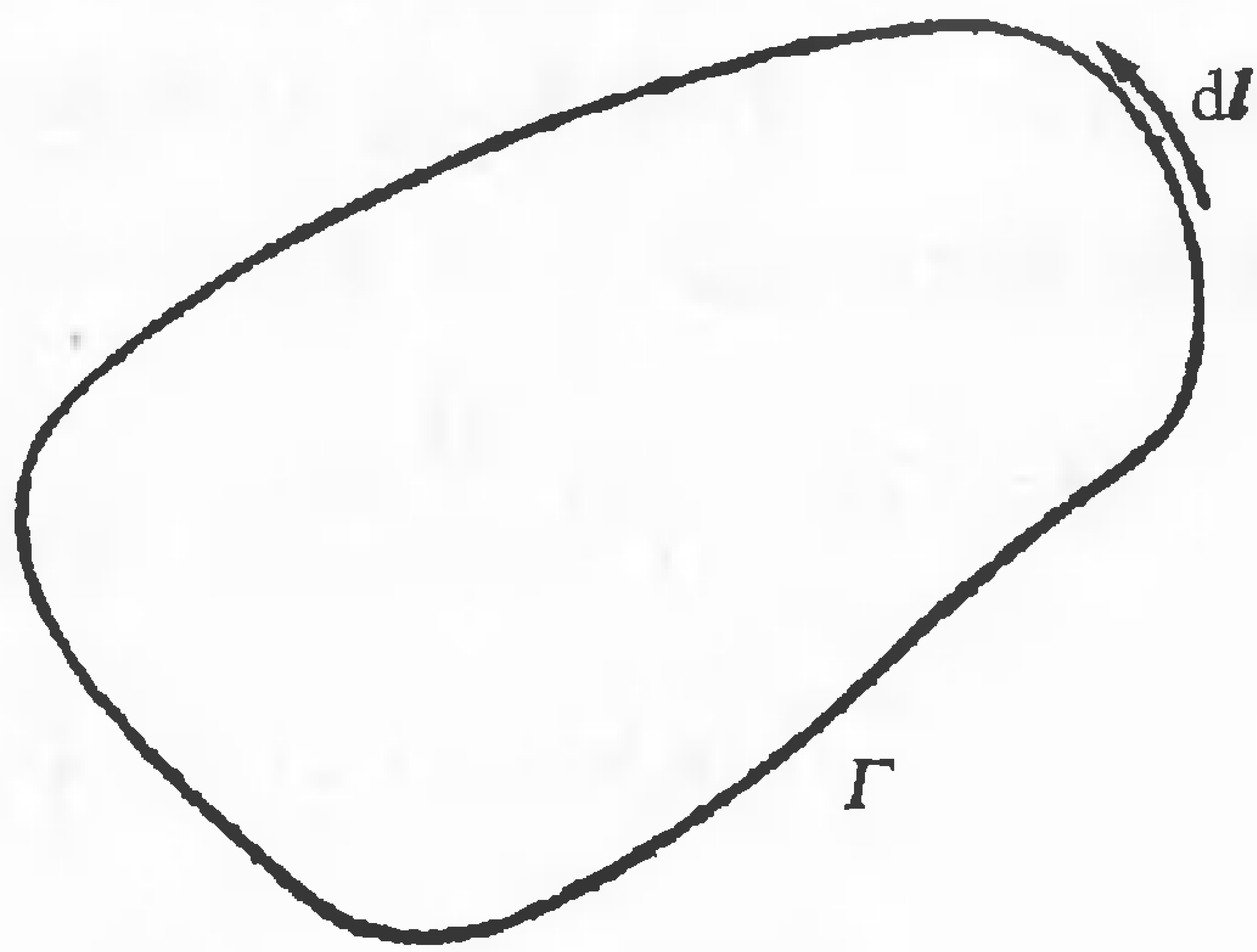


图　13

这可以由每个电子所受的力 $e(\boldsymbol{v}/c)\times\boldsymbol{H}$ 及假定线形导体有许多运动着的电子而求出(证明正如§6 中毕奥-萨伐尔定律的导出一样,兹不重复). (12.8)等于

$$\frac{i}{c}\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{H}=\frac{i}{c}\int[(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,\nabla\cdot\boldsymbol{H}]$$
$$=\frac{i}{c}\int(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

讨论一个假想的磁壳,以 Γ 为周围,面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 上的磁极矩为 $(i/c)\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,那么它所受的力应为

$$\frac{i}{c}\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\boldsymbol{H}).$$

两个力的相差是

$$\frac{i}{c}\int[(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\boldsymbol{H}]=\frac{i}{c}\int(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

这在一般情形下(例如 $\partial\boldsymbol{E}/\partial t\neq0$ 的情形)不等于零,但如果我们

只讨论稳定的情形，$\partial \boldsymbol{E}/\partial t=\partial \boldsymbol{D}/\partial t=0$，而又如果我们假定在磁壳面上没有其他电流，那么 $\nabla\times\boldsymbol{H}=0$，因此两个力是相等的.

其次，讨论它们所产生的磁场. 由(6.12)式，知电路所产生的磁场 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{i}{c}\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r_{\xi}}, \tag{12.9}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{i}{c}\int_{\Gamma}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\xi}\times\boldsymbol{r}_{\xi})/r_{\xi}^{3}; \tag{12.10}$$

式中 ξ 代表源点的坐标，$\boldsymbol{r}_{\xi}$ 或 $\boldsymbol{r}$ 代表自 ξ 点至场点 (x,y,z) 的矢量. 引入一个面 $\boldsymbol{S}$，为 Γ 所包围，$\boldsymbol{S}$ 的方向与 Γ 的方向成为服从右手定则的螺旋. 在 $\boldsymbol{S}$ 面外一点上，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\nabla\times\frac{i}{c}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r}=-\frac{i}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\left(\nabla\frac{1}{r}\right)=\frac{i}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\left(\nabla_{\xi}\frac{1}{r}\right)\\&=\frac{i}{c}\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla_{\xi})\times\nabla_{\xi}\frac{1}{r}\\&=\frac{i}{c}\left\{\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\xi})\,\nabla_{\xi}\frac{1}{r}-\int\left(\nabla_{\xi}^{2}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right\}.\end{aligned} \tag{12.11}$$

因 (x,y,z) 点不在面上，$\nabla_{\xi}^{2}r^{-1}=0$，上式成为

$$\boldsymbol{H}=-\frac{i}{c}\nabla\int\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\xi}\frac{1}{r}\right). \tag{12.12}$$

另一方面，与此电路相应的假想磁壳的磁场 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi,$$

$$\varphi=\frac{i}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\xi}\frac{1}{r}, \tag{12.13}$$

与(12.12)相同.

但两个磁场并不是完完全全相同的. 为了解这一点起见，让磁壳有一厚度 b，为两个面所包围，两个面上的磁荷密度为 $+\sigma$，$-\sigma$；σ 同 b 满足

$$\sigma b=\frac{i}{c}. \tag{12.14}$$

在图 14 中正电荷密度的面在右，负电荷密度的面在左，$\boldsymbol{S}$ 的方向自左至右. 在壳内任何一点，磁场强度为 $+4\pi\sigma$，方向与 $\boldsymbol{S}$ 在该点的法线 $\boldsymbol{n}$ 方向相反. 讨论 b 趋近于零而 σ 趋近于无穷大的情形. 该时如果我们称磁壳面为 $f=0$，使面右的点的 $f>0$，面左的点的 $f<0$，这个磁壳中的磁场等于

$$-\left(4\pi\frac{i}{c}\right)\delta(f)\nabla f, \qquad (12.15)$$

亦即

$$-\nabla\left\{\left(\frac{4\pi i}{c}\right)\varepsilon(f)\right\}.$$

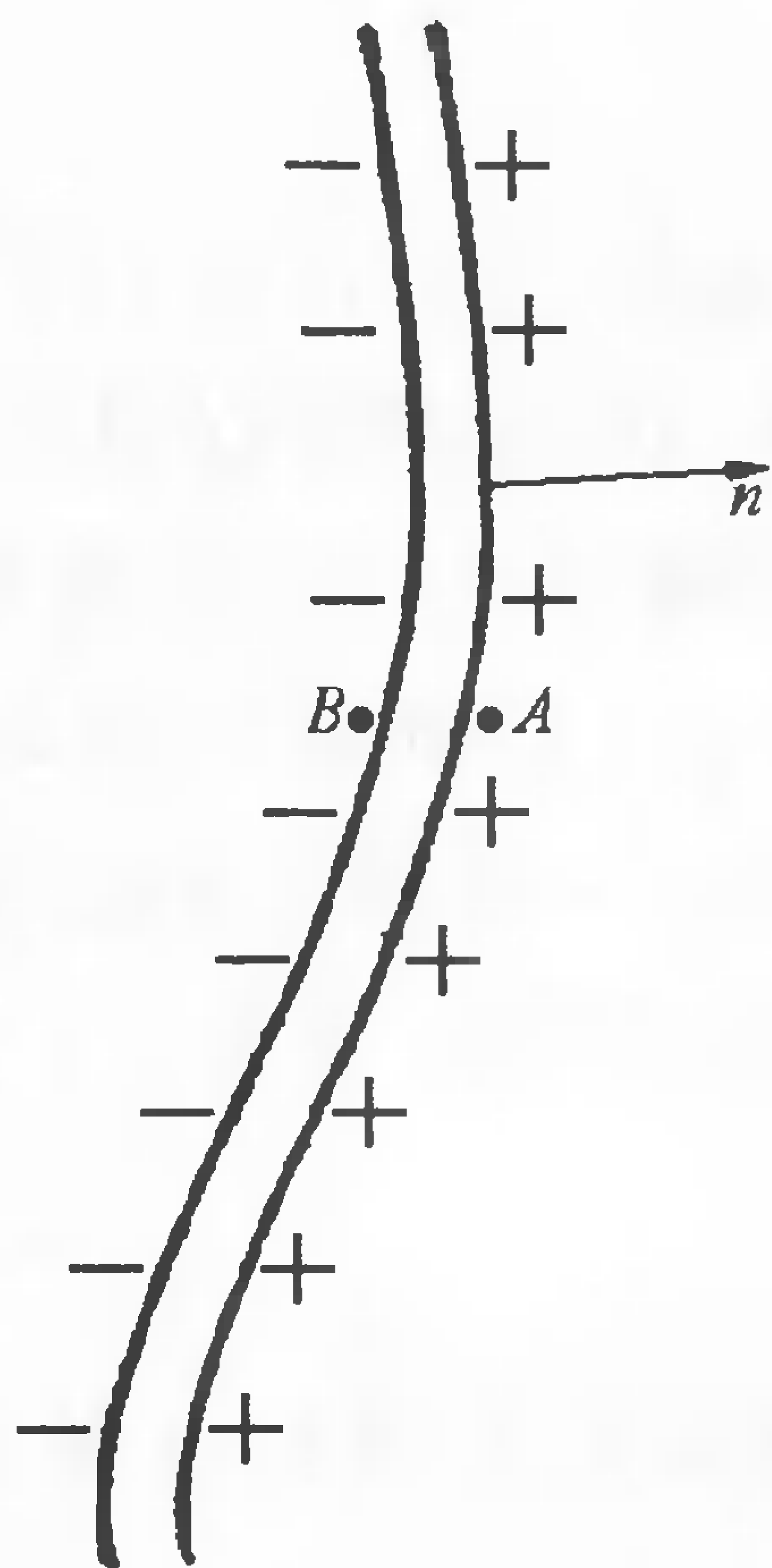


图 14

这个磁场会同在磁壳外的磁场(12.13)，使得自某无穷远处至另一个无穷远处的线积分

$$\int\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

的值等于零，不论路程是否穿过磁壳. 事实上，自无穷远至图中 B 点的$\int\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 几乎等于 $2\pi(i/c)$(这等于 $\boldsymbol{S}$ 面在 B 点上所支的立体角)，自图中 A 点至无穷远的$\int\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 几乎等于 $2\pi(i/c)$，而图中自 B 至 A 通过磁壳的 $\int\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 等于 $-4\pi(i/c)$，所以总和等于零. 但电流所产生的 $\boldsymbol{H}$ 沿同一路程的线积分等于 $4\pi(i/c)$；可见两个磁场 $\boldsymbol{H}$ 不是完全相同的. 事实上在后一个情形中的 $\boldsymbol{H}$，从来不取无穷大的值，从来不取像(12.15)中的值.

值得指出：(12.12)在任何处都可以认为是磁壳的磁场. 理由如下：如果所考虑点不在磁壳中，那么(12.12)无疑地是磁壳的磁场. 如果所考虑点在磁壳附近(或在磁壳中)，

$$\frac{i}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\xi}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (12.16)$$

基本上即是

$$\left(\frac{4\pi i}{c}\right)\varepsilon(f) \tag{12.17}$$

(参阅(11.16),(11.17)两式),因此(12.12)基本上即是(12.15)式.因此在任何处的(12.12)都代表磁壳在该处的磁场.同样地值得指出,(12.11)式右方代表电流在各处所产生的电场.在 $\boldsymbol{S}$ 面中,(12.11)的第一项含有一个 δ 函数,第二项也含有一个 δ 函数,这两个 δ 函数互相抵消,使得(12.11)式右方在 $\boldsymbol{S}$ 面中各点的值成为有限的值.事实上,不难证明

$$-\int \nabla_{\xi}^{2}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi\delta(f)\,\nabla f, \tag{12.18}$$

证明时只消引入曲面坐标,使 $f(x,y,z)$ 为其中之一,再利用

$$\nabla_{\xi}^{2}\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) = -4\pi\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta),$$

即可达到所需要的结果.详细的计算在此精简.

由以上可见电路所产生的磁场与相当于这电路的磁壳所产生的磁场是不同的,所差的即是(12.11)右方的第二项.

(2) 计算磁介质中各点所受的力

这个计算同§11(2)中电介质在各点所受力的计算是极相同的.用§10的讨论,我们能证明磁场及介质由于磁化现象所共同获得的自由能 Ψ 为

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V \int \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{B}. \tag{12.19}$$

我们引入一个等温可逆变化,利用热力学中第一、第二定律,应用§10,§11的讨论至磁现象,获得

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -\int \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}_{m}\mathrm{d}V - \int \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}_{\rho}\,\mathrm{d}V, \tag{12.20}$$

式中 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ 为在 (x,y,z) 点的介质的速度,$\boldsymbol{f}_m$ 为它所受的力密度;$\boldsymbol{v}$ 为自由电荷的速度,$\boldsymbol{f}_\rho$ 为它所受的力的密度.在 $\boldsymbol{u}=0$ 时 $\boldsymbol{f}_\rho$ 等于 $\rho(\boldsymbol{E}+c^{-1}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$,在一般情形下由(12.20)可以查看 $\boldsymbol{f}_\rho$ 能否

等于此值,及算出 f_m.

现在计算 $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$. 首先必须认清(12.3)中的 f 与 x,y,z,t 有关,因此 $\boldsymbol{B}$ 乃是 $\boldsymbol{H},x,y,z,t$ 的函数,$\boldsymbol{H}$ 是 x,y,z,t 的函数;同时(12.19)中的 $\int \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 乃是用(12.3)中的 f 所作成的 $\int \boldsymbol{H}\cdot(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\boldsymbol{H})\mathrm{d}\boldsymbol{H}$,亦即是

$$\int_0^H \boldsymbol{H}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{H}}\right)_{t,x,y,z}\mathrm{d}\boldsymbol{H}.\text{①}$$

因此对固定的 x,y,z 而言,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{B} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{H}}\right)_t\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{H}}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} + \int_0^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{H}\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{H} \\ &= \boldsymbol{H}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{H}}\right)_t\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{H}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_H - \int\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_H \mathrm{d}\boldsymbol{H}. \qquad (12.21)\end{aligned}$$

如果将 $\boldsymbol{B}$ 认为是 x,y,z,t 的函数,上式右方第一第二两项的和成为 $\boldsymbol{H}\cdot(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)_{xyz}$,即以前的符号 $\boldsymbol{H}\cdot(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)$,上式右方第三项的 $(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)_H$ 仍应了解为 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H},x,y,z,t)$ 对于 t 的偏微商. 在 $\boldsymbol{H}$ 的某值 $\boldsymbol{H}_0$ 附近,将 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ 对于 $(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_0)$ 展开,得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_0)+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_0)^2+\cdots\text{②}$$

上式可以写为

$$\boldsymbol{B} = 4\pi\boldsymbol{M}_0 + \mu'\boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\mu''|H|\boldsymbol{H} + \cdots \qquad (12.22)$$

式中 $\boldsymbol{M}_0,\mu',\mu'',\cdots$ 成为 (x,y,z,t) 的函数. 由此计算出

$$\int_0^H\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_H\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{H} = 4\pi\frac{\partial \boldsymbol{M}_0}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mu'}{\partial t}H^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial\mu''}{\partial t}H^3 + \cdots \qquad (12.23)$$

---

① 这严格写来应为

$$\int_0^{\boldsymbol{H}}\mathrm{d}\boldsymbol{H}\cdot\nabla_H\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \quad \left(\nabla_H = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial H_x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial H_y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial H_z}\right).$$

在本节中不强调这些严格处.

② 严格讲来,$B_1,B_2,\cdots$ 等都是张量. 这里我们为使讨论简单化起见,假定 B_1、B_2 等使(12.22)中的 μ',μ'' 为标量.

因此

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}V-\int\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}_0}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu'}{\partial t}H^2+\frac{1}{24\pi}\frac{\partial\mu''}{\partial t}H^3+\cdots\right)\mathrm{d}V. \tag{12.24}$$

现在必须对于 $\boldsymbol{M}_0,\mu',\mu''$等作一些假定. 首先,假定任何一块固定的物质的 $\mu',\mu''\cdots$是不变的;亦即

$$O=\frac{\mathrm{D}\mu'}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\mu'}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\mu'+\cdots \tag{12.25}$$

其次,假定在变化过程中,任何一块物质所构成的面上的 $\boldsymbol{M}_0$ 是不变的,这就是说:如果某一些物质在介质中在 t 时构成面 $\boldsymbol{S}_1$,而在 $t+\Delta t$ 时构成面 $\boldsymbol{S}_2$,那么

$$\int_{S_2}\boldsymbol{M}_0(t+\Delta t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\int_{S_1}\boldsymbol{M}_0(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

但上式左方可以写为

$$\int_{S_3}[\boldsymbol{M}_0(t+\Delta t)-\boldsymbol{M}_0(t)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_2}\boldsymbol{M}_0(t+\Delta t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\int_{S_1}\boldsymbol{M}_0(t+\Delta t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

第一项成为

$$\int\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}_0}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\Delta t.$$

在后两项中,先将 $t+\Delta t$ 换为 t,再引入一条面 S_3,使 S_1,S_2,S_3 合成一封闭曲面,最后应用高斯定理,证明后两项的和为

$$\int\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0\mathrm{d}V-\int\boldsymbol{M}_0\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{u}\Delta t), \tag{12.26}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为面 $\boldsymbol{S}$ 的周围,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向与 $\boldsymbol{S}$ 的方向服从右手定则. 上式可以写为

$$\int(\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}\Delta t-\int\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{M}_0)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\Delta t.$$

因此

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}_0}{\partial t}+\boldsymbol{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0)-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{M}_0)=0. \qquad (12.27)$$

以(12.25),(12.27)中的 $\partial\mu'/\partial t,\partial\boldsymbol{M}_0/\partial t$ 代入(12.24),得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=&\frac{1}{4\pi}\int\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}V-\int\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{M}_0)\mathrm{d}V\\&+\int\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0)\mathrm{d}V+\frac{1}{8\pi}\int(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mu')H^2\mathrm{d}V\\&+\frac{1}{24\pi}\int(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mu'')H^3\mathrm{d}V+\cdots\end{aligned} \qquad (12.28)$$

现在忽略了(12.2)中的 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}V&=-\frac{1}{4\pi}\int c\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=-\frac{c}{4\pi}\int\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}V\\&=-\int\boldsymbol{E}\cdot\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V;\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{M}_0)\mathrm{d}V&=\int(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{M}_0)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}V\\&=\frac{4\pi}{c}\int(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{M}_0)\cdot\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V\\&=-\frac{4\pi}{c}\int(\boldsymbol{u}\cdot\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}_0)\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=&-\int\boldsymbol{E}\cdot\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V-\int\boldsymbol{u}\cdot\Big\{-\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}_0-\boldsymbol{H}\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0\\&-\frac{1}{8\pi}\nabla\mu'H^2-\frac{1}{24\pi}\nabla\mu''H^3-\cdots\Big\}\mathrm{d}V.\end{aligned} \qquad (12.29)$$

因此 $\boldsymbol{f}_\rho,\boldsymbol{f}_m$ 的一个解是

$$\boldsymbol{f}_\rho=\rho\Big\{\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\Big\},$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_m = & -\frac{4\pi}{c}\rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{H}\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0 \\
& -\frac{1}{8\pi}\nabla\mu' H^2 - \frac{1}{24\pi}\nabla\mu'' H^3 - \cdots
\end{aligned}
\tag{12.30}
$$

用以上的方法，有两个缺点. 首先，不论下列式中 β 取什么值，

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{f}_\rho = \dfrac{4\pi}{c}\beta(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{M}_0) + \rho\left\{\boldsymbol{E} + \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right\}, \\
\boldsymbol{f}_m = -\dfrac{4\pi}{c}(1-\beta)\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{H}\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0 - \dfrac{1}{8\pi}\nabla\mu' H^2 - \cdots
\end{cases}
\tag{12.31}
$$

都是解答. 其次 $\boldsymbol{f}_\rho, \boldsymbol{f}_m$ 上可以分别地加上一些与 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}$ 垂直的项而不影响它的解. 为了补救这两个缺点，我们再援用动量守恒定律. 用了后一个定律，我们非但确定了(12.31)中的 β 为零，而且确定了 $\boldsymbol{f}_\rho, \boldsymbol{f}_m$ 中与 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}$ 垂直的分量. 这样，才肯定了 $\boldsymbol{f}_\rho, \boldsymbol{f}_m$ 的全部式子. 它们即是(12.30)式.

$\boldsymbol{f}_\rho$ 的值与介质的速率 $\boldsymbol{u}$ 无关，乃是可以想像得到的. 电流在磁场中所受的力，由 $\boldsymbol{B}$ 而不由 $\boldsymbol{H}$ 决定，也是在想像中的. 比较难以了解的是磁荷 $-\nabla\cdot\boldsymbol{M}_0$ 受力由 $\boldsymbol{H}$ 而不由 $\boldsymbol{B}$ 决定的这件事，在此获得了证明. 这个证明方法是宏观的. 微观的证明方法主要是假定永磁矩是不能被穿过的电流环路(即环路所构成面不可能被电子穿过)，在此不拟讨论；读者可参阅 Fowler 及 Guggenheim 所著《统计热力学》.

当电流所走的路线固定于介质中时(亦即电流所走路线与介质一起运动时)，$\boldsymbol{f}_\rho$ 与(12.30)第二式右方第一项可以一并考虑，成为作用于电流上的力. 这等于

$$
\begin{aligned}
& \rho\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}_0)\right\} \\
& \qquad = \rho\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\left(\mu'\boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\mu''\boldsymbol{H}^2 + \cdots\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{12.32}
$$

对于磁性不强的物体，这几乎与(12.30)的第一式的右方相同. 对

于铁磁性的物体，这同(12.30)的第一式的右方比较，可以相差极多.

(3) 一个运动着的导线的法拉第定律

这也是一个值得提出讨论的问题.

如图 15，在 t 时刻，设导体是一个封闭曲线 Γ_1，包围着面 $\boldsymbol{S}_1$. 在时刻 $t+\Delta t$，设导体成为封闭曲线 Γ_2，包围着面 $\boldsymbol{S}_2$，我们不难证明

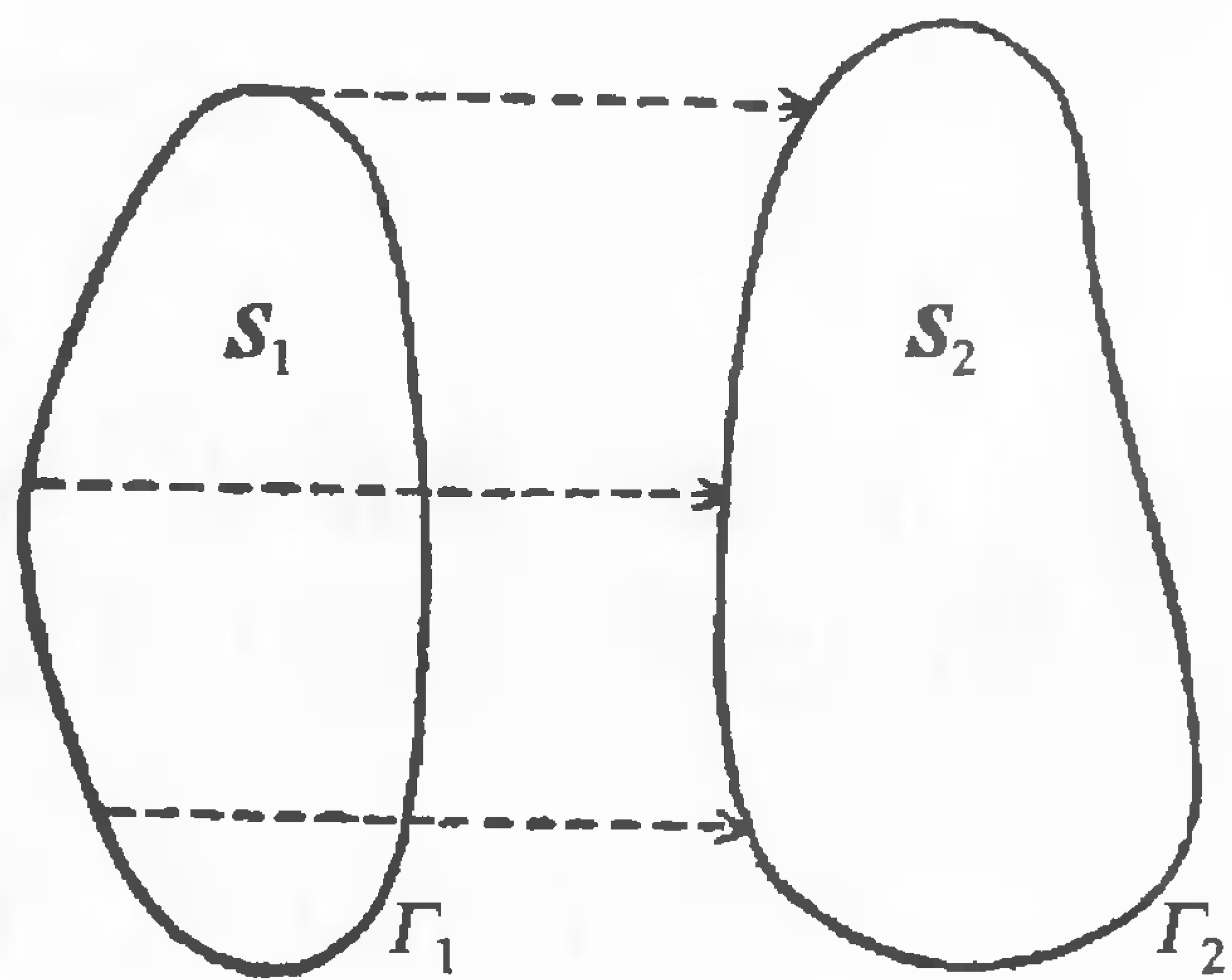


图 15

$$\int_\Gamma \left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{c\Delta t}\left\{\int_{S_2}\boldsymbol{B}(t+\Delta t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_{S_1}\boldsymbol{B}(t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right\}. \quad (12.33)$$

这便是法拉第定律. (12.33)的证明如下：

(12.33)的右方的计算正同(2)中

$$\int_{S_2}\boldsymbol{M}_0(t+\Delta t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_{S_1}\boldsymbol{M}_0(t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

的计算一样，在此不拟重复. 它等于

$$\frac{1}{c}\left\{\iint\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{u}\right\}, \quad (12.34)$$

式中 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ 代表导体上在点 (x,y,z) 附近一段的速度. 因 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，上式成为

$$\frac{1}{c}\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left\{\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\right\}. \quad (12.35)$$

另一方面，计算(12.33)左方的值. $\boldsymbol{v}$ 可以写为二项的和：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}, \quad (12.36)$$

$\boldsymbol{v}'$代表电荷等相对于导体的速度，与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 平行. 因此(12.33)左方等于

$$\int\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{u}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int\left[\nabla\times\boldsymbol{E}+\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{u}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\frac{1}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left\{\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\right\},\tag{12.37}$$

与(12.35)比较，便获得了所需的证明.

单位电荷在导体中所受的力是

$$\boldsymbol{E}^*\equiv\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B},\tag{12.38}$$

所以(12.33)可以写为

$$\int\boldsymbol{E}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left\{\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\right\}.\tag{12.39}$$

在通常书籍中，常常由上式推出：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^*=\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\right],\tag{12.40}$$

这是不够正确的. 要能够自(12.39)式中推出(12.40)，必须在(12.39)对任何 $\boldsymbol{S},\Gamma$ 有效，而(12.39)中的 $\boldsymbol{v}$ 乃是 x,y,z,t 的单值函数的情形下. 但即使我们取一个极小极小的环路，我们仍然有下面的式子：

$$\int\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\neq 0$$

(亦即 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 有奇异点)，因此 $\boldsymbol{v}$ 不可能到处为(x,y,z,t)的单值的连续函数，因此我们不能自(12.39)式导出(12.40).

这一点由(12.40)的形式看来，也是极显然的. 左方包含了 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}'$，而右方只包含 $\boldsymbol{u}$.

如果只讨论电子所受力沿线形导线方向的分量，那么 $\boldsymbol{E}^*$ 可以换为 $\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{u}/c)\times\boldsymbol{B}$，这样的 $\boldsymbol{E}^*$ 便满足(12.40). 事实上不难由 $\boldsymbol{E}^*$ 的新值 $\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{u}/c)\times\boldsymbol{B}$ 直接地证明(12.40)式.

当线路各支中邻近点在同一时刻的电流是一样的，我们可以将(12.39)认为电动势，而应用到对于整个封闭电路的欧姆定律上去. 显然地，如果线路各支的邻近点在同一时刻的电流不一样，(12.39)作为一个电动势来看是没有实际意义的. 那时我们必须自麦克斯韦方程出发，具体地研究这样的问题.

(4) 在不同情形下近似求解(12.1)—(12.6)

最后，我们简单地讨论怎样在各种不同情形下近似地求(12.1)—(12.6)的解，目的是了解在什么情形下可以忽略(12.5)中的 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$，在什么情形下可以忽略(12.2)中的 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$.

当然，在稳定情形下

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=0, \tag{12.41}$$

那时(12.5)中的 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ 及(12.2)中的 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 都不存在. 那时我们有

$$\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}=0, \tag{12.42}$$

相当于电路分析中基尔霍夫(Kirchhoff)定律关于在每点上电流的总和等于零的讨论. 此外

$$\nabla \times \boldsymbol{E}=0, \quad \boldsymbol{E}=-\nabla \varphi, \tag{12.43}$$

与静电学相同. 如果只讨论介质到处相同而 B/H 为一常数 μ 的情形，得

$$\boldsymbol{H}=\nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{12.44}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int \frac{\rho \boldsymbol{v}}{r}\mathrm{d}V. \tag{12.45}$$

在 $\rho \boldsymbol{v}$，ρ 对时间有变化，而变化率是极小的情形下，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$ 对于时间也有变化，变化率也极小. 那时显然第一个近似是

$$\boldsymbol{H}=\nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{12.46}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)=\frac{1}{c}\int \left\{\frac{\rho \boldsymbol{v}(t)}{r}\right\}\mathrm{d}V. \tag{12.47}$$

如果假定 $\rho \boldsymbol{v}(t)$很近似地满足

$$\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} = 0, \tag{12.48}$$

那么(12.46),(12.47)也近似地满足了忽略 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 后的(12.2).因为 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 在此比$(4\pi/c)\rho \boldsymbol{v}$ 小,这样的忽略是被允许的;因此(12.46),(12.47)便是我们所需要的解答.但这并不意味着可以在(12.5)右方忽略 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$;这是因为 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ 是(12.5)右方中最主要的一项.我们应该用已知的 $\boldsymbol{B}$ 代入(12.5),再用(12.5),(12.6)去求 $\boldsymbol{E}$.以上的情形称为宏观电动力学中的似稳情形(квазистационарныи процесс).

我们将在第四章中证明电子所放射的电磁场,在离电子极远处主要地成为 $\boldsymbol{E}_{\text{rad}}$,$\boldsymbol{H}_{\text{rad}}$,称为辐射电磁场.它们的式子见第四章.由这个式子可以证明在离电子极远处($\rho \boldsymbol{v}$ 在那里等于零),

$$\nabla \times \boldsymbol{H} \approx \nabla \times \boldsymbol{H}_{\text{rad}} \neq 0.$$

因此如果要考虑 $\boldsymbol{H}_{\text{rad}}$,那么在(12.2)中不能忽略 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$(不然(12.2)无法满足).因此当 $\rho \boldsymbol{v}$ 有剧烈变化(具体地讲,即电子有显著的加速度),使我们不得不考虑辐射问题时,那么我们便不能忽略 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$.这称为辐射情形.

很明显地,当我们求得了(12.1)—(12.6)在一般情形下的解,我们自然而然能知道在什么情形下可以忽略 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$,在什么情形下可以忽略 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$.我们将在第四章中讨论微观的麦克斯韦方程的解.

宏观电动力学中的问题是极多的,也是饶有兴趣的,但是由于本书的性质,在此不作更多的讨论.

第三章　电子的放射[①]

§13　一个以任意而不变的速度运动着的电子的电磁场

首先，让我们讨论一个以任意大小而不变的速度 $\boldsymbol{v}$ 运动着的电子所产生的电磁场. 这比一般运动的电子所产生的电磁场较为简单. 一般运动的电子的电磁场将在 §16 中导出.

取坐标轴的 x 轴沿 $\boldsymbol{v}$，可以将电子中心的运动方程写为

$$y=0,\quad z=0,\quad x=vt. \tag{13.1}$$

由于 $\boldsymbol{v}$ 是永恒不变的事实，我们可以设想在任何两个时间 t_1,t_2 的电磁场，如果它们在空间的分布不写为 x,y,z 的函数而分别地写为 $(x-vt_1,y,z)$ 及 $(x-vt_2,y,z)$ 的函数，那么这两个函数的形式是一样的. 这即是说在 t_1 时刻某点 (x,y,z) 上的电磁场移至 $(x+v(t_2-t_1),y,z)$ 点，便获得了在 t_2 时刻在这点上的电磁场. 因此可以设想 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\rho$ 等满足

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x-vt,y,z),\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(x-vt,y,z),\cdots \tag{13.2}$$

这便是说 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 等满足(6.2)式. 反过来讲，如果 $f(x,y,z,t)$ 满足

---

① 作者在本书中所说的电磁场的放射与辐射是有不同的含义的. 为避免读者在阅读本书时引起混淆，在此作一说明：源(运动着的电子或在一固定区域内的电荷、电流等)在周围空间中产生电磁场，在本书中统称放射电磁场. 在这些电磁场中，仅仅其强度与 R(源至场点的距离)成反比的部分(本章中用 $\boldsymbol{E}'',\boldsymbol{H}''$表示)所具有的能量(其密度与 R^2 成反比)能够流向无穷远处(因以源为球心、R 为半径的球上在某一立体角内的面积与 R^2 成正比)，这部分电磁场 $\boldsymbol{E}'',\boldsymbol{H}''$称为辐射电磁场，其余的电磁场，其强度(本章中用 $\boldsymbol{E}',\boldsymbol{H}'$ 表示)是与 $R^2,R^3,\cdots$成反比的. 所以其能量仅能在源的近处存在，随 R 的增加很快衰减为 0，不能流向无穷远处，所以辐射电磁场仅仅是本书所说的放射电磁场中能达到很远处的那一部分. ——第二版注.

$$v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

那么将 f 写为新变量$(x-vt,y,z,t)$的函数，便可以证明 f 同变量中最末一个无关，获得 $f=f(x-vt,y,z)$.

(13.2)大大地简化了求电磁场的过程. 依照§7，我们求电磁场的步骤为先自下式：

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\rho\,\boldsymbol{v}\,, \tag{13.3}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho, \tag{13.4}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{13.5}$$

中求 $\boldsymbol{A},\varphi$，再代入

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{13.6}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)-\nabla\varphi \tag{13.7}$$

去求 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$. 以 $\hat{x}$ 代表 $x-vt$，利用 $\boldsymbol{A},\varphi$ 为 $y,z,\hat{x}$ 函数的事实，得

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\hat{x}},\quad\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial\hat{x}^2},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-v\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\hat{x}},\quad\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial\hat{x}^2},\quad\cdots$$

因此(13.3),(13.4),(13.5)成为

$$\left\{(1-\beta^2)\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{c}\rho\,\boldsymbol{v}\,, \tag{13.8}$$

$$\left\{(1-\beta^2)\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\varphi=-4\pi\rho, \tag{13.9}$$

$$\hat{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}-\frac{v}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}}=0; \tag{13.10}$$

式中 $\hat{\nabla}$ 代表

$$\left(\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{k},$$

而 β 代表 v/c. 注意在(13.8)—(13.10)式中，独立变数只有 $\hat{x},y,z$ 三个.

微分方程(13.9)与(13.8)是极相似的. 因 $\boldsymbol{v}$ 是一个常数，它们右方只差一个常数倍. 因此可以想像 $\boldsymbol{A},\varphi$ 也只差一个常数倍. 先讨论(13.9)式.

必须指出，$\beta>1$ 的(13.9)式的性质同 $\beta\leqslant 1$ 的(13.9)式的性质是极不相同的. 当 $\beta>1$ 时，(13.9)式成为双曲线型的微分方程，性质与波方程类似；而当 $\beta\leqslant 1$ 时，(13.9)式依然是椭圆型的微分方程，与

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho \tag{13.11}$$

极相似. 事实上在这个情形下，我们只消用一个变数的变换，即可以将(13.9)变成(13.11)式. 我们在此只讨论 $\beta<1$ 的情形. $\beta>1$ 的情形与以下所讨论的切连科夫(Черенков)效应(§67)很类似，在此不拟讨论.

引入变数

$$x'=\hat{x}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},\quad y'=y,\quad z'=z \tag{13.12}$$

后，(13.9)便变为

$$\nabla'^2\varphi=-4\pi\rho; \tag{13.13}$$

式中 ∇'^2 代表算子

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

(13.13)中的 φ,ρ 为 x',y',z' 的函数. 为清楚起见，它们如何为 x',y',z' 的函数，用 f_φ,f_ρ 来表出.

$$\varphi=f_\varphi(x',y',z'),\quad \rho=f_\rho(x',y',z').$$

当 φ 在无穷远处为零(或趋近于零较 r 的某次方为快)，得

$$f_\varphi(x',y',z')=\iiint\frac{f_\rho(\xi',\eta',\zeta')}{\{(x'-\xi')^2+(y'-\eta')^2+(z'-\zeta')^2\}^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta'\mathrm{d}\zeta'.$$

φ 或 $\boldsymbol{A}$ 或其他物理量在无穷远为零或趋近于零的边界条件，将称为“自然边界条件”，在此后有时将不明显地写出. 由(13.12)及上

式,得

$$\varphi(\hat{x},y,z)=f_\varphi(\hat{x}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z)$$
$$=\iiint\frac{f_\rho(\xi',\eta',\zeta')\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta'\mathrm{d}\zeta'}{\{[\hat{x}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}-\xi']^2+(y'-\eta')^2+(z'-\zeta')^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

以$\hat{\xi}$代替 $\xi'(1-\beta)^{\frac{1}{2}}$,$\eta$ 代替 η',ζ 代替 ζ',而同时注意

$$f_\rho(\hat{\xi}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},\eta,\zeta)=\rho(\hat{\xi},\eta,\zeta),$$

便获得

$$\varphi(\hat{x},y,z)=\iiint\frac{\rho(\hat{\xi},\eta,\zeta)\mathrm{d}\hat{\xi}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\{(\hat{x}-\hat{\xi})^2+(1-\beta^2)[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{13.14}$$

同样地,可以获得

$$\boldsymbol{A}(\hat{x},y,z)=\iiint\frac{\rho(\hat{\xi},\eta,\zeta)(\boldsymbol{v}/c)\mathrm{d}\hat{\xi}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\{(\hat{x}-\hat{\xi})^2+(1-\beta^2)[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{13.15}$$

不难证明(13.10)是已经满足的. 事实上,$\hat{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ 同$(v/c)(\partial\varphi/\partial\hat{x})$都等于

$$-\iiint\frac{(\hat{x}-\hat{\xi})\rho(\hat{\xi},\eta,\zeta)(v/c)}{\{(\hat{x}-\hat{\xi})^2+(1-\beta^2)[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\}^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\hat{\xi}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

为研究 $\boldsymbol{A},\varphi$ 对于 x,y,z,t 的微分起见,我们以 $\xi-vt$ 代替(13.14),(13.15)中的$\hat{\xi}$. 当我们令$\hat{\xi}$为 $\xi-vt$ 时,$\rho(\hat{\xi},\eta,\zeta)$即成为$\rho(\xi,\eta,\zeta,t)$,因此

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi(\hat{x},y,z)$$
$$=\iiint\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\{(x-\xi)^2+(1-\beta^2)[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{13.16}$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\boldsymbol{A}(\hat{x},y,z)=\frac{\boldsymbol{v}}{c}\varphi.$$

由以上两式,也可以证明(13.5)是已经满足的. 证明这一点时我们需用到

$$\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

这个式子在此即是

$$v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

亦即是(6.2)式.

因

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\varphi,$$

得

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{v}}{c}\varphi = -\nabla\varphi - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ &= -\nabla\varphi - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi) \\ &= -\nabla\varphi + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi), \\ \boldsymbol{H} &= \nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\varphi\right) = -\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\nabla\varphi \\ &= \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}. \end{aligned}\right. \tag{13.17}$$

在我们的讨论中，$\boldsymbol{v}$ 沿 x 轴，因此

$$E_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\beta^2 - 1), \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

讨论离电子极远处的 $\boldsymbol{A}, \varphi, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$；或讨论当电子为一点时在电子外的 $\boldsymbol{A}, \varphi, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. 在这两个情形下，用了电子中心的运动方程(13.1)后，得

$$\varphi = e\{\hat{x}^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\boldsymbol{A} = e\frac{\boldsymbol{v}}{c}\{\hat{x}^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)\}^{-\frac{1}{2}}.$$

令 κ 代表

$$[\hat{x}^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{\frac{1}{2}}, \tag{13.18}$$

得

$$\varphi = \frac{e}{\kappa}, \quad \boldsymbol{A} = \frac{e\,\boldsymbol{v}}{c\kappa}. \tag{13.19}$$

代入(13.16),(13.17),求得

$$\begin{cases} E_x = (1-\beta^2)\dfrac{e\hat{x}}{\kappa^3},\ E_y = (1-\beta^2)\dfrac{ey}{\kappa^3},\ E_z = (1-\beta^2)\dfrac{ez}{\kappa^2}, \\ H_x = 0,\ H_y = -\dfrac{ev}{c}\dfrac{(1-\beta^2)}{\kappa^3}z,\ H_z = \dfrac{ev}{c}\dfrac{(1-\beta^2)}{\kappa^3}y. \end{cases} \tag{13.20}$$

这说明了当 v/c 取小值时,

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{r}}{r^3} + O(\beta^2),$$

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{e}{c}\right)\boldsymbol{v} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + O(\beta^3);$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 代表自电子中心至场点的矢量. 以上证实了 §6 中的结果.

利用(13.19),(13.20)我们可以计算一个静止电子与一个以均匀速度运动的电子的相互作用能,也可以很容易地计算一个以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电子与一个以速度 $-\boldsymbol{v}$ 运动的电子的相互作用能. 先计算第一个相互作用能. 令第一个电子的速度为零.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}^{(1)} \cdot \boldsymbol{E}^{(2)} \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\left(-\nabla\varphi^{-1} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(1)}}{\partial t}\right)\cdot \boldsymbol{E}^{(2)}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \varphi^{(1)}(\nabla\cdot\boldsymbol{E}^{(2)})\mathrm{d}V = \int\varphi^{(1)}\rho^{(2)}\mathrm{d}V \\ &= \frac{e^{(1)}e^{(2)}}{r_{12}}. \end{aligned} \tag{13.21}$$

因 $\boldsymbol{H}^{(1)}=0$, $\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}^{(1)}\cdot\boldsymbol{H}^{(2)}\mathrm{d}V=0$,因此相互作用能为 $e^{(1)}e^{(2)}/r_{12}$,与两个不运动的电子的相互作用能一样.

这说明了两个以均匀速度运动的电子的相互作用能不能含有只包含 $\boldsymbol{v}^{(1)}$ 或只包含 $\boldsymbol{v}^{(2)}$ 的一项. 因为如果相互作用能含有一项 $f(\boldsymbol{v}^{(1)})$,那么我们令 $\boldsymbol{v}^{(2)}=0$,便证明了不论 $\boldsymbol{v}^{(1)}$ 是什么,$f(\boldsymbol{v}^{(1)})$ 等于零,亦即 f 恒等于零.

现在计算两个以相等而相反的速度运动着的电子的相互作用能.

$$\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}^{(2)}\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\left\{-\nabla\varphi^{(2)}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(2)}}{\partial t}\right\}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int(\nabla\cdot\boldsymbol{E}^{(1)})\varphi^{(2)}\mathrm{d}V - \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(2)}}{\partial t}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int 4\pi\rho^{(1)}\varphi^{(2)}\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}^{(1)}\cdot[(\boldsymbol{v}^{(2)}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}^{(2)}]\mathrm{d}V$$

$$= \int\rho^{(1)}\varphi^{(2)}\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi c}\int[(-\boldsymbol{v}^{(2)}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}^{(1)}]\cdot\boldsymbol{A}^{(2)}\mathrm{d}V,$$

$$\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}^{(1)}\cdot\boldsymbol{H}^{(2)}\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}^{(1)}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}^{(2)}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{A}^{(2)}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}^{(1)}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{A}^{(2)}\cdot\left\{\frac{4\pi}{c}\rho^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}^{(1)}}{\partial t}\right\}\mathrm{d}V$$

$$= -\frac{1}{4\pi c}\int[(\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}^{(1)}]\cdot\boldsymbol{A}^{(2)}\mathrm{d}V + \frac{1}{c}\int\rho^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{A}^{(2)}\mathrm{d}V.$$

因 $\boldsymbol{v}^{(1)}=-\boldsymbol{v}^{(2)}$,得

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\int \boldsymbol{E}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}^{(2)}\mathrm{d}V + \int \boldsymbol{H}^{(1)}\cdot\boldsymbol{H}^{(2)}\mathrm{d}V\right\}$$

$$= \int\rho^{(1)}\varphi^{(2)}\mathrm{d}V + \frac{1}{c}\int\rho^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{A}^{(2)}\mathrm{d}V$$

$$= \left\{1+\frac{\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v}^{(2)}}{c^2}\right\}\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{\{x_{12}^2+(1-\beta_2^2)(y_{12}^2+z_{12}^2)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{\{x_{12}^2+(1-\beta^2)[y_{12}^2+z_{12}^2]\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{13.22}$$

这是一个很有趣的结果,因为它证明了当 $v\to c$ 时,相互作用能趋近于零.两个如此的电子所构成系统的电磁场动量显然等于零.这些结果将在相对论中被用来讨论两个电子系统的动量、能量能否成为一个矢量(见第二部).

§14　一个电子的电磁场的动量、能量

让我们讨论一个以任意而不变的速度运动着的电子所产生的电磁场的总动量和总能量.这样的电子所产生的电场磁场的一般

公式已在上节(13.16),(13.17)中求出.我们的问题只在给电子一个具体的模型,即确定(13.16),(13.17)中的 ρ,由此计算 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 及动量 $\boldsymbol{G}$,能量 U.

有两个通常讨论的模型:一个称为阿伯拉汉姆(Abraham)模型,它假定电子在任何情形下是一个有球面对称性的圆球,圆球大小不随运动改变;另一个称为洛伦兹(Lorentz)模型,它假定电子在运动时像一个椭圆球.具体地讲,在洛伦兹模型中,电子是一个原来有球面对称性的圆球、在速度方向受了一个均匀的收缩而成的椭圆球,收缩率为 $(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$.我们先讨论第二个模型,因为它带来了较简单的动量、能量式子.

取电子中心为原点.当电子速率为零时,我们称电子中各点的密度为 $\rho_0(x,y,z)$;ρ_0 假定为球面对称的,亦即

$$\rho_0(x,y,z)=f\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

当电子有一速率 v 沿 x 轴时,我们假定电子沿 x 轴有一均匀的收缩,收缩率为 $(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$.那时原来为 (x,y,z) 的一点变为 $(x\sqrt{1-\beta^2},y,z)$ 点(假定原点始终在电子中心).原来的一小块体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 成为一个新体积,新体积的值为

$$\Delta x\Delta y\Delta z\sqrt{1-\beta^2}.$$

原来小体积的电荷为 $\rho_0(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$,新的小体积中的电荷为

$$\rho(x\sqrt{1-\beta^2},y,z)\Delta x\Delta y\Delta z\sqrt{1-\beta^2}.$$

这两个电荷显然应该是相等的,由此得

$$\rho_0(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z=\rho(x(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}},y,z)(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\Delta x\Delta y\Delta z, \tag{14.1}$$

亦即

$$\rho(x(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}},y,z)=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\rho_0(x,y,z),$$

亦即

$$\rho(x,y,z)=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\rho_0(x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z). \tag{14.2}$$

讨论 $t=0$ 时的电磁场的总动量和总能量. 因为 $\boldsymbol{v}$ 是始终不变的, 这即是任何时刻的总动量和总能量. 取原点在该时电子的中心, 得

$$\varphi(x,y,z,0)=\iiint\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,0)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\{(x-\xi)^2+(1-\beta^2)[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{14.3}$$

以(14.2)代入, 得

$$\varphi(x,y,z,0)=\iiint\frac{\rho_0(\xi(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},\eta,\zeta)(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\{(x-\xi)^2+(1-\beta^2)[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{14.4}$$

另一方面, 中心在原点的静止(即未收缩的)电子所产生的 φ 为

$$\iiint\frac{\rho_0(\xi,\eta,\zeta)}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\equiv\varphi_0(x,y,z). \tag{14.5}$$

将(14.4), (14.5)比较, 即获得

$$\varphi(x,y,z,0)=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\varphi_0(x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z). \tag{14.6}$$

以此代入(13.17), 即可求出 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$. 称中心在原点的静止电子所产生的电场为 (E_{x0},E_{y0},E_{z0}), 我们的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 可以写为

$$\begin{cases}E_x(x,y,z,0)=E_{x0}(x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z),\\ E_y(x,y,z,0)=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}E_{y0}(x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z),\\ E_z(x,y,z,0)=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}E_{z0}(x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z),\end{cases} \tag{14.7}$$

$$\begin{cases}H_x=0,\\ H_y=-(v/c)(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}E_{z0}(x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z),\\ H_z=(v/c)(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}E_{y0}(x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},y,z).\end{cases} \tag{14.8}$$

代入

$$G=\int g\mathrm{d}V=\int\frac{1}{4\pi c}(E\times H)\mathrm{d}V,$$

得

$$G_y=G_z=0,$$

$$G_x=\frac{v}{4\pi c^2(1-\beta^2)}\iiint(E_{y0}^2+E_{z0}^2)\left(\frac{x}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}},y,z\right)\mathrm{d}V.$$

以 x 代替 $x(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$,得

$$G_x=\frac{v}{4\pi c^2(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\iiint(E_{y0}^2+E_{z0}^2)(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

不难作出积分. 由于 ρ_0 的对称性,得

$$\int E_{y0}^2\mathrm{d}V=\int E_{z0}^2\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\int E_0^2\mathrm{d}V=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{8\pi}\int E_0^2\mathrm{d}V\right)=\frac{8\pi}{3}U_0$$

(U_0 代表静止电荷的电磁场的总能量),因此

$$G_x=\frac{4}{3}(U_0/c^2)v(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

用矢量语言,得

$$G=\frac{4}{3}(U_0/c^2)\,v\,(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}.\tag{14.9}$$

同样,以(14.7),(14.8)代入

$$U=\int u\mathrm{d}V=\int\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\mathrm{d}V,$$

得

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{8\pi}\int\left[E^2+\left(\frac{v}{c}\times E\right)^2\right]\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{8\pi}\int[E_x^2+(1+\beta^2)(E_y^2+E_z^2)]\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{8\pi}\int\left\{\left[E_{x0}\left(\frac{x}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}},y,z\right)\right]^2\right.\\&\qquad\left.+\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\left(\left[E_{y0}\left(\frac{x}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}},\cdots\right)\right]^2+E_{z0}^2\right)\right\}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8\pi}(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{2(1+\beta^2)}{1-\beta^2}\right\}\int E_{x0}^2(x,y,z)\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{8\pi}\frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}(3+\beta^2)\frac{8\pi}{3}U_0 \\
&= \frac{U_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{14.10}
$$

至于总角动量，我们很容易证明电磁场对于某固定点的总角动量即是总动量对于该点的动量矩，亦即自该点至电子中心的矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 与总动量 $\boldsymbol{G}$ 的矢量积.

(14.9)及(14.10)的结果，是极重要的. 在讨论电子的运动方程时，我们将详细地讨论它们的意义. 在此我们可以指出，它们只对均匀运动的电子有效. 当电子有一个极小极小的加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 时，我们可以想像

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{G} = \frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}\boldsymbol{v}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} + O(\dot{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}},\cdots), \\
&U = U_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right) + O(\dot{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}},\cdots).
\end{aligned}
\tag{14.11}
$$

在此我们可以看到

$$
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \neq \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}, \tag{14.12}
$$

与寻常力学里的情形不同. 在牛顿力学中 $\boldsymbol{G}=m\boldsymbol{v}$，$U=\frac{1}{2}mv^2$，因此(14.12)中的等号是成立的；在相对论力学中(见本书第二部)，

$$
\boldsymbol{G} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}},\quad U = m_0c^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{14.13}
$$

因此(14.12)中的等号也是成立的. (14.12)中等号在此不成立，是值得注意的一件事. 在讨论电子的运动方程时，我们将讨论这一点的意义.

严格讲来，这个模型带来了不少困难. 由于收缩现象，电子的形状在 $\boldsymbol{v}$ 变化时有了变化，这必然使我们认为在某些情况下电子

中各处的速度一定不一样. 因为如果假定电子中各部分速度永远是相同的,电子便不可能有形变,便不可能收缩. 既然电子中各部分的速度不一样,那么各部分的收缩率显然应该只依赖它自己的速度而不依赖于其他部分的速度. 因此,可想而知,电子各部分的收缩必然是不均匀的. 仔细地研究便有些类似弹性力学的研究一样.

如果只要求定性地讨论这样的收缩,我们的工作是不困难的.

假定原点为电子中心,称(x_0, y_0, z_0)为电子中某部分在收缩前的坐标,称(x, y, z)为此部分在时刻 t 所到达之处(x, y, z 依然为相对于电子中心的坐标). 为简单起见,假定电子只沿 x 轴运动,使 $y=y_0, z=z_0$. 问题在求 x 如何为 x_0 及 t 的函数. 称电子中心的速率为 $u(t)$,则这部分的速率 v 等于

$$u+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x_0}. \tag{14.14}$$

很显然地,

$$x=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x_0\left\{1-\frac{1}{c^2}v^2(x_0,t)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{14.15}$$

式中$\{\cdots\}$代表 $\mathrm{d}x_0$ 段的收缩率. 这个式子会同

$$v(x_0,t)=u+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x_0} \tag{14.16}$$

便在理论上决定了两个函数 $x(x_0,t)$及 $v(x_0,t)$. 将(14.15)两方对 t 作偏微分,再在双方加以 u,利用(14.16),得

$$v=u-\int_0^{x_0}\mathrm{d}x_0\,\frac{v(\partial v/\partial t)}{c^2(1-v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

在此式两方对 x_0 微分,便得

$$\frac{\partial v}{\partial x_0}=-\frac{v(\partial v/\partial t)}{c^2(1-v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{14.17}$$

这便是 $v(x_0,t)$所适合的微分方程. 利用它及 $v(0,t)=u(t)$,便可以求出 $v(x_0,t)$. 代入(14.15),然后积分,便可以求出 $x(x_0,t)$.

这样的理论，虽然在原则上没有困难，但显而易见地不会带来很简单的结果. 我们宁愿假定电子有一个均匀的收缩.

依然令电子中心为原点，令(x_0,y_0,z_0)为电子中某部分在收缩前的坐标，(x,y,z)为此部分在t时刻所到达之处（x,y,z依然为相对于电子中心的坐标）. 依然假定电子沿x轴运动，依然称电子中心的速率为u. (x_0,y_0,z_0)部分在t时的速率为

$$u+\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[x_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=u-x_0u(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)c^{-2}(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\quad(\beta=u/c).$$

以$\dot{u}$代表$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$，得

$$u-x_0u\,\dot{u}c^{-2}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=u-xu\,\dot{u}c^{-2}(1-\beta^2)^{-1}. \tag{14.18}$$

这说明了如果电子中心有加速率，电子各部分的速率不相等，不相等的程度与电子半径乘上电子中心加速率再乘上c^{-2}后所获得的乘积同级大小.

如果用阿伯拉汉姆的模型——即不论电子速度是多少，始终假定电子为一个大小不变的、有球面对称性的圆球——我们算出

$$G_x=\frac{1}{2}U_0\left(\frac{c^2+v^2}{cv^2}\log\frac{c+v}{c-v}-\frac{2}{v}\right)+O(\dot{v},\ddot{v}), \tag{14.19}$$

$$G_y=G_z=0,$$

$$U=U_0\left(\frac{c}{v}\log\frac{c+v}{c-v}-1\right)+O(\dot{v}+\ddot{v}), \tag{14.20}$$

$$U_0=\frac{1}{8\pi}\int E_0^2\mathrm{d}V.$$

此间的动量和能量都比(14.11)中的值小. 当v增加时，(14.19)，(14.20)与(14.11)的相差逐渐增大；当$v\to c$时，(14.11)中的动量、能量比(14.19)、(14.20)中的值大出很多，理由是：在洛伦兹的模型中，在$v\to c$时，电荷迅速地集中，使动量、能量大大地增加.

可以验证：(14.19)，(14.20)式中的$\boldsymbol{G},U$适合取等号的

(14.12)式. 事实上,$\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ 同 $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{G}/\mathrm{d}t$ 都等于

$$U_0\left\{-\frac{c}{v^2}\log\frac{c+v}{c-v}+\frac{2c^2}{v(c^2-v^2)}\right\}.$$

所以有此情形,将来有所解释. 在讨论到电子的运动方程时,我们将指出这个模型不如洛伦兹模型.

§15　基尔霍夫公式. 超前势,推迟势

现在讨论波方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f(x,y,z)=-4\pi g(x,y,z,t)\quad(15.1)$$

的解,为的是应用到(7.10),(7.11). 人所共知,对于微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z)=-4\pi g(x,y,z),$$

如果已知 f 在一封闭面 $\boldsymbol{S}$ 上的值,又知 f 在面上沿法线方向的方向微分的值,那么 f 在面所包含的体积中任意一点 P 的值也就可以用下式表出:

$$f_P=\int\frac{g(\xi,\eta,\zeta)}{R}\mathrm{d}V_\xi+\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{R}\boldsymbol{n}\cdot\nabla_\xi f-f\boldsymbol{n}\cdot\nabla_\xi\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\xi,\tag{15.2}$$

式中(ξ,η,ζ)代表源点(即 $\mathrm{d}V,\mathrm{d}S$ 上的点),R 代表自源点至 P 点的距离,$\boldsymbol{n}$ 代表 $\boldsymbol{S}$ 面上向外的法线方向. (15.1)的解也有一个与此相似的公式,称为基尔霍夫公式.

在此作一个符号上的改变,即将(ξ,η,ζ)改写为(x',y',z'),$\mathrm{d}V_\xi,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\xi,\nabla_\xi$ 改写为 $\mathrm{d}V',\mathrm{d}\boldsymbol{S}',\nabla'$ 等等. 同时我们将 $f(x',y',z',t)$,$g(x',y',z',t)$等(或 $f(x',y',z')$,$g(x',y',z')$)简写为 f',g';将 $f(x',y',z',t-R/c)$,$g(x',y',z',t-R/c)$等简写为 f'^*,g'^*. 这样,基尔霍夫公式可以写为

$$f(x,y,z,t)=\int\frac{g'^*}{R}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{2}{R}(\nabla'f')^*-\nabla'\left(\frac{1}{R}f'^*\right)\right\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'.\tag{15.3}$$

让我们在这里说明如何自(15.1)求得上面的解,因为此处所拟说明的求解方法,在理论物理中常常遇到,可以用来解决类似的微分方程.

将 $f(x,y,z,t)$ 写为

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}f_k(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k, \tag{15.4}$$

我们便获得了

$$f_k(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t. \tag{15.5}$$

这便是傅里叶积分的理论的结果①.

将(15.5)中的 f_k 代入(15.4)式,得

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z,t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt'}\mathrm{d}t',$$

因此

---

① 由于(15.4),(15.5)的重要性,我们在此补充一个简单的证明.假定 $f(t)$ 为一个有周期性的函数,周期为 τ,那么,依照傅里叶级数理论,得

$$f(t)=\sum f'_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \tag{15.6}$$

其中

$$k=2\pi n/\tau,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$f'_k=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t. \tag{15.7}$$

现在令 τ 成为一个极大的数.在 $(k,k+\Delta k)$ 中的不同的 n 共有 $(\tau/2\pi)\Delta k$ 个(因为 $k=2\pi n/\tau,\Delta k=2\pi\Delta n/\tau$).因此(15.6)可以写为

$$f(t)=\sum\Delta k\,\frac{\tau}{2\pi}f'_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

式中的 $\sum$ 符号系对所有的 Δk 取和.因此上式可以写为

$$f(t)=\int\mathrm{d}k\,\frac{\tau}{2\pi}f'_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

令 f_k 为 $(\tau f'_k)/(2\pi)^{1/2}$,上式成为

$$f(t)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int f_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k,$$

亦即(15.4),而(15.7)成为

$$f_k=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t.$$

当 τ 为无穷大时,上式即是我们所欲证明的(15.5).

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(t-t')}dk = \delta(t-t').\text{①} \tag{15.8}$$

同样，将(15.4)中的 f 代入(15.5)式，得

$$f_k(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}dt\int_{-\infty}^{\infty} f_l(x,y,z)e^{ilt}dl,$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-l)t}dt = \delta(k-l). \tag{15.9}$$

上式同(15.8)是一回事，它在量子力学中有极大的用处.

将 $g(x,y,z,t)$ 也展为

$$g(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int g_k(x,y,z)e^{ikt}dk, \tag{15.10}$$

将(15.4)，(15.10)的右方代入(15.1)，在所得的式子双方都乘以 e^{-ilt}，对 t 积分(自 $-\infty$ 至 $+\infty$)，再利用(15.9)式，便获得了

$$\nabla^2 f_l + \left(\frac{l}{c}\right)^2 f_l = -4\pi g_l. \tag{15.11}$$

这个式子只含三个变数 x,y,z，比以前简单. 现在让我们求它的解.

将(15.11)中的 l 换为 k，以 x',y',z' 代替 x,y,z，得

$$\left\{\nabla'^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2\right\} f_k(x',y',z') = -4\pi g_k(x',y',z'). \tag{15.12}$$

---

① 较严格地讲，(15.8)应写为

$$f(x,y,z,t) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{ikt}dk\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z,t')e^{-ikt'}dt',$$

或

$$f(x,y,z,t) = \lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z,t')\int_{-N}^{N} e^{ik(t-t')}dk.$$

依照 § 2 中的讨论，我们获得了上式后，即将

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{ik(t-t')}dk$$

写为 $\delta(t-t')$. 这样写下的式子正是(15.9).

讨论下面的格林定理：

$$\int_{V'}(\phi'\ \nabla'^2\psi' - \psi'\ \nabla'^2\phi')\mathrm{d}V'$$

$$= \int_{S'}(\phi'\ \nabla'\psi' - \psi'\ \nabla'\phi')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}', \tag{15.13}$$

式中 ϕ'和 ψ'代表 $\phi(x',y',z')$和 $\psi(x',y',z')$；而积分点为 (x',y',z'). 令 S'包含两部分，一为以某点(x,y,z)为中心的一个小圆球面 S_0，球的半径为一小数 ε，另一部分为某一个面 S_1，它所包含的体积包含了这个小圆球面 S_0 及(x,y,z)点. 那么(15.13)左方积分区域便是为 S_0 及 S_1 所包围的体积. 只消 ϕ'，ψ'在这个体积中有二次的偏微分(而这些偏微分是连续的)，那么不论 ϕ'，ψ'是什么，(15.13)是成立的. 令 ϕ'为 $f_k(x',y',z')$，ψ'为 $h_k(x',y',z')$，而后者的定义为

$$h_k(x',y',z') = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR/c})/R, \tag{15.14}$$

其中

$$R = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

那么由于一方面在体积积分的区域内，

$$\left[\nabla'^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2\right]h_k' = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}\right)(Rh_k') + \left(\frac{k}{c}\right)^2 h_k' = 0,$$

而另一方面，

$$\int_{S_0} h_k'(\nabla' f_k')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' = O(\varepsilon),$$

$$\int_{S_0} f_k'(\nabla' h_k')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' = \int_{S_1} f_k'(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR/c})\left(\frac{-\mathrm{i}k}{c}\frac{\boldsymbol{R}}{R^2} - \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

$$= 4\pi f_k(x,y,z) + O(\varepsilon) \tag{15.15}$$

(上式中 $\boldsymbol{R}$ 代表自(x,y,z)至(x',y',z')的矢量，而在 S_0 上，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$的方向自圆球走向圆球内，与 $\boldsymbol{R}$ 恰好相反)，得

$$4\pi f_k(x,y,z) = \int_{S_1}(h_k'\ \nabla' f_k' - f_k'\ \nabla h_k')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

$$+ \int (f_k'\ \nabla'^2 h_k' - h_k'\ \nabla'^2 f_k')\mathrm{d}V' + O(\varepsilon)$$

$$= \int_{S_1} (h_k' \nabla' f_k' - f_k' \nabla' h_k') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

$$+ \int 4\pi g_k' \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR/c}}{R} \mathrm{d}V' + O(\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$，得

$$f_k(x,y,z) = \int g_k' \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR/c}}{R} \mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\int_{S_1} (h_k' \nabla f_k' - f_k' \nabla h_k') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'. \tag{15.16}$$

注意上式右方的体积积分区域，可以改为 $\boldsymbol{S}_1$ 内全部体积，因为这样的改动不改变积分的值.

以求得的 f_k 代入(15.4)，得

$$f(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int f_k(x,y,z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \mathrm{d}k$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \iint g_k' \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR/c}}{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \mathrm{d}k \mathrm{d}V' \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi} \iint (h_k' \nabla' f_k' - f_k' \nabla' h_k') \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \mathrm{d}k \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \right\}.$$

用

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int f(x',y',z',t') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt'} \mathrm{d}t',$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int g(x',y',z',t') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt'} \mathrm{d}t', \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int \nabla' f(x',y',z',t') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt'} \mathrm{d}t'$$

代替 f_k'，g_k'，$\nabla' f_k'$，便获得

$$f(x,y,z,t) = \iiint \frac{1}{2\pi} g(x',y',z',t') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt' + \mathrm{i}kt - \mathrm{i}kR/c} \frac{1}{R} \mathrm{d}k \mathrm{d}V' \mathrm{d}t'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{2\pi} \left[\nabla' f(x',y',z',t') \right.$$

$$\left. - f(x',y',z',t') \left(-\frac{\mathrm{i}k}{c} \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{R}}{R^2} \right) \right] \frac{1}{R}$$

$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt' + \mathrm{i}kt - \mathrm{i}kR/c} \mathrm{d}k \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \mathrm{d}t'. \tag{15.17}$$

利用(15.8)，作出上式右方第一项对 k 的积分，得

$$\iint g(x',y',z',t')\frac{1}{R}\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}t'\mathrm{d}V'$$

$$=\int\left[g\left(x',y',z',t-\frac{R}{c}\right)\Big/R\right]\mathrm{d}V'=\int\frac{g'^{*}}{R}\mathrm{d}V'.$$

利用(15.8)及

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-t')}\mathrm{d}k=\delta'(t-t') \tag{15.18}$$

作出第二项对 k 的积分,得

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left\{\frac{1}{R}(\nabla'f')^{*}+\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}f'^{*}+\frac{\boldsymbol{R}}{cR^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}f'\right)^{*}\right\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'.$$

因

$$\nabla'(f'^{*})=(\nabla'f')^{*}-\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\left(\frac{\partial}{\partial t}f'\right)^{*},$$

得最后结果

$$f(x,y,z,t)=\int\frac{g'^{*}}{R}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}f'^{*}+\frac{2}{R}(\nabla'f')^{*}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{R}\nabla'(f'^{*})\right\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}', \tag{15.19}$$

右方亦可写为

$$\int\frac{g'^{*}}{R}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left\{\frac{2}{R}(\nabla'f')^{*}-\nabla'\left(\frac{1}{R}f'^{*}\right)\right\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'.$$

以上便是基尔霍夫公式的证明(一个简单的证明见 Смирнов 著《高等数学教程》第二卷 § 202).

基尔霍夫公式有许多证明的方法,我们不拟一一列举. 但在下面(§ 18)我们将利用 δ 函数,直接援用格林公式,求出基尔霍夫公式.

基尔霍夫公式可以用来讨论物理光学中的菲涅耳(Fresnel)衍射、夫琅禾费(Fraunhofer)衍射[①]. 例如讨论一金属片的狭缝的

① 参阅 Л.Л. Ландау 与 Е.М. Лифшиц:《经典场论》,第七章.

衍射时,我们假定在狭缝所构成的面上,光波的电磁场强度是已知的;在金属片面上其他处,电磁场强度等于零.金属片及狭缝所构成面即是我们此处的 $\boldsymbol{S}_1$. 由此面上的 f, ∇f 等可以求出面后一点 (x,y,z) 上的 f(g 假定为零).这样的理论当然是粗糙的,因为对于这面上的 f 及 ∇f 等的值的假定,可能是错误的.这些问题的讨论在本书范围以外.

对于我们来说,所需要讨论的是下面三式

$$\nabla^3 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho\,\boldsymbol{v}\,, \tag{15.20}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{15.21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{15.22}$$

的共同解.应用基尔霍夫公式至(15.20),(15.21),令 $\boldsymbol{S}_1$ 在无穷远处,而又假定"自然边界条件",得

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t) = \frac{1}{c}\int\frac{(\rho\,\boldsymbol{v})'^*}{R}\mathrm{d}V', \tag{15.23}$$

$$\varphi(x,y,z,t) = \int\frac{\rho'^*}{R}\mathrm{d}V'. \tag{15.24}$$

不难证明上式右方满足(15.22)式.事实上

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\frac{1}{c}\int\frac{(\rho\,\boldsymbol{v})'^*}{R}\mathrm{d}V' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho'^*}{R}\mathrm{d}V'^{①} \\
&\quad=\frac{1}{c}\left[\int\left\{\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot(\rho\,\boldsymbol{v})'^* + \frac{1}{R}\nabla\cdot[(\rho\,\boldsymbol{v})'^*]\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\frac{1}{R}\frac{\partial(\rho'^*)}{\partial t}\right\}\mathrm{d}V'\right] \\
&\quad=\frac{1}{c}\left[\int\left\{-\nabla'\frac{1}{R}\cdot(\rho\,\boldsymbol{v})'^* + \frac{\partial[(\rho\,\boldsymbol{v})'^*]}{\partial t}\cdot\left(-\frac{1}{R}\frac{\nabla R}{c}\right)\right.\right.
\end{aligned}$$

---

① 注意∇可以放入积分符号内,因为 $\int\nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{v}'^*/R)\mathrm{d}V'$ 对于不同的 (x,y,z) 的收敛性是一致的.

$$+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right)^{*}\Big\}\mathrm{d}V'\Big]$$

$$=\frac{1}{c}\Big[\int\Big\{-\nabla'\frac{1}{R}\cdot(\rho\boldsymbol{v})'^{*}+\frac{\partial[(\rho\boldsymbol{v})'^{*}]}{\partial t}\cdot\left(+\frac{1}{R}\frac{\nabla' R}{c}\right)$$

$$+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right)^{*}\Big\}\mathrm{d}V'\Big]$$

$$=\frac{1}{c}\Big[\int\Big\{-\nabla'\frac{1}{R}\cdot(\rho\boldsymbol{v})'^{*}-\frac{1}{R}[\nabla'\cdot\{(\rho\boldsymbol{v})'^{*}\}$$

$$-(\nabla'\cdot\rho'\boldsymbol{v}')^{*}]+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right)^{*}\Big\}\mathrm{d}V'\Big];$$

但

$$(\nabla'\cdot\rho'\boldsymbol{v}')^{*}+(\partial\rho'/\partial t)^{*}=0,$$

所以上式成为

$$\frac{1}{c}\int\Big\{-\nabla'\frac{1}{R}\cdot(\rho\boldsymbol{v})'^{*}-\frac{1}{R}\nabla'\cdot[(\rho\boldsymbol{v})'^{*}]\Big\}\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{c}\int-\nabla'\cdot\left[\frac{1}{R}(\rho\boldsymbol{v})'^{*}\right]\mathrm{d}V'=-\frac{1}{c}\int\frac{1}{R}(\rho\boldsymbol{v})'^{*}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

因 $\boldsymbol{S}$ 在无穷远，上式等于零. 因此，(15.23)，(15.24)即是(15.20)—(15.22)的共同解.

(15.24)的物理意义是极显然的. 它说出 φ 在(x,y,z)点在 t 时刻的值乃是在不同地点(x',y',z')的 $\rho'\mathrm{d}V'/R$ 的总和，但这个 ρ' 乃是在早一段时间的 ρ'，在另一个时刻的 ρ'. 这个时刻与 t 的相差乃是 R/c，$R=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{1}{2}}$. 与静电学的不同处即在这一点；在静电学中 φ 是各处的 $\rho'\mathrm{d}V'/R$ 的和，而 $\rho'\mathrm{d}V'/R$ 中的 ρ' 是同一时刻的 ρ'，而这里 ρ' 是早一段时间的 ρ'，所早的一段时间正是以速度 c 自(x',y',z')走至(x,y,z)所需的时间. 所以在 x,y,z 点在 t 时刻的 φ 可以认为是各处的 ρ' 在某些时刻以速度 c 传播出来，使得在 t 时刻到达(x,y,z)点的某种影响的总和. 因此，如此的 φ 称为“推迟势”(запаздывающий потенциал). 同样地(15.23)中的 $\boldsymbol{A}$ 称为推迟矢量势.

值得指出，如果将(15.14)中的 h_k 换为

$$(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kR/c})/R,$$

(15.14)以下的计算一样的有效，但+i 换为−i，结果为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{1}{c}\int\{\rho\,\boldsymbol{v}\,(x',y',z',t+R/c)/R\}\mathrm{d}V',$$

$$\varphi(x,y,z,t)=\int\{\rho(x',y',z',t+R/c)/R\}\mathrm{d}V'. \quad (15.25)$$

这样的 φ，在 x,y,z 点在时刻 t 的值，是由另外处的 ρ 在迟一些时间的值所决定. 这个解没有很多用途，因为我们通常所考虑的，乃是 ρ 等如何传播它的影响，而任何一点的 ρ 的影响要传播至另一点，需要(正的)时间，因此只能影响另外点上较迟时刻的 φ，而不能影响另外点上较早时刻的 φ. 由于这个理由，我们一方面认为(15.25)中的解是正确的，但另一方面觉得它没有很多物理上的应用，因而不去讨论它. 它通常称为“超前势”(опережающий потенциал)①. 在以后的理论中(第三部)，它依然是有用途的.

最后必须指出，(15.21)有无穷多的解. 只有在边界条件起始条件都决定后，解才成为惟一的. 如果不引入边界条件，起始条件，(15.24)右方加上下列方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=0 \quad (15.26)$$

的任何解也是(15.21)的解. 作为(15.26)的解的例，我们指出像下式中的平面波：

$$\varphi=\varphi_0\exp\{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3\pm k_0ct)\}, \quad (15.27)$$

$$k_0=(k_1^2+k_2^2+k_3^2)^{1/2}$$

即是(15.26)的一个解，它们的线性组合也是(15.26)的解. 事实上将(15.24)的右方加上(15.27)的一个适当的线性组合，可以获得

---

① 附带指出，我们也可以引入一个超前势，与(15.3)右方的推迟势相似. 这两个势 $f(x,y,z,t)$ 的值完全相等，如果面积分中的 f 的值适合(15.1)；参阅束星北，《中国物理学报》，**7**(1950)489.

(15.25)的右方.

我们这里的讨论的缺点是：我们没有将(15.24)或(15.25)的右方直接代入(15.21)的左方而证明它等于$-4\pi\rho$. 这才是(15.24)为解的真正证明. 这样的证明见 Тамм《电学原理》§95，在此不拟重复.《电学原理》中的证明是值得重视的，因为通常书上的证明（例如 Abraham 的《电磁学》），比这个不严格. 当我们援用(15.3)右方作解时，我们必须证明(15.3)右方第二项满足齐次的波动方程(15.26)，再必须证明当$f(x,y,z)$中的(x,y,z)趋近于面$\boldsymbol{S}_1$时，(15.3)右方趋近于(15.3)右方第二项中所用的f的已知值. 前一项工作是极易做的，因为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{1}{R}\chi(R-ct)$$
$$=\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\chi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{R}\chi=0,$$

而$(\nabla^2-c^{-2}\partial^2/\partial t^2)$作用于(15.3)中第二项上时，我们获得

$$\frac{1}{4\pi}\int\left\{\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{2}{R}(\nabla' f')^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\right)\right.$$
$$\left.-\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot\nabla'\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{1}{R}f'^*\right)\right\}.$$

在上式中，被$\nabla^2-c^{-2}(\partial^2/\partial t^2)$所作用的项均属于$R^{-1}\chi(R-ct)$的类型，因此上式等于零. 第二项工作是不易做的，在此不拟讨论. 为解决这一点起见，必须在(15.2)上作相应的讨论，而这个讨论需要电偶层及面电荷的电势的详细研究及相当多的“位势理论”的知识. 这些讨论超出本书范围.

还有一点，也是在此疏忽的. 即我们应该研究当$\boldsymbol{S}_1$不在无穷远使(15.23)，(15.24)含有面积分时，(15.22)是否也满足. 这个工作是不难的，但十分冗长；同时含有面积分的(15.23)，(15.24)不是我们所发生兴趣的问题. 因此这个讨论在此精简.

§16 一个任意运动着的电子的电磁场,推迟时刻

现在我们计算一个任意运动着的电子所产生的电磁场.在计算中我们或者令电子为一个几何点而计算在电子外的电磁场,或者令电子有一个大小而计算离电子极远(离电子中心的距离比电子大小大出很多)处的电磁场.这两种情形下的计算是一样的.

我们的计算及讨论分以下几部分.(1) $\boldsymbol{A}$ 同 φ 的计算;(2) $\boldsymbol{E}$ 同 $\boldsymbol{H}$ 的计算;(3) 与§13节的结果的比较;(4) $\boldsymbol{E}$ 同 $\boldsymbol{H}$ 的讨论.

(1) A 同 φ 的计算

讨论在一固定点 $P(x,y,z)$ 在一固定时刻 t 的 φ.求这个 φ 便是计算

$$\int \rho(x',y',z',t-R/c)\mathrm{d}V'/R,$$
$$R=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2}. \tag{16.1}$$

为简单起见,令电子为一个圆球,半径为 a,球中电荷密度是均匀的,为 ρ_0.先将坐标(x',y',z')换成以(x,y,z)为原点的球面坐标(R,θ',φ');如此(16.1)成为

$$\int \rho(R,\theta',\varphi',t-R/c)R^2\sin^2\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}R/R. \tag{16.2}$$

在图16中我们画出一个以(x,y,z)为中心,R_1 为半径的圆球 S_1.如果在 $t-R_1/c$ 时刻电子不同这个圆球相交,那么这样的 R 上的 $\rho(R,\theta',\varphi',t-R/c)$等于零,亦即它对于积分(16.2)没有贡献.不论在 $t-R_1/c$ 时刻电子是否同这个圆球相交,我们将该时刻的电子画出来.作一直线通过(x,y,z)点及电子中心,与 S_1 相交于 B_1.称该时电子中心所在处为 A_1,称 A_1B_1 的长为 l_1.由以上的作画方法,知有一个 R_1,即有一个 l_1 与之相当.如果 l_1 在$(-a,+a)$之间,那么圆球 S_1 与电子相交(这便是图中所画出的情形),反之

便不相交. 我们现在设法将积分中变数 R 改换为 l.

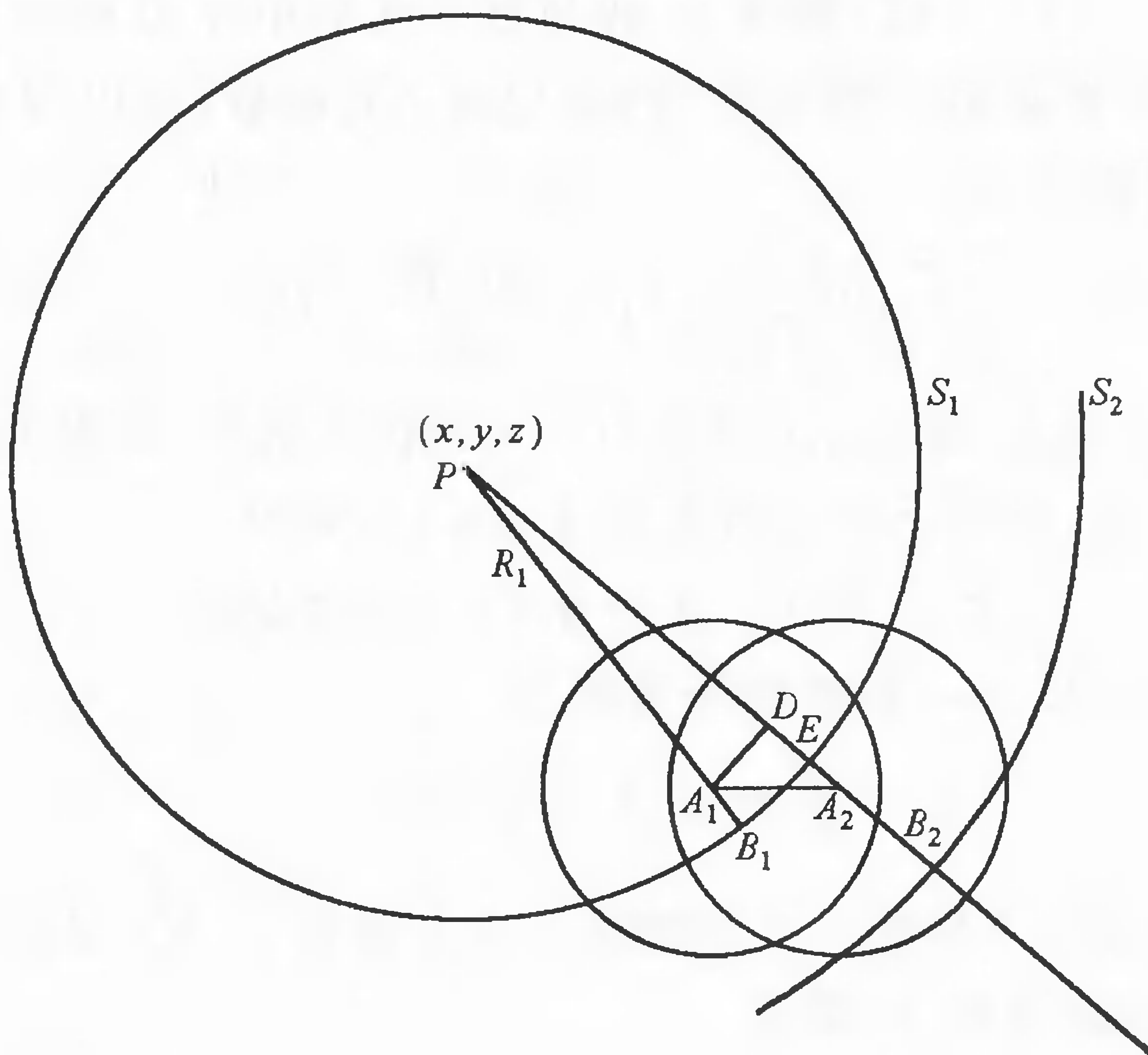


图 16

讨论 $R_1+\Delta R_1$ 的圆球 S_2. 求出相应的 A_2,B_2. A_2 为电子中心在 $t-(R_1+\Delta R_1)/c$ 时刻的位置，因此矢量 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 等于 $(\Delta R_1/c)\times(-\boldsymbol{v})$. 令 PA_2B_2 交圆球 S_1 于 E 点. 作 A_1D 线垂直于 PA_2B_2 线. 当 ΔR_1 趋近于零时，A_1,A_2 几乎相叠，因此 PA_1B_1 与 PA_2B_2 几乎平行. 现在

$$\begin{aligned} l_1+\Delta l_1 &= A_2B_2 = DB_2 - DA_2 \\ &= DE + EB_2 - DA_2 = A_1B_1 + EB_2 - DA_2 \\ &= l_1 + \Delta R_1 + (\Delta R_1/c)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}_1)/R_1, \end{aligned} \tag{16.3}$$

式中 $\boldsymbol{R}_1$ 代表自 P 至 A_1 的矢量. 因此

$$\Delta l_1 = \Delta R_1\{1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}_1)/cR_1\}. \tag{16.4}$$

将下注“1”取去，将 Δ 换为 d，得

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}R\{1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})/cR\}. \tag{16.5}$$

必须注意，上式中的 $\boldsymbol{v}$ 乃是电子在 $t-R/c$ 时刻的速度，乃是 R 的

函数.

当$-a<l<a$时,圆球S_1同与它相应的电子位置相交于一个截面.这个截面是R的函数,因此也是l的函数,可以写为$\mathrm{d}f_l$.因此(16.2)成为

$$\int_{-a}^{a}\mathrm{d}l\int_f \mathrm{d}f_l\rho_0\left\{1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}\right\}^{-1}R^{-1}. \tag{16.6}$$

式中$\rho_0\mathrm{d}f_l$乃是$\rho R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$对$\theta,\varphi$的积分结果.如果电子半径$a$是极小的话,而电子中心的坐标$(\xi,\eta,\zeta)$已知为

$$\xi=\xi(t),\quad \eta=\eta(t),\quad \zeta=\zeta(t), \tag{16.7}$$

那么(16.6)对f_l,l积分的结果成为

$$e\left\{R+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})\right\}^{-1}. \tag{16.8}$$

式中的R值由“半径为R的圆球S与在时刻$t-R/c$的电子相交”而决定,亦即是说,R满足

$$[\xi(t-R/c)-x]^2+[\eta(t-R/c)-y]^2+[\zeta(t-R/c)-z]^2=R^2, \tag{16.9}$$

而$\boldsymbol{v}$乃是电子在以这个R代入$t-R/c$后所获得的时刻的速度,而矢量$\boldsymbol{R}$乃是以这个R代入的

$$\{\xi(t-R/c)-x,\ \eta(t-R/c)-y,\ \zeta(t-R/c)-z\}.$$

更清楚地说,称满足(16.9)的R为R^*,称$t-R^*/c$为t^*,那么,$\boldsymbol{v}$即是

$$(\mathrm{d}\xi(t^*)/\mathrm{d}t^*,\ \mathrm{d}\eta(t^*)/\mathrm{d}t^*,\ \mathrm{d}\zeta(t^*)/\mathrm{d}t^*),$$

可以简写为

$$((\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t)^*,\ (\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}t)^*,\ (\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t)^*), \tag{16.10}$$

而$\boldsymbol{R}$乃是

$$\{\xi(t^*)-x,\ \eta(t^*)-y,\ \zeta(t^*)-z\}. \tag{16.11}$$

我们将用$\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{R}^*$分别代表以上两个矢量,使(16.8)成为

$$\varphi=e\left\{R^*+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*)\right\}^{-1}. \tag{16.12}$$

注意 R^* 为 t,x,y,z 的函数，为(16.9)所决定. t^* 的定义为

$$t^* = t - R^*/c, \tag{16.13}$$

因此也为 t,x,y,z 的函数.(这个函数，显然依赖(16.7)中的函数 $\xi(t),\eta(t),\zeta(t)$，因此 R^*,t^* 也是 $\xi(t),\eta(t),\zeta(t)$ 的泛函数.)似乎我们在理论中先决定了 R^*，再决定 t^*. 其实 t^* 可以直接自(16.9)及(16.13)求得. 自(16.9)及(16.13)中消去 R^*，得

$$[\xi(t^*) - x]^2 + [\eta(t^*) - y]^2 + [\zeta(t^*) - \zeta]^2 = c^2(t - t^*)^2, \tag{16.14}$$

这直接决定了 t^*. 但这个式子不能保证 $t^* < t$.

更好的法子是令 $\widetilde{R}(x,y,z,t)$ 定义为

$$\{[\xi(t) - x]^2 + [\eta(t) - y]^2 + [\zeta(t) - z]^2\}^{1/2},$$

那么(16.14)可以写为

$$[\widetilde{R}(x,y,z,t^*)]^2 = c^2(t - t^*)^2.$$

如果将此换为

$$t - t^* = \frac{1}{c}\widetilde{R}(x,y,z,t^*), \tag{16.15}$$

便获得了直接决定 t^* 而保证了 $t^* < t$ 的式子. 由(16.13),(16.15)得

$$R^* = \widetilde{R}(x,y,z,t^*) = \{[\xi(t^*) - x]^2 + [\eta(t^*) - y]^2 + [\zeta(t^*) - z]^2\}^{1/2}. \tag{16.16}$$

t^* 的物理意义是极明显的. 依照(16.15)，它是某一个比 t 早的时刻；比 t 早得适当多的一段时间，使得电子在 t^* 时刻所放射的电磁波以速率 c 传播便能在 t 时刻到达 P 点. 因此 t^* 称为推迟时刻.

同样地，如果讨论超前势，我们获得了

$$\varphi = e\left\{R^* - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*)\right\}^{-1}.$$

式中的 $\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{R}^*$ 依然是(16.10),(16.11)，但此处的(16.10)和(16.11)中的 t^* 适合

$$t - t^* = -\frac{1}{c}\widetilde{R}(x,y,z,t^*),$$

称为超前时刻.

以上是 φ 的计算. $\boldsymbol{A}$ 的计算显然是极相似的. 如果只讨论推迟势,那么

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}e\,\boldsymbol{v}^*\left\{R^* + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*)\right\}^{-1}, \tag{16.17}$$

与(16.12)只相差因子($\boldsymbol{v}^*/c$).

(2) $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的计算

这里的工作便是将(16.12),(16.17)中的 $\varphi,\boldsymbol{A}$ 代入

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - c^{-1}\partial\boldsymbol{A}/\partial t,\quad \boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{16.18}$$

而求出 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$,先将 $R^*+c^{-1}(\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{R}^*)$ 写为 s^*,使

$$\varphi = e/s^*,\quad \boldsymbol{A} = e\,\boldsymbol{v}^*/cs^*.$$

代入(16.18),得

$$\begin{cases}\boldsymbol{E} = \dfrac{e}{s^{*2}}\nabla_s^* + \dfrac{e\,\boldsymbol{v}^*}{c^2s^{*2}}\dfrac{\partial s^*}{\partial t} - \dfrac{e}{c^2s^*}\dfrac{\partial\boldsymbol{v}^*}{\partial t},\\[2ex] \boldsymbol{H} = -\dfrac{e}{cs^{*2}}[\nabla s^*\times\boldsymbol{v}^*] + \dfrac{e}{cs^*}\nabla\times\boldsymbol{v}^*.\end{cases} \tag{16.19}$$

在微分时,我们先注意 $R^*,\boldsymbol{R}^*,\boldsymbol{v}^*$ 等如何为 t^*,x,y,z 的函数(函数由(16.10),(16.11),(16.16)决定),再注意 t^* 如何为 t,x,y,z 的函数(函数由(16.15)决定);亦即先注意 s^* 如何为 t^*,x,y,z 的函数,再注意 t^* 如何为 t,x,y,z 的函数. 因此微分时得

$$\frac{\partial s^*}{\partial t} = \frac{\partial s^*}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t} = \left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R} + \frac{v^2}{c} + \frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^*\frac{\partial t^*}{\partial t}, \tag{16.20}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 代表 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$. 同样,得

$$\nabla s^* = \frac{\partial s^*}{\partial t^*}\nabla t^* + (\nabla s^*)_{t^*},$$

式中 $(\nabla s^*)_{t^*}$ 代表 t^* 不变时的 ∇s^*. 上式可写为

$$\nabla s^* = \left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R} + \frac{v^2}{c} + \frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^*\nabla t^* + \left\{-\frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right\}^*. \tag{16.21}$$

同样,又可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}^*}{\mathrm{d}t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}, \tag{16.22}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{v}^*)=\nabla t^*\times\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}^*}{\mathrm{d}t^*}. \tag{16.23}$$

由上可见欲求 $\partial s^*/\partial t,\nabla s^*,\partial\boldsymbol{v}^*/\partial t,\nabla\times\boldsymbol{v}^*$等,须求 Δt^*及$\partial t^*/\partial t$. 将(16.15)式两方对 t 微分,得

$$c\left(1-\frac{\partial t^*}{\partial t}\right)=\frac{\partial R^*}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}=\left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R}\right)^*\frac{\partial t^*}{\partial t},$$

由此得

$$\frac{\partial t^*}{\partial t}=\frac{1}{1+(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}/Rc)^*}=\left(\frac{R}{s}\right)^*. \tag{16.24}$$

将(16.15)两方对(x,y,z)作偏微分,得

$$-c\,\nabla t^*=\nabla(R^*)=-\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)^*+\left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R}\right)^*\nabla t^*,$$

由此得

$$\nabla t^*=\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*c\{1+(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})/Rc\}^*}=\left(\frac{\boldsymbol{R}}{cs}\right)^*. \tag{16.25}$$

以(16.24),(16.25)的结果代入(16.20)—(16.23),即获得了$\partial s^*/\partial t,\nabla s^*$等. 以这些值代入(16.19),即获得了 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$. 最后结果为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\left\{-\frac{e}{s^2}\frac{R\,\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}+\frac{eR}{s^3}\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{R}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\right)\right\}^*, \tag{16.26}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t)=\left\{+\frac{e}{s^2}\frac{\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}+\frac{e}{s^3}\left(\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\right)\right\}^*. \tag{16.27}$$

在(16.26),(16.27)两式中,$\boldsymbol{R}$ 乃是自(x,y,z)点至电子的矢量;在讨论电子所放射电磁场时,运用此 $\boldsymbol{R}$ 极不方便. 现令 $\boldsymbol{R}$ 代表自电子至场点的矢量,便得

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\left\{-\frac{e}{s^2}\frac{R\,\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}+\frac{eR}{s^3}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\right)\right\}^*,\tag{16.28}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t)=\left\{-\frac{e}{s^2}\frac{R\times\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}+\frac{e}{s^3}\left(-\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\right)\right\}^*,\tag{16.29}$$

s 成为

$$s=R-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})/c.\tag{16.30}$$

在此必须不要忘记(16.28),(16.29)右方的“ * ”号.它的意义是花括号中的 $\boldsymbol{R}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{R}}(x,y,z,t^*)$,$\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{v}(t^*)$,等等,而 t^* 乃是推迟时刻,为 t,x,y,z 的函数,为(16.15)所决定.

(3) 比较这一节的结果同§13中的结果

这便是比较对于匀速运动的电子的(16.12),(16.17)同(13.19)中的两个相应的式子.注意(13.18)中的 $\hat{x},y,z$ 乃是在 t 时刻电子与场点 P 的距离.令(x,y,z)为场点 P 的坐标,令 $\xi(t)$,$\eta(t)$,$\zeta(t)$为电子中心在时刻 t 的坐标,那么(13.18)中的 $\hat{x},y,z$ 应换为

$$x-\xi(t),\ y-\eta(t),\ z-\zeta(t),\tag{16.31}$$

可以用 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ 来代表.如果运动方向不是 x 轴而是一般的情形,$\hat{x}^2+(1-\beta^2)\times(\hat{y}^2+\hat{z}^2)$应该为

$$(1-\beta^2)\hat{R}^2+\beta^2(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{v})^2/v^2,\tag{16.32}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 是(16.31)的矢量.

(16.12)是

$$\varphi=e\{R^*-\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*/c\}^{-1}$$

(注意由于 $\boldsymbol{R}^*$ 改换为自电子中心至场点的矢量而产生的符号上的改变).不难证明:$\{R^*-\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*/c\}^{-1}$的值对于匀速运动的电子即是(16.32)的平方根.证明是极简单的.首先,$\boldsymbol{v}^*$ 即是不变的速度 $\boldsymbol{v}$;其次,

$$\boldsymbol{R}^* = \hat{\boldsymbol{R}} + (R^*/c)\boldsymbol{v}. \tag{16.33}$$

为避免不必要的数学上的麻烦起见，让电子沿 x 轴运动，将 $\boldsymbol{R}^*$ 写为 (x^*, y^*, z^*)，得

$$\begin{aligned}
R^* - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}^*/c) &= R^* - \beta x^* = \{(R^* - \beta x^*)^2\}^{1/2} \\
&= \{R^{*2} + \beta^2 x^{*2} - 2\beta R^* x^*\}^{1/2} \\
&= \{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} + \beta^2 x^{*2} - 2\beta R^* x^*\}^{1/2} \\
&= \{(1-\beta^2)(y^{*2} + z^{*2}) + \beta^2(x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}) \\
&\quad - 2\beta R^* x^* + x^{*2}\}^{1/2} \\
&= \{(1-\beta^2)(y^{*2} + z^{*2}) + (\beta R^* - x^*)^2\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{16.34}$$

但依照(16.33)，

$$y^* = \hat{y}, \quad z^* = \hat{z}, \quad x^* - \beta R^* = \hat{x},$$

因此(16.34)的右方成为

$$\{\hat{x}^2 + (1-\beta^2)(\hat{y}^2 + \hat{z}^2)\}^{1/2},$$

即是我们所欲证明的.

同样地我们可以证明对于匀速运动的(16.17)式与(13.19)中第二式是相同的. 由于 $\boldsymbol{A}, \varphi$ 的相同，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 自然是相同的. 我们可以直接由(16.28)，(16.29)式获得(13.20)，但这个计算过于冗长而没有很多意义，在此精简.

饶有兴趣的一点是：如果在本节的理论中我们用超前势，结果与 § 13 的结果依然完全相同. 依照超前势的讨论，

$$\varphi = e\{R^* + \boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*/c\}^{-1},$$

$$\boldsymbol{R}^* = \{x - \xi(t^*), y - \eta(t^*), z - \zeta(t^*)\},$$

而 t^* 满足

$$t^* - t = \{[x - \xi(t^*)]^2 + [y - \eta(t^*)]^2 + [z - \zeta(t^*)]^2\}^{1/2}/c.$$

因此

$$\boldsymbol{R}^* = \hat{\boldsymbol{R}} - (R^*/c)\boldsymbol{v};$$

因此

$$\begin{aligned}
R^* + (\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*/c) &= R^* + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}^*)/c = R^* + \beta x^* \\
&= \{(R^* + \beta x^*)^2\}^{1/2} = \{R^{*2} + \beta^2 x^{*2} + 2\beta R^* x^*\}^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} + \beta^2 x^{*2} + 2\beta R^* x^*\}^{1/2} \\
&= \{(1-\beta^2)(y^{*2} + z^{*2}) + \beta^2 (x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}) \\
&\quad + 2\beta R^* x^* + x^{*2}\}^{1/2} \\
&= \{(1-\beta^2)(y^{*2} + z^{*2}) + (\beta R^* + x^*)^2\}^{1/2},
\end{aligned}
\tag{16.35}
$$

但

$$
y^* = \hat{y}, \quad z^* = \hat{z}, \quad x^* + \beta R^* = \hat{x},
$$

因此(16.35)的右方成为

$$
\{(1-\beta^2)(\hat{y}^2 + \hat{z}^2) + \hat{x}^2\}^{1/2},
$$

证实了我们以上所指出的话.

在比较推迟势同超前势时,必须记住 $\boldsymbol{R}^*, t^*$ 对于这两个情形是不同的,而 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\boldsymbol{R}}$ 是一样的.

所以有以上的现象,可以这样理解:如果运动是永恒不变的,那么就放射而言(见§21),正不必辨清时间的方向,因此推迟势与超前势是可能相同的.

(4) $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 的讨论

自(16.28),(16.29)式我们看到在 (x,y,z) 点在 t 时刻的电磁场,只和与 (x,y,z,t) 相应的推迟时刻 t^* 的电子速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 及自该时电子所在处 $\xi(t^*)$ 至 (x,y,z) 点的矢量 $\boldsymbol{R}^*$ 有关,而同电子在其他时刻的行动没有关系. 显然地, $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 可以分别地分为两部分:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{E}'', \\
\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{H}'',
\end{cases}
\tag{16.36}
$$

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}' = \left\{ \dfrac{e}{s^3} \left(\boldsymbol{R} - \dfrac{R\boldsymbol{v}}{c} \right) \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2} \right) \right\}^*, \\
\boldsymbol{H}' = \left\{ \dfrac{e}{s^3} \left(- \dfrac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}}{c} \right) \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2} \right) \right\}^*,
\end{cases}
\tag{16.37}
$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}'' = \left\{ -\dfrac{e}{s^2}\dfrac{R\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2} + \dfrac{eR}{s^3}\dfrac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\right\}^*, \\ \boldsymbol{H}'' = \left\{ -\dfrac{e}{s^2}\dfrac{\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2} - \dfrac{e}{s^3}\dfrac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}}{c}\right)\right\}^*, \end{cases} \tag{16.38}$$

$\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{H}'$同 $\dot{\boldsymbol{v}}$无关；$\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$与 $\dot{\boldsymbol{v}}$成正比．换句话说，当我们令 $\dot{\boldsymbol{v}}^*=0$，$\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{H}'$不受影响，但 $\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$变为零．可以看出，如果将 $\boldsymbol{R}^*$,s^*看为同级量，则 $\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{H}'$与$(R^*)^{-2}$同级，但 $\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$与$(R^*)^{-1}$同级．因此在离电子近处，$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 的主要项是 $\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{H}'$，而在离电子远处，$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 的主要项是 $\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$．严格讲来，应说当 R^*取大值时，而不应笼统地说“离电子远处”，因为 R^* 取大值不一定意味着 $\hat{R}$ 也取大值．$\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{H}'$与寻常静电学中的 $\boldsymbol{E}$，稳定电流所产生的 $\boldsymbol{H}$ 是极相似的；如果令 $\boldsymbol{v}^*$取小值，$\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{H}'$即变为上述的 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$．$\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$的性质与 $\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{H}'$绝然不同，在此节前从未遇到过类似的场．由于在远处 $\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$成为主要项的事实，我们称它们为辐射场．

可以看出

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}' = (\boldsymbol{R}^*/R^*)\times\boldsymbol{E}', \\ \boldsymbol{H}' = (\boldsymbol{v}^*/c)\times\boldsymbol{E}'. \end{cases} \tag{16.39}$$

因此 $\boldsymbol{H}'$与 $\boldsymbol{E}'$垂直，又同 $\boldsymbol{R}^*$垂直，又同 $\boldsymbol{v}^*$垂直．又可以看出

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}'' = (\boldsymbol{R}^*/R^*)\times\boldsymbol{E}'', \\ \boldsymbol{E}'' = -(\boldsymbol{R}^*/R^*)\times\boldsymbol{H}'', \\ |\boldsymbol{H}''| = |\boldsymbol{E}''|. \end{cases} \tag{16.40}$$

这说明 $\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$的绝对值相等，而 $\boldsymbol{R}^*$,$\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$互相垂直，成为一个右手系统．又可以看到，$\nabla\times\boldsymbol{H}''$不等于零．当 $\boldsymbol{v}^*=\ddot{\boldsymbol{v}}^*=0$ 时，极易证明

$$\nabla\times\boldsymbol{H}'' = O(e\dot{v}^2/c^4R) \neq 0.$$

在 R^*取大值处，能量密度 u 等于

$$(8\pi)^{-1}(E''^2 + H''^2) = (4\pi)^{-1}E''^2. \tag{16.41}$$

能量流密度 $\boldsymbol{Y}$ 为

$$(c/4\pi)(\boldsymbol{E}''\times\boldsymbol{H}'') = (c/4\pi)(\boldsymbol{R}^*/R^*)(E'')^2, \tag{16.42}$$

方向为 $\boldsymbol{R}^*$，大小为 cu. $(E'')^2$ 的值为

$$\frac{e^2}{c^4}R^{*2}\left\{\frac{\dot{v}^2}{s^4}+\frac{2(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})}{cs^5}-\frac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})^2}{s^6}\right\}^*. \tag{16.43}$$

这个式子以后将用到.

§17 用同时刻的电子运动状态来表出它的电磁场

在这一节中，我们用在 t 时刻的电子运动速度 $\boldsymbol{v}$，加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 等来表出在 t 时刻在某点 $P(x,y,z)$ 的电磁场. 因此问题在乎求出上节中的 t^* 如何为 t,x,y,z 的函数，而将这个函数代入上节的公式. 我们首先证明一个公式，称为拉格朗日(Lagrange)公式. 这公式是

如果 t^* 为 t 及某一个数 α 的函数，满足下式

$$t^*=t+\alpha f(t^*), \tag{17.1}$$

那么当 t^* 的任何函数 $G(t^*)$ 在 $\alpha=0$ 点附近对 α 展开时，我们获得

$$G(t^*)=G(t)+\alpha f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{[f(t)]^2\frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t}\right\}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left\{[f(t)]^n\frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t}\right\}+\cdots \tag{17.2}$$

如果 $G(t^*)$ 即是 t^*，得

$$t^*=t+\alpha f(t)+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)]^2+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}[f(t)]^n+\cdots \tag{17.3}$$

把这个公式应用到我们的情形，只消令 $\alpha=-1/c$，$f(t^*)$ 为 $\widetilde{R}(x,y,z,t^*)$.

(17.2)的证明如下. 讨论 t^* 对 t 及 α 的偏微商. 将(17.1)对 t,α 分别地作偏微分，得

$$\frac{\partial t^*}{\partial t}\left\{1-\alpha\frac{\mathrm{d}f(t^*)}{\mathrm{d}t^*}\right\}=1,$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial \alpha}\left\{1-\alpha\frac{\mathrm{d}f(t^*)}{\mathrm{d}t^*}\right\}=f(t^*),$$

由此获得

$$\frac{\partial t^*}{\partial \alpha}=f(t^*)\frac{\partial t^*}{\partial t}. \tag{17.4}$$

由此可以证明

$$\frac{\partial G(t^*)}{\partial \alpha}=f(t^*)\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}, \tag{17.5}$$

因为

$$\frac{\partial G(t^*)}{\partial \alpha}=\frac{\mathrm{d}G(t^*)}{\mathrm{d}t^*}\frac{\partial t^*}{\partial \alpha}=\frac{\mathrm{d}G(t^*)}{\mathrm{d}t^*}f(t^*)\frac{\partial t^*}{\partial t}$$
$$=f(t^*)\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}.$$

现在让我们证明，对于任何 n，有

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}G(t^*)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\{f(t^*)\}^n\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}\right]. \tag{17.6}$$

证明用数学归纳法，即首先假定(17.6)对某一个 n 有效，再证明它对 $n+1$ 也有效，因(17.6)已证明对 $n=1$ 有效(见 17.5)，这样证明就完成. 如果(17.6)对 n 有效，那么，

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial \alpha^{n+1}}G(t^*)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}G(t^*)\right\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[[f(t^*)]^n\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}\right]\right\}$$
$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[[f(t^*)]^n\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}\right]\right\}$$
$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}[f(t^*)]^n\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}+[f(t^*)^n]\frac{\partial^2 G(t^*)}{\partial \alpha\partial t}\right\}. \tag{17.7}$$

利用(17.5)，将上式花括号中的第一项改为

$$f(t^*)\frac{\partial}{\partial t}[f(t^*)]^n\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}. \tag{17.8}$$

将第二项写为

$$[f(t^*)]^n \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G(t^*)}{\partial \alpha}\right),$$

再利用(17.5),将它改为

$$[f(t^*)]^n \frac{\partial}{\partial t}\left\{f(t^*)\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}\right\}. \tag{17.9}$$

(17.8)加上(17.9)可以合写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{[f(t^*)]^{n+1}\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}\right\}.$$

以此代替(17.7)右方的花括号中的两项,得

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial \alpha^{n+1}}G(t^*) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[[f(t^*)]^{n+1}\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}\right],$$

便获得了所需的证明.

现在

$$G(t^*) = G(\alpha = 0) + \frac{\alpha}{1}\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} + \cdots \tag{17.10}$$

当 $\alpha=0$ 时,

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}G(t^*)\right\}_{\alpha=0} = \left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[[f(t^*)]^n\frac{\partial G(t^*)}{\partial t}\right]\right\}_{\alpha=0}$$
$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[[f(t)]^n\frac{\partial G(t)}{\partial t}\right]. \tag{17.11}$$

以此值代入(17.10),便获得了所需证明的(17.2).

应用到我们的情形时,我们令

$$\alpha = -1/c, \tag{17.12}$$

$$f(t^*) = \{[x-\xi(t^*)]^2 + [y-\eta(t^*)]^2 + [z-\zeta(t^*)]\}^{1/2}. \tag{17.13}$$

因此 f 函数即是以前的 $\widetilde{R}$. 求 φ 时我们将 φ 写为

$$\varphi = \frac{e}{\widetilde{R}(t^*)}\frac{\partial t^*}{\partial t} \tag{17.14}$$

(见 16.24). 在此节中我们将 $\widetilde{R}$ 上的"～"符号拿走. 应用(17.2)

式，得

$$\frac{1}{R(t^*)}=\frac{1}{R}-\frac{1}{c}R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{c^2 2!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{R}+\frac{1}{cR}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{c^2 2!}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\cdots$$

$$+\frac{(-)^{n-1}}{c^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(R^{n-2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)+\cdots \qquad (17.15)$$

应用(17.3)，得

$$\frac{\partial t^*}{\partial t}=1-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{c^2 2!}\frac{\mathrm{d}^2(R^2)}{\mathrm{d}t^2}+\cdots+\frac{(-)^n}{c^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(R^n)+\cdots \qquad (17.16)$$

将(17.15)，(17.16)代入(17.14)，即可证明

$$\varphi=e\left\{\frac{1}{R}+0+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\left(\frac{R}{c}\right)^2\frac{1}{R}\right]+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\left(\frac{R}{c}\right)^n\frac{1}{R}\right]+\cdots\right\}$$

$$=\sum e\frac{(-)^n}{c^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[R(t)]^{n-1}. \qquad (17.17)$$

为证明这一点，只消将(17.15)，(17.16)右方的两个级数乘起来，将含有 $c^{-1}, c^{-2}, \cdots$ 等因数的项分别地加起来，便不难获得(17.17)。详细计算在此精简.

用同样的办法，获得

$$A=\sum e\frac{(-)^n}{c^{n+1}n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\{\boldsymbol{v}(t)[R(t)]^{n-1}\}. \qquad (17.18)$$

让我们写出开始的几项：

$$\varphi=\frac{e}{R}+\frac{e}{2c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}R-\frac{e}{6c^3}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}R^2+\cdots,$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{e\boldsymbol{v}}{cR}-\frac{e}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}+\frac{e}{2c^3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{v}R)$$

$$-\frac{e}{6c^4}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}(\boldsymbol{v}R^2)+\cdots$$

因 $\boldsymbol{R}(t)$ 乃是

$$\{x-\xi(t),\ y-\eta(t),\ z-\zeta(t)\},$$

不难算出

$$(\mathrm{d}R/\mathrm{d}t)=-(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})/R,$$

$$(\mathrm{d}^2R/\mathrm{d}t^2)=(v^2/R)-(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})/R-(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2/R^3,$$

$$\mathrm{d}R^2/\mathrm{d}t=-2(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}),$$

$$\mathrm{d}^2R^2/\mathrm{d}t^2=-2(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}-v^2),$$

$$\mathrm{d}^3R^2/\mathrm{d}t^3=-2(\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{v}}-3\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}),$$

$$\vdots$$

得

$$\varphi=\frac{e}{R}+\frac{e}{2c^2}\left\{\frac{v^2}{R}-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{R}-\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{R^3}\right\}+\frac{1}{3c^3}(\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{v}}-3\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})+O\left(\frac{1}{c^4}\right),\tag{17.19}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=&\frac{e\,\boldsymbol{v}}{cR}-\frac{e\,\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}+\frac{e}{2c^3}\left\{\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{R}-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{R}-\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{R^3}\right)\right.\\&\left.-2\dot{\boldsymbol{v}}\left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R}\right)+R\,\ddot{\boldsymbol{v}}\right\}-\frac{e}{6c^4}\{-2\boldsymbol{v}(\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{v}}-3\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\\&-6\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}-v^2)-6\ddot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})+R^2\dddot{\boldsymbol{v}}\}+O\left(\frac{1}{c^5}\right),\end{aligned}\tag{17.20}$$

$$\begin{aligned}-\nabla\varphi=&e\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{1}{2c^2}\left[\frac{v^2\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R}-\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2 3\boldsymbol{R}}{R^5}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{2(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{R^3}\right]-\frac{1}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}+\cdots\right\},\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{e}{c^2}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R}+\frac{\boldsymbol{v}}{R^2}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})}{R}\right]+\frac{e}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}+\cdots,$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}=&\frac{e\,\boldsymbol{v}}{c}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{e}{2c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R}+\frac{e}{2c^3}\boldsymbol{v}\\&\times\left\{v^2\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R}-\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{R^5}3\boldsymbol{R}+\frac{1}{R^3}2(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}\end{aligned}$$

$$-\frac{e\,\dot{\boldsymbol{v}}}{c^3}\times\left\{\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{\boldsymbol{v}}{R}\right\}+O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

因此

$$\boldsymbol{E}=e\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{e}{2c^2}\left\{-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R}-\frac{(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}\boldsymbol{R}+\frac{v^2}{R^3}\boldsymbol{R}-\frac{3(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}{R^5}\boldsymbol{R}\right\}$$
$$+\frac{2}{3}\frac{e}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}+O\left(\frac{1}{c^4}\right),\qquad(17.21)$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{e\,\boldsymbol{v}}{c}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{e}{2c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R}+\frac{e}{2c^3}\boldsymbol{v}$$
$$\times\left\{v^2\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R}-\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{R^5}3\boldsymbol{R}\right\}$$
$$-\frac{e\,\dot{\boldsymbol{v}}}{c^3}\times\frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})}{R^3}+O\left(\frac{1}{c^4}\right).\qquad(17.22)$$

必须指出,这个计算方法对于 R 取大值的情形是不适用的. 例如在(17.17)式右方的

$$e(-)^n/n!(\mathrm{d}^n/\mathrm{d}t^n)[(R/c)^n(1/R)]$$

项中,作出微商 n 次的结果可能产生一项

$$ec^{-n}(\mathrm{d}^{n-1}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t^{n-1})\times O(R^{n-2});$$

因此对于大值的 R,(17.17)可能收敛得极慢,使我们在计算中必须保持许多项.

这一点的物理理由是极简单的. 当 R 大时,我们可以想像 R^* 也大,亦即 t^*,t 相差很多. 那时要用 t 时刻的 $\boldsymbol{v}$,$\dot{\boldsymbol{v}}$,$\ddot{\boldsymbol{v}}$ …所构成的级数来描写 $\boldsymbol{v}(t^*)$,$\dot{\boldsymbol{v}}(t^*)$,自然需要用许多项.

(17.12),(17.13)有它们的用途,它们将在讨论电子自作用力(§27)时被用到.

§18　δ 函数的运用

在这一节中我们将利用 δ 函数去求出以上几节的结果. 在这里我们可以看到,运用 δ 函数,会带来极大的方便. 以下的讨论分

三部分：(1) 用 δ 函数去求基尔霍夫公式；(2) 用 δ 函数去求(16.12)，(16.17)；(3) 用 δ 函数去求(17.21)，(17.22)[①].

(1) 用 δ 函数去求基尔霍夫公式

这便是从(15.1)式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f(x,y,z,t)=-4\pi g(x,y,z,t) \tag{18.1}$$

求得(15.3)式

$$f(x,y,z,t)=\int_V (g'^*/R)\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left\{\frac{2}{R}(\nabla' f')^*-\nabla'\left(\frac{1}{R}f'^*\right)\right\}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}', \tag{18.2}$$

式中 $\boldsymbol{S}_1$ 代表一个包围 (x,y,z) 点的封闭曲面，体积分的积分区域即是 $\boldsymbol{S}_1$ 所包含的体积，等等. 我们现在自格林定理开始，

$$\int_{V'}(\phi'\nabla'^2\psi'-\psi'\nabla'^2\phi')\mathrm{d}V'=\int_{S'}(\phi'\nabla'\psi'-\psi'\nabla'\phi')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}', \tag{18.3}$$

式中积分点是 (x',y',z')，$\boldsymbol{S}'$ 是一个面，V' 为它所包含的体积. 像 §15 中的情形一样，我们令 $\boldsymbol{S}'$ 分两部分，一为包围 $P(x,y,z)$ 点的一个封闭曲面 $\boldsymbol{S}_1$，一为以 P 为中心以一个小数 ε 为半径的圆球 $\boldsymbol{S}_2$；$\boldsymbol{S}_2$ 完全在 $\boldsymbol{S}_1$ 所包含的体积中；那么 V' 便成为在 $\boldsymbol{S}_1$ 及 $\boldsymbol{S}_2$ 中的体积. 我们令 ϕ' 为 $f(x',y',z',t')$，ψ' 为 $\delta(t'+R/c-t)/R$；$R=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{1}{2}}$. 那么在(18.3)左方体积分的区域里

$$\nabla'^2\psi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\psi'=\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\psi')-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi'$$

① (1)和(3)两部分可参阅胡宁：《电动力学讲义》，1954，北京大学印行.

$$= \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\delta}{R} = 0. \qquad (18.4)$$

以这样的 ψ'，ϕ' 代入(18.3)后，再将两方对 t' 积分，极限为 $-\infty$ 及 $+\infty$，那么左方成为

$$\int \mathrm{d}t' \int \left\{ f(x',y',z',t')\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\frac{1}{R}\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\right]\right.$$

$$- \frac{1}{R}\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}f'(x',y',z',t')\right.$$

$$\left.\left. - 4\pi g(x',y',z',t')\right]\right\}\mathrm{d}V'.$$

将上式中第一项作分部积分二次，化它为

$$\int \mathrm{d}t' \int \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2}f(x',y',z',t')\right]\frac{1}{c^2}\frac{1}{R}\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\mathrm{d}V',$$

便可与第二项相消，最后得

$$\int \left\{\frac{1}{R}g\left(x',y',z',t' - \frac{R}{c}\right)\right\}\mathrm{d}V'. \qquad (18.5)$$

至于右方，我们获得

$$\int \mathrm{d}t' \int_{S_1+S_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \cdot \left\{ f(x',y',z',t')\left[\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\left(\frac{-\boldsymbol{R}}{R^3}\right)\right.\right.$$

$$\left. + \delta'\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\frac{1}{R}\frac{\boldsymbol{R}}{cR}\right]$$

$$\left. - \frac{1}{R}\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\nabla' f(x',y',z',t')\right\}, \qquad (18.6)$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 代表自 (x,y,z) 至 (x',y',z') 的矢量. 对于 $\boldsymbol{S}_1$ 的一项，对 t' 的积分结果为

$$\int_{S_1}\left\{-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}f'^* - \frac{\boldsymbol{R}}{cR^2}\frac{\partial f'^*}{\partial t} - \frac{1}{R}(\nabla' f')^*\right\}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'. \qquad (18.7)$$

对于 $\boldsymbol{S}_2$ 的一项，那么我们有

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int \mathrm{d}t'\int_{S_2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot f(x',y',z',t')\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)\\ \qquad = 4\pi f(x,y,z,t)+O(\varepsilon),\\ \displaystyle\int \mathrm{d}t'\int_{S_2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot f(x',y',z',t')\delta'\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)\frac{\boldsymbol{R}}{cR^2}=O(\varepsilon),\\ \displaystyle\int \mathrm{d}t'\int_{S_2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot \frac{1}{R}\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)\nabla' f(x',y',z',t')=O(\varepsilon).\end{array}\right. \tag{18.8}$$

因此,以如此的 ϕ',ψ' 代入(18.3),而使双方对 t' 积分,再令 ε 趋近于零,便获得了(15.19)式,获得了所需的(18.2)式,亦即获得了所需的基尔霍夫公式.

必须指出:虽然我们用了一个性质极奇怪的函数 δ,结果还是正确的. 换句话说,运用了奇怪的 δ 函数并没有影响计算的正确性. 在一般情形下都有类似的情形,即我们可以援用 δ 函数,简化计算,而不损害计算的正确性. 对此点,有时可以简单地证明. 在我们这里的特殊情形下,我们正可以不令 ϕ' 为 $\delta(t'+R/c-t)/R$,而令

$$\phi'=\frac{1}{R}\frac{\sin N(t'+R/c-t)}{\pi(t'+R/c-t)},$$

代入(18.3)式,重复以前的计算,最后令 N 趋近于无穷大. 这样便可以获得(15.19)式. 这便是 $\delta(x)$ 所以可以在此援用的具体说明.

(2) 用 δ 函数的性质来求出(16.12),(16.17) 两式

因为我们现在令 $\boldsymbol{R}^*$ 等为自电子至场点的矢量,φ 同 $\boldsymbol{A}$ 分别为

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi = e\{R^*-(\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*)/c\}^{-1},\\ \boldsymbol{A}=e(\boldsymbol{v}^*/c)\{R^*-(\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*)/c\}^{-1}.\end{array}\right. \tag{18.9}$$

我们在此只讨论第一个式子,因为第二个式子的讨论是极相似的,不必重复.

依照基尔霍夫公式,

$$\varphi=\int(\rho'^*/R)\mathrm{d}V', \tag{18.10}$$

式中体积分区域乃是全部的空间. 利用 δ 函数,可将上式写为

$$\varphi(x,y,z,t)=\iint\rho(x',y',z',t')\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)\frac{1}{R}\mathrm{d}V'\mathrm{d}t'.$$

对于点电荷,

$$\rho(x,y,z,t)=e\delta(x-\xi(t))\delta(y-\eta(t))\delta(z-\zeta(t)). \tag{18.11}$$

代入上式得

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z,t)=&\iint e\delta(x'-\xi(t'))\delta(y'-\eta(t'))\delta(z'-\zeta(t'))\\&\times\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)\frac{1}{R}\mathrm{d}V'\mathrm{d}t'.\end{aligned} \tag{18.12}$$

我们可以先对 V' 积分,也可以先对 t' 积分. 如果我们先对 V' 积分,得

$$\varphi(x,y,z,t)=\int e\frac{1}{\widetilde{R}(t')}\delta\left(t'+\frac{\widetilde{R}(t')}{c}-t\right)\mathrm{d}t'. \tag{18.13}$$

$\widetilde{\boldsymbol{R}}(t')$ 矢量的意义已在前面解释过了,它乃是

$$\{x-\xi(t'),\ y-\eta(t'),\ z-\zeta(t')\}.$$

在(18.13)中对 t' 作积分时,我们引入以下的变数变换($t'\to t''$):

$$t''=t'+c^{-1}\widetilde{R}(t')-t. \tag{18.14}$$

(在计算(18.13)右方的积分时,必须记住 x,y,z,t 不变,它们的地位相当于参数.)由(18.14)式,得

$$\mathrm{d}t''=\mathrm{d}t'\left\{1+\frac{1}{c}-\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\widetilde{\boldsymbol{R}})(t')}{\widetilde{R}(t')}\right\}. \tag{18.15}$$

(18.13)右方成为

$$\begin{aligned}&\int e\frac{1}{\widetilde{R}(t')}\left\{1-\frac{1}{c}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\widetilde{\boldsymbol{R}})(t')}{\widetilde{R}(t')}\right\}^{-1}\delta(t'')\mathrm{d}t''\\&=e\left\{\widetilde{R}(t')-\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\widetilde{\boldsymbol{R}})(t')\right\}^{-1}_{t''=0}.\end{aligned} \tag{18.16}$$

但 $t''=0$ 时,t' 即成为 t^*(见(16.15)),因此上式成为

$$e\left\{R^{*}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}^{*}\cdot\boldsymbol{R}^{*}\right\}^{-1},\tag{18.17}$$

亦即是我们所需的结果.

(18.12)也可以先对 t' 积分,得

$$\int e\delta\left[x'-\xi\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\delta\left[y'-\eta\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]$$
$$\times\delta\left[z'-\zeta\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\frac{1}{R}\mathrm{d}V'.\tag{18.18}$$

为求这个积分起见,让我们引入新变数 x'',y'',z'' 去代替 x',y',z'.(x,y,z,t 在此求积分过程中的地位是参数,是不变的.)

$$\begin{cases}x''=x'-\xi\left(t-\dfrac{R}{c}\right),\\ y''=y'-\eta\left(t-\dfrac{R}{c}\right),\\ z''=z'-\zeta\left(t-\dfrac{R}{c}\right).\end{cases}\tag{18.19}$$

由此可以获得

$$x'=\psi_1(x'',y'',z''),\ y'=\psi_2(x'',y'',z''),\ z'=\psi_3(x'',y'',z'').$$

(18.18)的形式是

$$\int f(x',y',z')\delta(x'')\delta(y'')\delta(z'')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z',$$

可以换为

$$\int f(\psi_1(x'',y'',z''),\psi_2,\psi_3)\delta(x'')\delta(y'')\delta(z'')$$
$$\times\left|\frac{D(x'',y'',z'')}{D(x',y',z')}\right|^{-1}\mathrm{d}x''\mathrm{d}y''\mathrm{d}z'',$$

式中 $D(x'',y'',z'')/D(x',y',z')$ 的意义为

$$\begin{vmatrix}(\partial x''/\partial x')(\partial x''/\partial y')(\partial x''/\partial z')\\ (\partial y''/\partial x')(\partial y''/\partial y')(\partial y''/\partial z')\\ (\partial z''/\partial x')(\partial z''/\partial y')(\partial z''/\partial z')\end{vmatrix}.$$

利用 δ 函数的性质,便可算出积分为

$$f(\psi_1(0,0,0),\psi_2,\psi_3)\left|\frac{D(x'',y'',z'')}{D(x',y',z')}\right|_{x''=y''=z''=0}. \quad (18.20)$$

在我们的情形下，不难证明当 $x''=y''=z''=0$，x',y',z' 即是 $\xi(t^*)$，$\eta(t^*)$，$\zeta(t^*)$. 因为当 $x''=y''=z''=0$，x',y',z' 满足

$$\begin{cases}x'-\xi[t-\{(x'-x)^2+\cdots\}^{1/2}/c]=0,\\ y'-\eta[t-\{(x'-x)^2+\cdots\}^{1/2}/c]=0,\\ z'-\zeta[t-\{(x'-x)^2+\cdots\}^{1/2}/c]=0.\end{cases} \quad (18.21)$$

因此称如此 x',y',z' 所构成的

$$t-\{(x'-x)^2+\cdots\}^{1/2}/c$$

为 T，那么利用上式及(18.21)，得

$$x'=\xi(T),\ y'=\eta(T),\ z'=\zeta(T),$$

$$\begin{aligned}T&=t-\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{1/2}\\ &=t-\{[\xi(T)-x]^2+[\eta(T)-y]^2+[\zeta(T)-z]^2\}^{1/2}/c,\end{aligned} \quad (18.22)$$

因此 T 与 t^* 完全相同. 因此 $x'=\xi(T)=\xi(t^*)$，$y'=\eta(t^*)$，$z'=\zeta(t^*)$. 同时我们证明了与这样的 x',y',z' 相当的 $t-R/c$ 即是 t^*.

由以上可见，在我们的情形下的 $f(\psi_1(0,0,0),\cdots)$ 即是

$$\{[\xi(t^*)-x]^2+[\eta(t^*)-y]^2+\cdots\}^{-1/2}=R^{*-1}.$$

计算 $D(x'',y'',z'')/D(x',y',z')$，得

$$\begin{vmatrix}1-v_x\frac{1}{c}\frac{x-x'}{R} & -v_x\frac{1}{c}\frac{y-y'}{R} & -v_x\frac{z-z'}{R}\\ -v_y\frac{1}{c}\frac{x-x'}{R} & 1-v_y\frac{1}{c}\frac{y-y'}{R} & -v_y\frac{z-z'}{R}\\ -v_z\frac{1}{c}\frac{x-x'}{R} & -v_z\frac{1}{c}\frac{y-y'}{R} & -v_z\frac{z-z'}{R}\end{vmatrix}$$

$$=1-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})/cR. \quad (18.23)$$

以 $x''=y''=z''=0$ 代入，即是以 t^* 代替 $t-R/c$，以 $\xi(t^*)$，…代替 x',y',z'，得

$$1-\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*/cR^*.$$

由此可见(18.18)的积分结果依然为

$$e\{R^* - \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*/c\}^{-1}. \tag{18.24}$$

对于 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的(16.28),(16.29)式,我们也可以用同样方法求出,即先将(18.12)等式对 t,x,y,z 微商,最后作出对 $\mathrm{d}V'$ 及 t' 的积分.这个计算过于复杂,并且没有很多意义,在此精简.用 δ 函数去求出(18.9)是值得指出的,因为这避免了§16(1)求 $\boldsymbol{A},\varphi$ 的方法,而那里求 $\boldsymbol{A},\varphi$ 的方法是比较难以理解的.

(3) 利用 δ 函数的性质,导出(17.8),(17.9)

这个计算特别值得指出,因为这样的计算比§17中相应的计算简单得多.

将 $\varphi,\boldsymbol{A}$ 分别写为

$$\varphi(x,y,z,t) = \int \rho(x',y',z',t')\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\frac{1}{R}\mathrm{d}V', \tag{18.25}$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t) = \int \rho\,\boldsymbol{v}\,(x',y',z',t')\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\frac{1}{cR}\mathrm{d}V', \tag{18.26}$$

将 $\delta[t'+(R/c)-t]$ 展为 (R/c) 的级数,得

$$\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) = \delta(t'-t) + \frac{R}{c}\delta'(t'-t) + \frac{1}{2!}\left(\frac{R}{c}\right)^2\delta''(t'-t) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{R}{c}\right)^n\delta^{(n)}(t'-t) + \cdots; \tag{18.27}$$

式中 $\delta',\delta'',\cdots,\delta^{(n)}\cdots$ 分别地代表 δ 函数对于它的变数的一次,二次,…,n 次的微商.由于

$$\begin{cases} \int f(t')\delta'(t'-t)\mathrm{d}t' = -\,\mathrm{d}f/\mathrm{d}t, \\ \vdots \\ \int f(t')\delta^{(n)}(t'-t)\mathrm{d}t' = (-)^n\mathrm{d}^n f/\mathrm{d}t^n, \\ \vdots \end{cases} \tag{18.28}$$

(注意上式右方的“$-$”号),我们便获得了

$$\varphi(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!c^n}\int\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\rho(x',y',z',t')\right]R^{n-1}\mathrm{d}V'.$$

这可以写为

$$\varphi(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!c^n}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\int\rho(x',y',z',t)R^{n-1}\mathrm{d}V'\right\}.$$

同样地,得

$$\boldsymbol{A}(x,y,x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!c^n}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\int\frac{\rho\boldsymbol{v}(x',y',z',t)}{c}R^{n-1}\mathrm{d}V'\right\}.$$

对于一个点电荷,ρ 成为 δ 函数(见 18.11),对 $\mathrm{d}V'$ 的积分便很容易地做出,得

$$\begin{cases}\varphi=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!c^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\{e[R(t)]^{n-1}\},\\ \boldsymbol{A}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!c^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left\{\frac{e}{c}\boldsymbol{v}(t)R(t)^{n-1}\right\};\end{cases}\tag{18.29}$$

式中 $\boldsymbol{R}(t)$ 代表矢量

$$(x-\xi(t),y-\eta(t),z-\zeta(t)).$$

即是 $\widetilde{\boldsymbol{R}}(t)$,亦即是以前的 $\hat{\boldsymbol{R}}(t)$. (18.29)式即是以前的(17.17)及(17.18)两式.

值得指出,像 δ 函数如此奇怪的函数,用泰勒级数展开,依然会带来正确的结果(7.17),(7.18). 用了它后计算又如此地简单,使我们不得不重视它,并且尽量地利用它.

在相对论(见本书第二部)的理论中,δ 函数的援用可以使公式的形式整齐化,并且明显地显出“相对论性”. 这些我们将在本书第二部、第三部中讨论.

§19　伊万宁柯同沙科洛夫的方法

在这一节我们简单地介绍伊万宁柯(Иваненко)同沙科洛夫(Соколов)在他们的《经典场论》书中对于波动方程的讨论.

讨论

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\varphi=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{19.1}$$

的解；式中 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 代表

$$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \tag{19.2}$$

而(19.2)中的 x', y', z' 及(19.1)中的 t' 乃是已知量. 称(19.1)的一个解为 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$. 那么在讨论

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\varphi=-4\pi\rho(x,y,z,t) \tag{19.3}$$

的解时，我们将上式右方写为

$$-4\pi\int\rho(x',y',z',t')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t',$$

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z')$$

便可看出

$$4\pi\int\rho(x',y',z',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t' \tag{19.4}$$

是(19.3)的一个解. 事实上，称 $(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)+(\partial^2/\partial z^2)-c^{-2}(\partial^2/\partial t^2)$ 为$\Box$(达朗贝尔算子)，

$$\begin{aligned}
&\Box\left\{4\pi\int\rho(x',y',z',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'\right\}\\
&\quad=4\pi\int\rho(x',y',z',t')\Box G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'\\
&\quad=-4\pi\int\rho(x',y',z',t')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'\\
&\quad=-4\pi\rho(x,y,z,t).
\end{aligned}$$

因此问题在于求 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$.

将 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 同 $\delta(t-t')$ 分别地写为

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^3}\int\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ (\mathrm{d}\boldsymbol{k}=\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z),\\
&\frac{c}{2\pi}\int\mathrm{e}^{-ik_0c(t-t')}\mathrm{d}k_0,
\end{aligned}\right. \tag{19.5}$$

那么不难证明

$$G_1=\frac{c}{16\pi^4}\int\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0 \tag{19.6}$$

是(19.1)的一个解. 在讨论这一点时，必须指出我们对于(19.6)的积分作以

下的了解：即(19.6)中的积分，首先对 k_0 做出，做出这积分时，k_0 的区域了解为下面三个线段：

$$(-\infty,-|k|-\varepsilon),(-|k|+\varepsilon,|k|-\varepsilon),(|k|+\varepsilon,\infty)$$

的总和，而式中的 ε 是一个任意小数，可以使它趋近于零. 换句话说，我们必须避免(19.6)积分项中的奇异点.(这样避免奇异点后的积分值将称为积分主值). 另一方面，对于 $\boldsymbol{k}$ 的值毫无限制，k_x,k_y,k_z 各个的值自 $-\infty$ 变至 $+\infty$.

称如此决定的 $k_0,\boldsymbol{k}$ 的积分区域为 D'，而称 $\boldsymbol{k},k_0$ 分别自 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 的区域为 D. 可以看出

$$\begin{aligned}\Box G_1 &= \Box \frac{c}{16\pi^4}\int_{D'} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2}d\boldsymbol{k}dk_0\\ &= \frac{c}{16\pi^4}\int_{D'}\Box e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2}d\boldsymbol{k}dk_0\\ &= \frac{-c}{16\pi^4}\int_{D'} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}d\boldsymbol{k}dk_0\\ &= \frac{-c}{16\pi^4}\int_{D} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}d\boldsymbol{k}dk_0+O(\varepsilon)\\ &= -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')+O(\varepsilon),\end{aligned}$$

因此(19.6)确是(19.1)的一个解. 此外，可以证明不论下式中的 f 是什么函数，下式

$$\frac{c}{16\pi^4}\int_D e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}f(\boldsymbol{k},k_0)\delta(k^2-k_0^2)d\boldsymbol{k}dk_0 \tag{19.7}$$

满足齐次的波动方程. 理由是极简单的：$\Box$作用于上式成为一个新积分，积分项中有一个因子

$$(k^2-k_0^2)\delta(k^2-k_0^2),$$

而这个因子等于零(见(2.19)式). 因此不论下式中最末一项的符号是"+"或"-"，下式

$$G_1+\frac{c}{16\pi^4}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\left\{\pm i\pi\frac{k_0}{|k_0|}\delta(k_0^2-k^2)\right\}d\boldsymbol{k}dk_0 \tag{19.8}$$

是(19.1)的一个解. 我们可以证明这样的 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$，将使得(19.4)成为推迟势及超前势；(19.8)中的"+"号相当于"推迟势"的情形，"-"号相当于"超前势"的情形. 今先证明这一点.

让我们在(19.8)中取+号，讨论对 k_0 取积分的问题. 利用(2.20)将 $(k_0/|k_0|)\times\delta(k_0^2-k^2)$ 写为

$$\frac{k_0}{|k_0|}\frac{1}{2|k_0|}\{\delta(k_0-|\boldsymbol{k}|)+\delta(k_0+|\boldsymbol{k}|)\}$$

$$=\frac{1}{2k_0}\{\delta(k_0-|\boldsymbol{k}|)+\delta(k_0+|\boldsymbol{k}|)\};\qquad(19.9)$$

因此(19.8)第二项对 k_0 的积分成为

$$\left\{\frac{c}{16\pi^4}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')}\frac{\pi\mathrm{i}\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{2k_0}\right\}_{k_0=|\boldsymbol{k}|}+\{\cdots\}_{k_0=-|\boldsymbol{k}|}.\qquad(19.10)$$

如果让 k_0 可以取复数的值而讨论在 k_0 的复数平面内的围线积分，那么上式可以认为是

$$\frac{c}{16\pi^4}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}.\qquad(19.11)$$

在图 17 中沿曲线 Γ_1,Γ_2 的围线积分①.(Γ_1,Γ_2 用虚线画出，乃是半径为 ε 的半圆 BCD,EFG.)因为 G_1 是(19.11)对于图中线段 AB,DE,GH 的围线积分的总和，因此当我们在(19.8)取"+"符号时，(19.8)成为围线积分

$$\int_{ABCDEFGH}\frac{c}{16\pi^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0.\qquad(19.12)$$

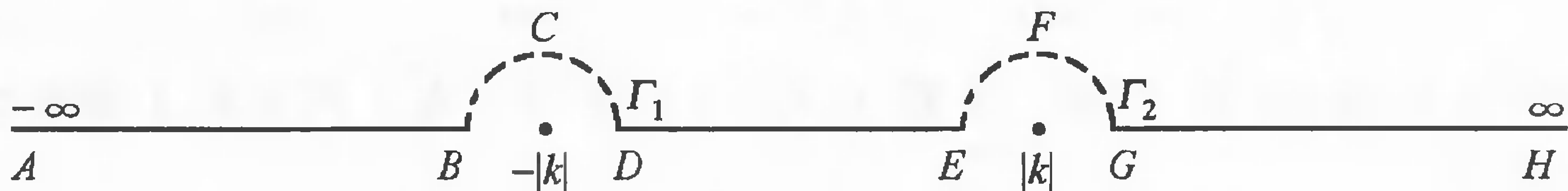


图　17

当 $t-t'<0$ 时，考虑在 k_0 上半平面中一个以原点为中心，以一个极大数 N 为半径的半圆 Γ^+，考虑这半圆 Γ^+ 与 $ABCDEFGH$ 所构成的封闭曲线.运用留数理论，知道(19.11)沿此封闭曲线的线积分等于零(曲线内不包含奇异点).沿 Γ^+ 的线积分又等于零，因此(19.12)等于零.当 $t-t'>0$ 时，考虑在 k_0 下半平面中的以原点为中心，以一个极大数 N 为半径的半圆 Γ^-，考虑它与 $ABCDEFGH$ 所构成的封闭曲线.应用留数理论，即能证明(19.12)等于

$$\left\{\frac{c}{16\pi^4}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')}\left(-\frac{1}{2k_0}\right)(-2\pi\mathrm{i})\mathrm{d}\boldsymbol{k}\right\}_{k_0=+|\boldsymbol{k}|}+\{\cdots\}_{k_0=-|\boldsymbol{k}|}$$

---

① 为证明(19.11)沿 Γ_2 的积分等于(19.10)第一项起见，可以令 k_0 为 $|\boldsymbol{k}|+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，将对 k_0 的积分变为对 φ 的积分.(19.11)沿 Γ_2 的线积分成为

$$\int_\pi^0\{F(\boldsymbol{k},|\boldsymbol{k}|)+O(\varepsilon,\varphi)\}\mathrm{d}\varphi$$

的形式.令 $\varepsilon\to0$，即成为(19.10)的第一项.

$$= \frac{c}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\sin\{|\boldsymbol{k}|c(t-t')\}|\boldsymbol{k}|^{-1}d\boldsymbol{k}. \tag{19.13}$$

为计算这个积分起见，令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$,$T=t-t'$,$k$ 代表$|\boldsymbol{k}|$,得

$$\frac{c}{8\pi^3}\int e^{ikR\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\sin(kcT)kdk. \tag{19.14}$$

对 θ,φ 积分，得

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{8\pi^3}\frac{4\pi}{R}\int_0^\infty \sin(kR)\sin(kcT)\,dk\\
&= \frac{c}{2\pi^2 R}\int_0^\infty \frac{1}{2}[\cos k(R-cT)-\cos k(R+cT)]dk\\
&= \frac{c}{4\pi^2 R}\left\{\frac{\sin k(R-cT)}{R-cT}-\frac{\sin k(R+cT)}{R+cT}\right\}_{k\to\infty}.
\end{aligned} \tag{19.15}$$

但

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin kx}{x}=\pi\delta(x)$$

(见§2),因此(19.15)为

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{4\pi R}\{\delta(R-cT)-\delta(R+cT)\}\\
&= \frac{1}{4\pi R}\left\{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{19.16}$$

但此处的 T,R 均大于零，所以可以抛去第二项，得

$$(4\pi R)^{-1}\delta(T-R/c). \tag{19.17}$$

注意在 $t-t'<0$ 时，(19.12)等于零，而上式也等于零，因此不论 t' 是否比 t 大或比 t 小，(19.12)的值等于(19.17).

如果在(19.8)中我们取了“－”号，(19.10)上便应加上一个“－”号；(19.8)便成为

$$\int\frac{c}{16\pi^4}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2}d\boldsymbol{k}$$

对于图 18 中的曲线 $A'B'C'D'E'F'G'H'$ 的围线积分. 应用留数理论，我们可以证明当 $t-t'>0$ 时，这个线积分的值等于零；当 $t-t'<0$ 时，线积分等于将(19.13)中的 $-2\pi i$ 换为 $+2\pi i$ 后的(19.13),亦即

$$-\frac{1}{4\pi R}\left\{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)\right\}.$$

由于在此 T,$-R$ 均小于零，上式第一项可以忽略，得

$$(4\pi R)^{-1}\delta(T + R/c). \tag{19.18}$$

注意在 $t-t'>0$ 时,取"－"号的(19.8)等于零,而上式也等于零,因此在任何情形下,取"－"号的(19.8)等于(19.18)式.



图 18

用(19.17),(19.18)分别作为 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$,(19.4)分别地成为

$$\begin{cases}\displaystyle\int\rho(x',y',z',t')\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)\frac{1}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t',\\[2ex] \displaystyle\int\rho(x',y',z',t')\delta\left(t-t'+\frac{R}{c}\right)\frac{1}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t';\end{cases} \tag{19.19}$$

因此分别地成为推迟势和超前势.如果我们选择 G 为 G_1 加上某一个 $f(k,k_0)$所构成的(19.7),那么 φ 成为推迟势加上齐次波动方程的一个解,也成为超前势加上齐次波动方程的一个解.

由以上计算,不难证明

$$G_1=\frac{1}{8\pi R}\left\{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)+\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)\right\}.$$

事实上,G_1 乃是(19.17),(19.18)的平均.同时我们也不难证明

$$\frac{c}{16\pi^4}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')}\pi\mathrm{i}\,\frac{k_0}{|k_0|}\delta(k_0^2-k^2)\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0$$
$$=\frac{1}{8\pi R}\left\{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)\right\}.$$

事实上,上式左方仅是(19.17),(19.18)的相差的二分之一.

在量子电动力学中有两个量,在计算中极为重要.它们是

$$\Delta=\frac{1}{8\pi^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}\frac{\sin ckT}{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{19.20}$$

$$\Delta_1=\frac{1}{8\pi^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}\frac{\cos ckT}{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{19.21}$$

Δ 即是 c^{-1}乘上(19.14)式,因此

$$\Delta=\frac{1}{4\pi cR}\left\{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)\right\}.$$

Δ_1 可以直接计算(先对 $\boldsymbol{k}$ 的角作积分,再对 k 积分),得

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\pi^2(R^2 - c^2T^2)}.$$

第二个函数在本书中没有很多用处，第一个函数将在第三部中用到.

§20　第19节的方法对于介子场的应用

如人所共知，在真空中的介子场的各个分量（不论介子场是标量场或矢量场或其他场）总是下式的解：

$$(\Box - \lambda^2)\varphi = 0; \tag{20.1}$$

式中 λ^2 乃是一个常数，等于

$$(mc/\hbar)^2,$$

式中 m 是介子的质量，$\hbar$是$(2\pi)^{-1}$乘上普朗克常数 h. 我们现在讨论

$$(\Box - \lambda^2)\varphi = -4\pi\rho \tag{20.2}$$

的求解；所用的方法完全与上节相似.

令

$$(\Box - \lambda^2)\varphi = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(t - t') \tag{20.3}$$

的解为 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t, t')$，那么(20.2)的解为

$$4\pi\int\rho(x', y', z', t')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t, t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'.$$

将(20.3)中的 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，$\delta(t-t')$分别写为(19.5)中的两个式子，那么(20.3)的一个解为

$$G_1 = \frac{c}{16\pi^4}\int_{D'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')}\frac{1}{k^2 - k_0^2 + \lambda^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0. \tag{20.4}$$

正同以前一样，符号 D' 的意义为：在(20.4)中我们先对 k_0 积分，而将 k_0 的积分区域认为是三个线段

$$(-\infty, -\sqrt{k^2+\lambda^2}-\varepsilon),\ (-\sqrt{k^2+\lambda^2}+\varepsilon, +\sqrt{k^2+\lambda^2}-\varepsilon),$$

$$(+\sqrt{k^2+\lambda^2}+\varepsilon, \infty)$$

的总和. 不论下式中 $f(\boldsymbol{k}, k_0)$是什么函数，

$$\frac{c}{16\pi^4}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')} f(\boldsymbol{k}, k_0)\delta(k^2 - k_0^2 + \lambda^2)\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0$$

是(20.1)的一个解，因此

$$G_1 + \frac{c}{16\pi^4}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\left\{\pm\, i\pi\frac{k_0}{|k_0|}\delta(k^2-k_0^2+\lambda^2)\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0 \quad (20.5)$$

是(20.3)的解.

讨论(20.5)中"±"选择为"+"的情形. 将$(k_0/|k_0|)\delta(k^2-k_0^2+\lambda^2)$写为类似(19.9)的两项,(20.5)的第二项成为

$$\left\{\frac{c}{16\pi^4}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\frac{\pi i\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{2k_0}\right\}_{k_0=+\sqrt{k^2+\lambda^2}}+\{\cdots\}_{k_0=-\sqrt{k^2+\lambda^2}}.$$

如果让我们讨论在 k_0 的复数平面中的围线积分,那么上式可以认为是

$$\frac{c}{16\pi^4}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2+\lambda^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

在图 19 中沿 Γ_1, Γ_2 的线积分. 同以前的讨论的不同处,只是半圆 Γ_1, Γ_2 的中心自 $+|k|, -|k|$ 改为 $+\sqrt{k^2+\lambda^2}, -\sqrt{k^2+\lambda^2}$. 同以前一样,取"+"号的(20.5)成为

$$\int_{ABCDEFGH}\frac{c}{16\pi^4}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ik_0c(t-t')}\frac{1}{k^2-k_0^2+\lambda^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0. \quad (20.6)$$



图 19

当 $t-t'<0$ 时,我们用留数理论,证明上式等于零. 当 $t-t'>0$ 时,我们用留数理论,证明上式等于

$$\frac{c}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\sin\{(k^2+\lambda^2)^{1/2}c(t-t')\}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\frac{1}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}}. \quad (20.7)$$

这一段讨论与以前完全相同,不必重复. 为计算(20.7)起见,我们依旧令 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 为 $\boldsymbol{R}$, $t-t'$ 为 T, $|\boldsymbol{k}|$ 为 k. 可以看出,(20.7)对角取积分后成为

$$\frac{c}{2\pi^2R}\int_0^\infty \sin kR\,\sin\{(k^2+\lambda^2)^{1/2}cT\}\frac{k\mathrm{d}k}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}}$$

$$=-\frac{c}{2\pi^2R}\frac{\partial}{\partial R}\int_0^\infty\frac{\cos kR}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}}\sin\{(k^2+\lambda^2)^{1/2}cT\}\mathrm{d}k. \quad (20.8)$$

称上式中被微商项为 f,而让我们求 f 的值. 在这里我们必须分清 $R>cT$ 及 $R<cT$ 的情形. 当 $R<cT$ 时,我们令

$$\begin{cases} cT=\alpha_1\cosh\varphi_0, \quad R=\alpha_1\sinh\varphi_0, \\ \alpha_1=\{c^2T^2-R^2\}^{1/2}, \end{cases} \quad (20.9)$$

又令

$$k = \lambda \sinh \varphi, \tag{20.10}$$

则

$$f = \int_0^\infty \frac{\cos kR}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}} \sin[(k^2+\lambda^2)^{1/2} cT] \mathrm{d}k$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \{\sin[(k^2+\lambda^2)^{1/2} cT + kR]$$

$$+ \sin[(k^2+\lambda^2)^{1/2} cT - kR]\} \frac{\mathrm{d}k}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \{\sin[\lambda \cosh \varphi\, \alpha_1 \cosh \varphi_0 + \lambda \sinh \varphi\, \alpha_1 \sinh \varphi_0]$$

$$+ \sin[\lambda \cosh \varphi\, \alpha_1 \cosh \varphi_0 - \lambda \sinh \varphi\, \alpha_1 \sinh \varphi_0]\} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \{\sin[\lambda \alpha_1 \cosh(\varphi + \varphi_0)] + \sin[\lambda \alpha_1 \cosh(\varphi - \varphi_0)]\} \mathrm{d}\varphi.$$

右方第一项、第二项可以分别地换为

$$\int_{\varphi_0}^\infty \frac{1}{2} \sin(\lambda \alpha_1 \cosh \varphi) \mathrm{d}\varphi, \quad \int_{-\varphi_0}^\infty \frac{1}{2} \sin(\lambda \alpha_1 \cosh \varphi) \mathrm{d}\varphi,$$

因此它们的和是

$$\int_0^\infty \sin(\lambda \alpha_1 \cosh \varphi) \mathrm{d}\varphi.$$

但这即是

$$\frac{1}{2} \pi \mathrm{J}_0(\lambda \alpha_1) = \frac{1}{2} \pi \mathrm{J}_0\{\lambda (c^2T^2 - R^2)^{1/2}\}; \tag{20.11}$$

式中 J_0 为零级的贝塞尔函数①.

因

$$\frac{\partial \mathrm{J}_0[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]}{\partial R} = -\frac{\lambda R}{(c^2T^2-R^2)^{1/2}} \frac{\partial \mathrm{J}_0[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]}{\partial[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]}$$

$$= -\frac{\lambda R}{(c^2T^2-R^2)^{1/2}} \mathrm{J}_1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}],$$

因此，在 $R<cT$ 时，(20.8)成为

$$-\frac{c\lambda}{4\pi(c^2T^2-R^2)^{1/2}} \mathrm{J}_1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]. \tag{20.12}$$

① 参阅 G.N. Watson：A Treatise on the Theory of Bessel Functions，§6.21，公式(12)，p.180.

当 $R>cT$ 时，我们令

$$\begin{cases} cT = \alpha_2 \sinh\varphi_0, \quad R = \alpha_2 \cosh\varphi_0, \\ \alpha_2 = \{R^2 - c^2T^2\}^{1/2}. \end{cases} \tag{20.13}$$

则 f 等于

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\{\sin[\lambda\cosh\varphi\,\alpha_2\sinh\varphi_0 + \lambda\sinh\varphi\,\alpha_2\cosh\varphi_0]$$

$$+ \sin[\lambda\cosh\varphi\,\alpha_2\sinh\varphi_0 - \lambda\sinh\varphi\,\alpha_2\cosh\varphi_0]\}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}\{\sin[\lambda\alpha_2\sinh(\varphi_0+\varphi)] + \sin[\lambda\alpha_2\sinh(\varphi_0-\varphi)]\}\mathrm{d}\varphi.$$

右方第一项、第二项可以分别地换为

$$\int_{\varphi_0}^\infty \frac{1}{2}\sin(\lambda\alpha_2\sinh\varphi)\mathrm{d}\varphi, \quad \int_{-\varphi_0}^\infty -\frac{1}{2}\sin(\lambda\alpha_2\sinh\varphi)\mathrm{d}\varphi; \tag{20.14}$$

但

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{1}{2}\sin(\lambda\alpha_2\sinh\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0,$$

因此(20.14)的两项的和等于零. 因此在 $R>cT$ 时，$f=0$，(20.8)也等于零.

必须注意(20.8)在 $R\approx cT$ 附近的情形. 因为 $\mathrm{J}_0(0)$不等于零，f 在此点附近是不连续的，可以写为

$$\frac{1}{2}\pi\mathrm{J}_0(0)\left[\frac{1}{2} + \varepsilon(cT-R)\right]. \tag{20.15}$$

因此(20.8)在此点附近成为

$$-\frac{c}{2\pi^2R}\frac{1}{2}\pi\mathrm{J}_0(0)\delta(cT-R)(-1).$$

因 $\mathrm{J}_0(0)=1$，上式成为

$$\frac{1}{4\pi R}\delta\left(T-\frac{R}{c}\right).$$

由于以上的讨论，证明了取"+"号的(20.5)等于

$$\frac{1}{4\pi R}\delta\left(T-\frac{R}{c}\right) - \begin{Bmatrix} \dfrac{c\lambda}{4\pi(c^2T^2-R^2)^{1/2}}\mathrm{J}_1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}] & (T>R/c), \\ 0 & (T<R/c). \end{Bmatrix} \tag{20.16}$$

上式不但在 $T<0$ 时正确，在 $T>0, T>R/c$ 或 $T<R/c$ 各情形下也都正确.

用同样的方法，可以证明取"−"号的(20.5)等于

$$\frac{1}{4\pi R}\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)-\left\{\begin{array}{c}0\\ \dfrac{c\lambda}{4\pi(c^2T^2-R^2)^{1/2}}\mathrm{J}_1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]\end{array}\right\}\begin{array}{l}(T>-R/c),\\ (T<-R/c).\end{array}$$

(20.17)

用(20.16)作为 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$,立即获得

$$\varphi(x,y,z,t)=\int\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{c}\right)\Big/R\mathrm{d}V'$$
$$-\iint_{t'=-\infty}^{t-R/c}\frac{c\lambda\rho(\boldsymbol{r}',t')}{[c^2(t-t')^2-R^2]^{1/2}}$$
$$\times \mathrm{J}_1[\lambda\{c^2(t-t')^2-R^2\}^{1/2}]\mathrm{d}V'\mathrm{d}t'. \qquad (20.18)$$

引入新变数 b 去代替 t',定义为

$$b=[c^2(t-t')^2-R^2]^{1/2},$$

得

$$t'=t-\frac{1}{c}(b^2+R^2)^{1/2},$$

$$\varphi(x,y,z,t)=\int\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{c}\right)\Big/R\mathrm{d}V'$$
$$-\iint_{b=0}^{\infty}\lambda\rho\left[\boldsymbol{r}',t-\frac{1}{c}(b^2+R^2)^{1/2}\right]\frac{\mathrm{J}_1(\lambda b)\mathrm{d}b}{(b^2+R^2)^{1/2}}\mathrm{d}V'.$$

(20.19)

利用 $\mathrm{J}_1(z)=-\mathrm{dJ}_0(z)/\mathrm{d}z$,上式也可写为

$$\varphi(x,y,z,t)=-\iint\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial b}\left\{\rho\left[\boldsymbol{r}',t-\frac{1}{c}(b^2+R^2)^{1/2}\right]\frac{1}{(b^2+R^2)^{1/2}}\right\}$$
$$\times \mathrm{J}_0(\lambda b)\mathrm{d}b\mathrm{d}V'.$$

(20.19)右方的第一项的意义已在前几节中说明,右方第二项的存在的意义为:φ 在 (x,y,z) 点在 t 时刻的值,除了右方第一项外,还有一部分,可以认为是在各处的、在早一些时刻的 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 的影响;早出的时间比 R/c 大,比以速度 c 自 $\boldsymbol{r}'$ 传播至 $\boldsymbol{r}$ 所需的时间大;因此这一部分可以认为是各处的 ρ 以小于 c 的速度传播至 (x,y,z) 的某些影响.

在介子的量子场论中,有两个重要的量,可以在此附带地提起.它们是

$$D(\boldsymbol{R},T)=\frac{1}{8\pi^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}\frac{\sin[cT(k^2+\lambda^2)^{1/2}]}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \qquad (20.20)$$

$$D_1(\boldsymbol{R},T)=\frac{1}{8\pi^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}\frac{\cos[cT(k^2+\lambda^2)^{1/2}]}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}. \qquad (20.21)$$

它们都是齐次波动方程(20.1)的解.(它们对于洛伦兹变换而言是不变量,因此在场论中显得重要.)可以证明

$$D=\frac{1}{8\pi^4}\frac{T}{|T|}\int_{D'}\frac{e^{ik\cdot R-ick_0T}}{k^2-k_0^2+\lambda^2}dkdk_0, \tag{20.22}$$

$$D_1=\frac{1}{8\pi^3}\int e^{ik\cdot R-ick_0T}\delta(k^2-k_0^2+\lambda^2)dkdk_0; \tag{20.23}$$

证明的方法与§19的讨论极相似.例如证明(20.22)与(20.20)的右方相等,我们分别讨论 $T>0$,$T<0$ 的情形.当 $T>0$,应用留数理论,可以证明(20.22)右方等于

$$-\frac{1}{8\pi^4}\int dk\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}dk_0\frac{e^{ik\cdot R-ick_0T}}{k^2-k_0^2+\lambda^2},$$

式中 Γ_1,Γ_2 为图20中的两个半圆.令半圆的半径趋近于零,作出积分①,便不难证实上式即是(20.20)的右方.

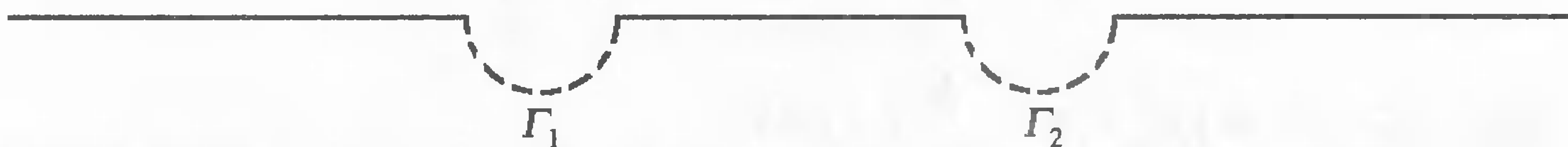


图　20

自(20.22)式,不难证明 G_1 同 D 有以下的关系:

$$G_1=\frac{c}{2}\frac{T}{|T|}D. \tag{20.24}$$

另一方面,(20.5)中取"+"号后的第二项(即是(20.5)下的一个式子),不难证明等于

$$\frac{1}{2}cD. \tag{20.25}$$

因此(20.5)式即是

$$\frac{c}{2}\left(\frac{T}{|T|}\pm 1\right)D. \tag{20.26}$$

取"+"号时成为 $cD\left\{\epsilon(T)+\frac{1}{2}\right\}$,取"−"号成为 $cD\left\{\epsilon(T)-\frac{1}{2}\right\}$.

cD 即是(20.7)式.在以上我们已作出了(20.22)在 $T>0$ 时的计算.$T<0$ 的(20.22)的计算是同样的.我们获得

---

① 参阅胡宁:《电动力学讲义》,1954,北京大学印行.

$$D=\frac{1}{4\pi Rc}\left\{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)\right\}$$

$$-\begin{cases}\dfrac{\lambda}{4\pi(c^2T^2-R^2)^{1/2}}\mathrm{J}_1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}], & T>R/c,\\ 0, & R/c>T>-R/c,\\ -\dfrac{\lambda}{4\pi(c^2T^2-R^2)^{1/2}}\mathrm{J}_1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}], & T<-R/c.\end{cases} \qquad (20.27)$$

D_1 的计算如下：

$$D_1=-\frac{1}{2\pi^2R}\frac{\partial f_1}{\partial R},$$

$$f_1=\int_0^\infty\frac{\cos kR}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}}\cos[cT(k^2+\lambda^2)^{1/2}]\mathrm{d}k. \qquad (20.28)$$

当 $c|T|>R$ 时，我们令

$$cT=\alpha_1\cosh\varphi_0,\quad R=\alpha_1\sinh\varphi_0,$$

$$\alpha_1=(c^2T^2-R^2)^{1/2}.$$

当 $c|T|<R$ 时，我们令

$$cT=\alpha_2\sinh\varphi_0,\quad R=\alpha_2\cosh\varphi_0,$$

$$\alpha_2=(R^2-c^2T^2)^{1/2}.$$

再令 $k=\lambda\sin\varphi$，便获得

$$\begin{cases}f_1=\displaystyle\int_0^\infty\cos(\lambda\alpha_1\cosh\varphi)\mathrm{d}\varphi, & c|T|>R,\\ f_1=\displaystyle\int_0^\infty\cos(\lambda\alpha_2\sinh\varphi)\mathrm{d}\varphi. & c|T|<R.\end{cases} \qquad (20.29)$$

但

$$\int\cos(\lambda\alpha_1\cosh\varphi)\mathrm{d}\varphi=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Y}_0(\lambda\alpha_1)^{①},$$

$$\int_0^\infty\cos(\lambda\alpha_2\sinh\varphi)\mathrm{d}\varphi=\int_0^\infty\frac{\cos(\lambda\alpha_2u)\mathrm{d}u}{(u^2+1)^{1/2}}$$

$$=\mathrm{K}_0(\lambda\alpha_2)^{②}$$

$$=\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}\mathrm{H}_0^1(\mathrm{i}\lambda\alpha_2)^{③}$$

$$=\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}\mathrm{H}_0^1[\mathrm{i}\lambda(R^2-c^2T^2)^{1/2}]; \qquad (20.30)$$

---

① 参阅 Watson：Theory of Bessel Functions，§6.21，公式(13)，p. 180.

② 参阅上书，§6.16，公式(1)，p. 172.

③ 参阅上书，§3.7，公式(8)，p. 78.

对 R 微分，乘以 $-(2\pi^2R)^{-1}$，即获得了 D_1.

这样计算的结果为

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{\lambda}{4\pi(c^2T^2 - R^2)^{1/2}} \mathrm{Y}_1[\lambda(c^2T^2 - R^2)^{1/2}], & |cT| > R, \\ D_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi^2(R^2 - c^2T^2)^{1/2}} \mathrm{K}_1[\lambda(R^2 - c^2T^2)^{1/2}], & |cT| < R. \end{cases} \tag{20.31}$$

有些作者曾通过(20.22)，(20.23)，用另一种方法计算了 D 及 D_1. 现在将这个计算写下，以便读者参考.

由于

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k^2 - k_0^2 + \lambda^2} = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\displaystyle\int \dfrac{\alpha}{|\alpha|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(k^2 - k_0^2 + \lambda^2)} \mathrm{d}\alpha, \\ \delta(k^2 - k_0^2 + \lambda^2) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(k^2 - k_0^2 + \lambda^2)} \mathrm{d}\alpha, \end{cases} \tag{20.32}$$

因此

$$D = \frac{1}{8\pi^4} \frac{T}{|T|} \int \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \frac{\alpha}{|\alpha|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R} - \mathrm{i}ck_0T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(k^2 - k_0^2 + \lambda^2)} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{k} \mathrm{d}k_0,$$

$$D_1 = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R} - \mathrm{i}ck_0T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(k^2 - k_0^2 + \lambda^2)} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{k} \mathrm{d}k_0.$$

先计算 D. 利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}|\alpha|\lambda^2} \mathrm{d}x = \frac{1 \pm \mathrm{i}}{2^{1/2}} \left(\frac{\pi}{|\alpha|}\right)^{1/2}, \tag{20.33}$$

作出 D 对于 $k_0, \boldsymbol{k}$ 的积分，获得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8\pi^4} \frac{T}{|T|} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \frac{\alpha}{|\alpha|} \exp\left\{\mathrm{i} \frac{1}{4\alpha}(c^2T^2 - R^2) + \mathrm{i}\alpha\lambda^2\right\} \mathrm{d}\alpha \frac{\mathrm{i}}{\alpha|\alpha|} \pi^2 \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{T}{|T|} \int_0^{\infty} \cos\left\{\frac{1}{4\alpha}(c^2T^2 - R^2) + \alpha\lambda^2\right\} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{20.34}$$

同样地，可以算出

$$D_1 = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \sin\left\{\frac{1}{4\alpha}(c^2T^2 - R^2) + \alpha\lambda^2\right\} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha^2}. \tag{20.35}$$

为计算(20.34)，(20.35)中的积分起见，我们利用汉开尔(Hankel)函数的性质

$$\mathrm{H}_1^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{0\mathrm{i}}^{\infty\mathrm{i}} u^{-2}\exp\left[\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)\right]\mathrm{d}u ①.$$

因此,在下面的积分

$$\int_0^\infty \exp\left\{\mathrm{i}\left[\frac{1}{4\alpha}(c^2T^2-R^2)+\alpha\lambda^2\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha^2} \qquad (20.36)$$

中,当 $c^2T^2-R^2>0$ 时,我们令

$$\alpha=-\frac{(c^2T^2-R^2)^{1/2}}{2\lambda}u\mathrm{i},$$

积分便成为

$$\int_{0\mathrm{i}}^{\infty\mathrm{i}}\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right\}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\frac{2\lambda\mathrm{i}}{(c^2T^2-R^2)^{1/2}}$$

$$=-\frac{2\lambda\pi}{(c^2T^2-R^2)^{1/2}}\mathrm{H}_1^1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]. \qquad (20.37)$$

利用解析函数的解析延拓的办法,可以证明(20.36)对于任何 cT,R 都等于上式右方.将(20.36)的实数和虚数部分,分别地等于(20.37)右方的实数和虚数部分,便求出了(20.34),(20.35)中的两个积分.用这样的方法,求得

$$D=\frac{1}{8\pi^2}\frac{T}{|T|}\mathrm{Re}\left\{-\frac{2\lambda\pi}{(c^2T^2-R^2)^{1/2}}\mathrm{H}_1^1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]\right\},$$

$$D_1=-\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Im}\left\{-\frac{2\lambda\pi}{(c^2T^2-R^2)^{1/2}}\mathrm{H}_1^1[\lambda(c^2T^2-R^2)^{1/2}]\right\};$$

式中 Re,Im 代表实数和虚数部分.利用 H 与 J,Y 的关系及 H 与 K 的关系:

$$\mathrm{H}_\nu^1(z)=\mathrm{J}_\nu(z)+\mathrm{i}\mathrm{Y}_\nu(z),\quad \mathrm{K}_\nu(z)=\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}e^{\frac{1}{2}\nu\pi\mathrm{i}}\mathrm{H}_\nu^1(\mathrm{i}z),$$

便可以求得(20.27),(20.31)二式.

§21　电子的放射

在§16中,我们已经看到了电子放射出来电磁场,这些电磁场以速率 c 向外传播.由于电磁场带有动量和能量的事实,电子在放射电磁场时也必然放射动量和能量.在这一节中我们计算电子每秒动量、能量的放射.首先计算能量的放射.

① 参阅 Watson 书,§6.21,公式(6),p.179.

(1) 设电子在 t' 时刻在某点 A

讨论在 t 时刻所观察到的由电子自时刻 t' 至时刻 t 所射出的电磁场. 这些电磁场完完全全地在以 A 为中心,以 $c(t-t')$ 为半径的一个圆球内(图 21 中的 S_1). 当 t' 增至 $t'+\Delta t'$ 时,电子的位置便自 A 移至 B,$AB=\boldsymbol{v}(t')\Delta t'$. 讨论在 t 时刻所观察到由电子自时刻 $t'+\Delta t$ 至时刻 t 所射出的电磁场. 这些电磁场完完全全地在以 B 为中心,以 $c(t-t'-\Delta t')$ 为半径的一个圆球内(图 21 中的 S_2). 因此由在时刻 t 的观察者看来,电子在 t' 及 $t'+\Delta t'$ 间所放射的电磁场,正是在圆球 S_1 及 S_2 之间的电磁场;换句话说,在 Δt 中所放射的能量及动量,正是 S_1 及 S_2 之间的电磁场的动量及能量.

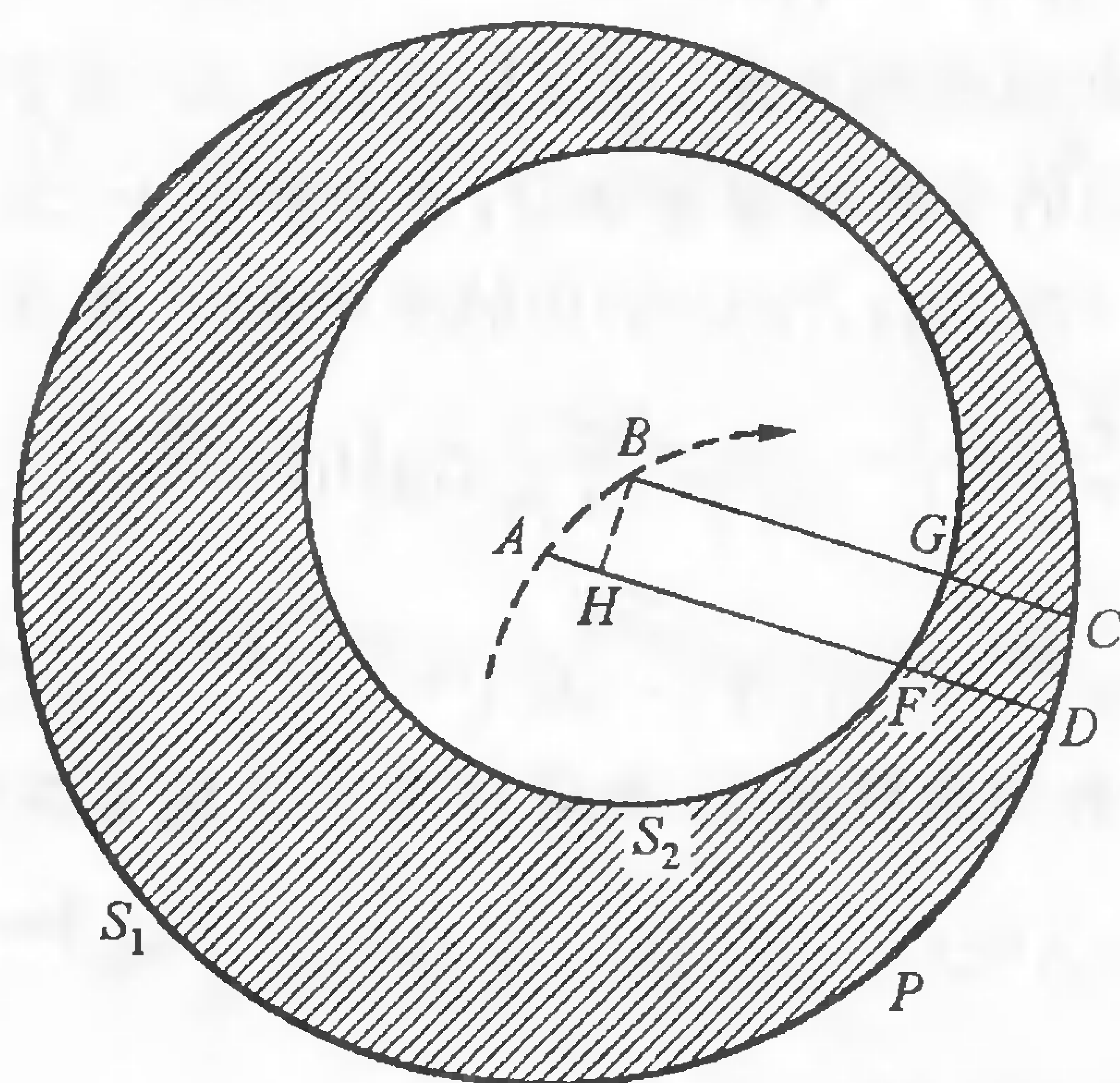


图 21

令 t 取一个很大的值,使得在 S_1,S_2 之间的 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 几乎完全是 $\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$(见§16). 作任意直线 AD,通过 A 点,又作 BC 线,与之平行. 称 AD 与 S_2 的交点为 F,与 S_1 的交点为 D;称 BC 与 S_2 的交点为 G,与 S_1 的交点为 C. 作 BH 线垂直于 AD. 立即看出

$$FD = AD - AF = AD - (AH + HF) = AD - AH - BG.$$

因为

$$AD = c(t-t'),\quad AH = \{\boldsymbol{v}(t')\cdot\boldsymbol{R}/R\}\Delta t',$$

$$BG = c(t-t'-\Delta t'),$$

所以

$$FD = \{1 - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R})/cR\}c\Delta t'. \tag{21.1}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 代表矢量 AD. 称 S_1(或 S_2)面中面积元为 $\mathrm{d}f$,那么根据以上的讨论,在 $\Delta t'$ 中电子所放射的能量为

$$\int \frac{1}{8\pi}(E''^2 + H''^2)\mathrm{d}fc\left\{1 - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}}{cR}\right\}\Delta t'. \tag{21.2}$$

除以 $\Delta t'$,即获得电子在一秒中的放射能量.

E''^2 及 H''^2 的值为(16.43),即

$$\frac{e^2}{c^4}R^{*2}\left\{\frac{\dot{v}^2}{s^4} + \frac{2(\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})}{cs^5} - \frac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})^2}{s^6}\right\}^*, \tag{21.3}$$

式中含有“ * ”符号. 在我们目前的问题中,我们考虑在 t 时刻在 S_1 上各点的 $\boldsymbol{E}'',\boldsymbol{H}''$. 对于它们来说,$t^*$ 都是 t', $\boldsymbol{R}^*$ 即是自 A 至 S_1 上各不同场点的矢量. 因此在(21.3)中我们可以去掉“ * ”的字样.

引入球面坐标(R,θ,φ),以 $\boldsymbol{v}(t')$的方向为极轴方向,得

$$\mathrm{d}f = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$s = (1 - \beta\cos\theta)R, \quad \beta = v(t')/c.$$

(21.2)除以 $\Delta t'$ 后成为

$$\int \frac{e^2R^3}{4\pi c^3}\left\{\frac{\dot{v}^2}{s^3} + \frac{2(\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})}{cs^4} - \frac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})^2}{s^5}\right\}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{21.4}$$

因

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^3} = \frac{2}{(1-\beta^2)^2},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4} = \frac{8\beta}{3(1-\beta^2)^3},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} = \frac{10\beta^2+2}{3(1-\beta^2)^4},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} = \frac{4}{3(1-\beta^2)^3},$$

因此将 $\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}$ 写为

$$R(\cos\theta\,\dot{v}_x+\sin\theta\cos\varphi\,\dot{v}_y+\sin\theta\sin\varphi\,\dot{v}_z),$$

代入(21.4),作出积分,便获得了

$$\begin{aligned}&\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\dot{v}_x^2\left[\frac{2}{(1-\beta^2)^2}+\frac{16\beta^2}{3(1-\beta^2)^3}-(1-\beta^2)\frac{10\beta^2+2}{3(1-\beta^2)^4}\right]2\pi\right.\\&\qquad\left.+(\dot{v}_y^2+\dot{v}_z^2)\left[\frac{2}{(1-\beta^2)^2}2\pi-(1-\beta^2)\frac{4}{3(1-\beta^2)^3}\pi\right]\right\}\\&=\frac{2e^2}{3c^3}\left[\dot{v}_x^2\frac{1}{(1-\beta^2)^3}+(\dot{v}_y^2+\dot{v}_z^2)\frac{1}{(1-\beta^2)^2}\right]\\&=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{1}{(1-\beta^2)^3}\left\{\dot{v}^2(t')-\frac{1}{c^2}[\boldsymbol{v}(t')\times\dot{\boldsymbol{v}}(t')]^2\right\}.\end{aligned}\tag{21.5}$$

必须指出：这个值与所选择的 t(亦即所选择 S_1 的半径)没有关系.

(2) 对于动量的放射,计算是类似的

相当于(21.2)的式子是

$$\int\frac{1}{4\pi c}[\boldsymbol{E}''\times\boldsymbol{H}'']\mathrm{d}fc\left\{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}\right\}\Delta t'.\tag{21.6}$$

除以 $\Delta t'$,即得了每秒中动量的放射.为计算(21.6)起见,我们必须分别地计算它的分量.沿 $\boldsymbol{v}$ 方向的分量等于

$$\int\frac{1}{4\pi c}(E'')^2\cos\theta\,\mathrm{d}fc\left\{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}\right\}.$$

以(21.3)的 $(E'')^2$ 代入,即可作出对 θ,φ 的积分.与 $\boldsymbol{v}$ 方向垂直的分量可以证明为零.计算结果为：每秒中电子所放射的动量等于

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\boldsymbol{v}\frac{1}{(1-\beta^2)^3}\left\{\dot{v}^2(t')-\frac{1}{c^2}[\boldsymbol{v}(t')\times\dot{\boldsymbol{v}}(t')]^2\right\}^{①}.\tag{21.7}$$

正同以前一样,这个值与所选择的 t 的值无关.

① (21.5),(21.7)最早见于 Abraham, *Ann. der Phys.* **10**, 105 及 **14**, 326.

(3) 值得指出,我们可以用另一个方法计算出以上的结果

设 A 点为电子在 t' 时刻所在处,令 S_1 为以 A 为中心,以某一个大数 L 为半径的圆球;设 B 点为电子在 $t'+\Delta t'$ 时刻所在处,S_2 为以 B 为中心,以同一个数 L 为半径的圆球. 讨论在时刻 $t'+L/c$ 在 S_1 内的电磁场的能量 U_1,在时刻 $t'+\Delta t+L/c$ 在 S_2 内的电磁场的能量 U_2. 如果将 U_1,U_2 分别地认为是电子在 t',$t'+\Delta t'$ 时刻所具有的能量,那么 U_1-U_2 便可以认为是电子在 $\Delta t'$ 时间中所放射的能量.

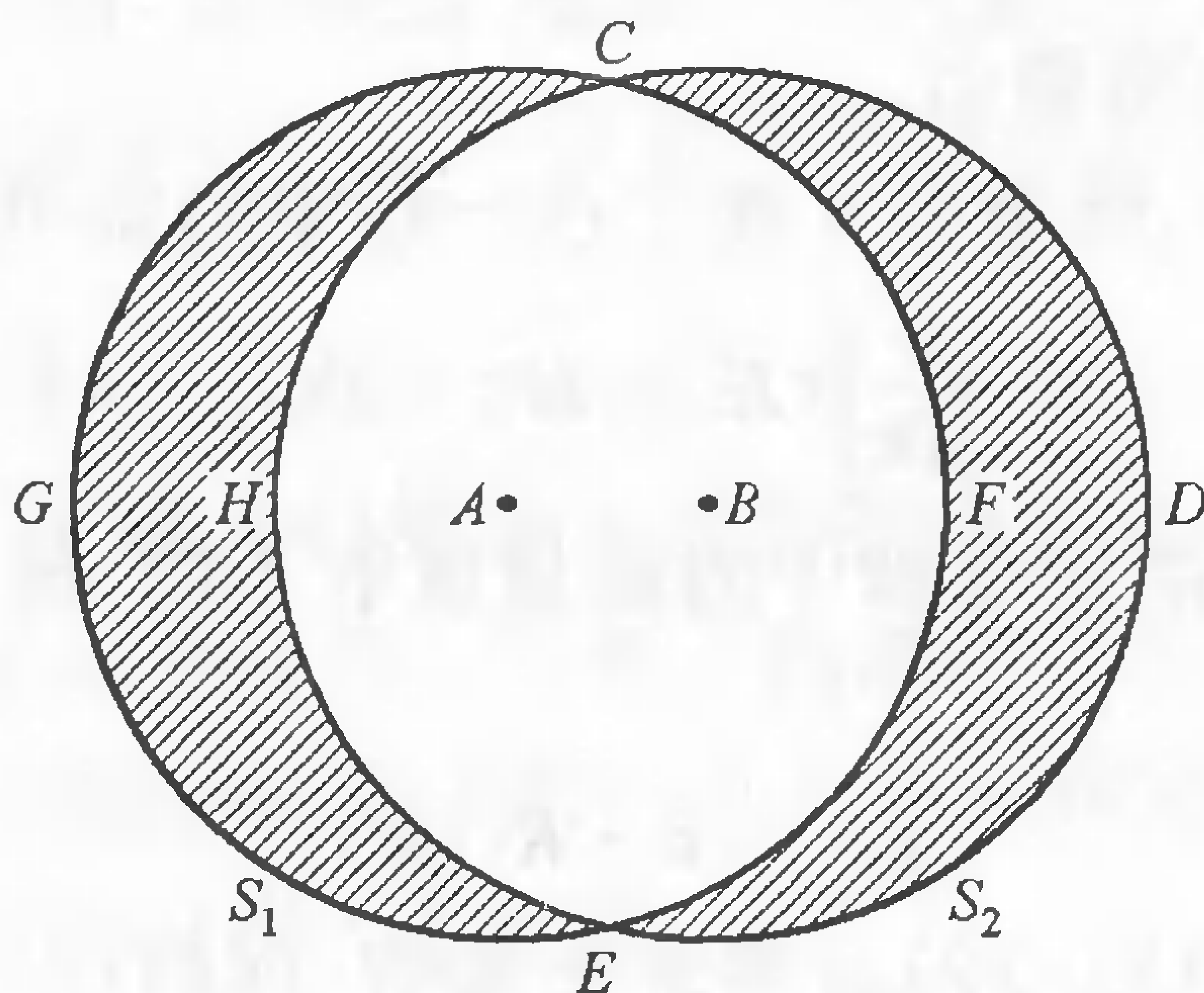


图　22

很显然地,U_1-U_2 乃是两部分的和. 一是在 S_1 球面上在自 $t'+L/c$ 至 $t'+\Delta t'+L/c$ 的一段时间中的能量流动. 另一部分是两个球面 S_1,S_2 所包含的体积 V_1,V_2 的相差体积中的能量. 更正确地说,这一部分是图 22 中月形体积 $CGEH$ 中电磁能量减去月形体积 $CDEF$ 中的电磁能量. 第一部分等于

$$\int \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}''\times\boldsymbol{H}'')\cdot \mathrm{d}f=\int \frac{c}{4\pi}(E'')^2\mathrm{d}f\Delta t', \tag{21.8}$$

第二部分等于

$$-\int \frac{1}{8\pi}(E''^2+H''^2)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\mathrm{d}f\Delta t'; \tag{21.9}$$

两项的和正是(21.2)式. 这两项的和因此与所选择的 L 的值无关,只消 L 是一个大数,使 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 几乎全部为 $\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$便行.

可以用同一方法来讨论动量的放射. 动量放射依照上面的讨论,也分两部分,第一部分为

$$-\int\left\{\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{EE}+\boldsymbol{HH})-\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\boldsymbol{I}\right\}\cdot \mathrm{d}f\Delta t'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int E''^2 \frac{\boldsymbol{R}}{R}\mathrm{d}f\Delta t', \tag{21.10}$$

另一部分是

$$-\int\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\mathrm{d}f\Delta t'$$

$$= -\int\frac{1}{4\pi c}E''^2\frac{\boldsymbol{R}}{R}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\mathrm{d}f\Delta t', \tag{21.11}$$

两项的和正是(21.6)式.

以下几点,值得指出.

(i) 在§3中,能量在$\boldsymbol{S}$面上在一秒中的流动是

$$\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{21.12}$$

与(21.2)式中所决定每秒中的能量放射不同,所差的是被积分项的一个因子

$$(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}/cR).$$

初看时可能觉得(21.12)必然是正确的,因而(21.2)是错的.事实上,(21.12)所讨论的是在场点(即面$\boldsymbol{S}$上)每秒中能量的流动,而在$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$面上一秒中所流过的电磁场,不是电子在一秒中所放射的电磁场.令面元$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$取在(x,y,z)点附近,一秒中在$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$上流过的电磁场,乃是电子在$(\partial t^*/\partial t)$时间中所放射的电磁场.因此电子在一秒中所放出的电磁场,在面元$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$上流过需要$1/(\partial t^*/\partial t)$的时间.因此电子在$\Delta t'$时间中的放射,应为

$$\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,\frac{1}{(\partial t^*/\partial t)}\Delta t'.$$

$(\partial t^*/\partial t)$乃是$(R/S)^*$,(见16.24),因此上式成为

$$\frac{c}{4\pi}\int(E'')^2\mathrm{d}S\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}\right)\Delta t',$$

与(21.2)相同.

这样的动量的讨论是相似的,在此不拟重复.

(ii) 在本节(3)中,能量放射认为是U_1-U_2.在此必须强调指出,U_1乃是S_1圆球内电磁场在$t'+L/c$时刻的能量,而不是S_1圆

球内电磁场在 t' 时刻的能量. 同样, U_2 也不是 S_2 圆球内电磁场在 $t'+\Delta t'$ 时刻的能量. 如果将 U_1, U_2 认为 S_1, S_2 圆球内在 t', $t'+\Delta t'$ 时刻的能量, 那么 U_1-U_2 与(21.2)不同.

(iii) (21.7)同(21.5)的动量能量乘上 $(1-\beta^2)^{-1/2}$ 后, 将在讨论相对论时, 被指出是一个四维空间的矢量的分量, 那里我们非但由它们的值直接证明了它们是一个矢量的分量, 并且将由它们所代表的物理量的性质, 证明它们确是一个矢量的分量. 详细讨论见本书第二部. 与此相反, (21.12)与相应的动量式子不合成为一个矢量.

(iv) 最后必须指出, (21.7), (21.5)乃是在一个极大的球面上的放射(或在 $t-t'$ 极大的情形下所观察到的放射). 事实上我们可以讨论在以电子为中心的一个极小的圆球上的放射(或在 $t-t'$ 为极小的情形下所观察到的放射). 这个讨论将在第三部中遇到, 与狄拉克的电子运动方程一起讨论.

第四章　多 极 放 射

§22　静电学中的多极电荷所产生的电场

这一章讨论多极放射，与其他章的关系较小，初读此书时可以精简．首先讨论静电学中一组电荷所产生的电势．

以前已经提起，一群静止电荷所产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 等于 $-\nabla\varphi$，而

$$\varphi=\int\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}V_{\xi}/R_{\xi}. \tag{22.1}$$

$$(R_{\xi}=\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}^{\frac{1}{2}}.)$$

令 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 代表 (ξ,η,ζ)，(x_1,x_2,x_3) 代表 (x,y,z)．假定电荷集中在某一个区域内，而讨论在区域外某点上的电势．令 (x_1',x_2',x_3') 为区域中一点，称

$$(x-x',y-y',z-z')$$

$$\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'},$$

$$(\xi_1-x_1',\xi_2-x_2',\xi_3-x_3')$$

分别为 $\boldsymbol{R},\nabla,\nabla',\boldsymbol{\gamma}$，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{\xi}}&=\frac{1}{R}+\left(\gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1'}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial x_2'}+\gamma_3\frac{\partial}{\partial x_3'}\right)\frac{1}{R}\\&\quad+\frac{1}{2!}\left(\gamma_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1'\partial x_1'}+2\gamma_1\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial x_1'\partial x_2'}+\cdots\right)\frac{1}{R}+\cdots\\&=\frac{1}{R}+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}+\cdots\end{aligned} \tag{22.2}$$

在此处，必须指出 ∇' 符号仅作用在 R^{-1} 上（不作用于 γ 上），因此上式最好写为

$$\frac{1}{R_{\xi}}=\frac{1}{R}+\sum\gamma_{i}\frac{\partial}{\partial x_{i}'}\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\sum\gamma_{i}\gamma_{j}\frac{\partial}{\partial x_{i}'}\frac{\partial}{\partial x_{j}'}\frac{1}{R}+\cdots$$

因此，如果称

$$\int\gamma_{i}\rho\mathrm{d}V_{\xi}=p_{i},\quad\int\rho\mathrm{d}V_{\xi}=p_{0},$$

$$\int\gamma_{i}\gamma_{j}\rho\mathrm{d}V_{\xi}=p_{ij},\quad\cdots,\tag{22.3}$$

便得了

$$\varphi=\frac{p_{0}}{R}+\sum p_{i}\frac{\partial}{\partial x_{i}'}\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\sum p_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{i}'}\frac{\partial}{\partial x_{j}'}\frac{1}{R}+\cdots\tag{22.4}$$

式中的 p_0 即是总电荷，式中的 (p_1,p_2,p_3) 将称为偶极矩，p_{ij} 等将称为四极矩，p_{ijk} 等将称为八极矩，等等. 所以有此名称乃是因为两个点电荷在适当情形下所产生的电势在远处的最主要项属于(22.4)右方第二项的类型，四个点电荷在适当情形下所产生的电势在远处的最主要项属于(22.4)右方第三项的类型，等等. 事实上，当两个点电荷为 $+e$，$-e$，$-e$ 放在 (x_1',x_2',x_3') 点，$+e$ 放在 $(x_1'+l_1^{(1)},x_2'+l_2^{(1)},x_3'+l_3^{(1)})$ 点，它们依寻常习惯称为偶极子，带有偶极矩 $e\boldsymbol{l}$，而它们所产生的电势为

$$e\left\{(\boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\nabla')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\nabla')(\boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\nabla')+\cdots\right\}\frac{1}{R}.\tag{22.5}$$

上式第一项，亦即在无穷远处最主要的一项，与(22.4)右边第二项同一类型. 讨论两个同样的而方向相反的偶极子，除方向的问题外，与上相同；亦即一个偶极矩为 $+e\boldsymbol{l}^{(1)}$，一个偶极矩为 $-e\boldsymbol{l}^{(1)}$. 将第二个偶极子的 $+e$ 放在 (x_1',x_2',x_3') 点，第一个偶极子的 $-e$ 放在 $(x_1'+l_1^{(2)},x_2'+l_2^{(2)},x_3'+l_3^{(2)})$ 点，那么这四个点电荷所产生的电势为

$$e\left\{(\boldsymbol{l}^{(2)}\cdot\nabla')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}^{(2)}\cdot\nabla')(\boldsymbol{l}^{(2)}\cdot\nabla')+\cdots\right\}$$

$$\times\left\{(\boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\nabla')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\nabla')(\boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\nabla')+\cdots\right\}\frac{1}{R},\tag{22.6}$$

在无穷远的最主要项是

$$e(\boldsymbol{l}^{(2)}\cdot\nabla')(\boldsymbol{l}^{(1)}\cdot\nabla')\left(\frac{1}{R}\right),\tag{22.7}$$

同(22.4)右方第三项同一类型.

事实上，如果只讨论最主要项，将两个电荷$+e$，$-e$放在(x',y',z')点附近(它们相互间的距离依旧称为$\boldsymbol{l}^{(1)}$)，电势在极远处的最主要项即是(22.5)中第一项. 因此偶极子的电势的最主要项与(22.4)右方第二项同一类型. 将两个偶极矩大小相同而方向相反的偶极子放在(x',y',z')点附近(两个偶极子的距离依旧称为$\boldsymbol{l}^{(2)}$)，电势在极远处的最主要项即是

$$(\boldsymbol{l}^{(2)}\cdot\nabla')(\boldsymbol{p}^{*}\cdot\nabla')\frac{1}{R},\tag{22.8}$$

式中$\boldsymbol{p}^{*}$是偶极子的偶极矩. 显然，(22.8)与(22.4)右方第三项是同一类型. 称以上的四个电荷为四极子，称上式中$\nabla_i'\ \nabla_j'$的系数p_{ij}^{*}为四极矩(这样定义下来的四极矩为一张量)，将两个带有大小相同而符号相反的四极矩的四极子放在(x',y',z')点附近，距离为$\boldsymbol{l}^{(3)}$，那么电势在远处的最主要项为

$$(\boldsymbol{l}^{(3)}\cdot\nabla')(p_{ij}^{*}\ \nabla_i'\ \nabla_j')\left(\frac{1}{R}\right),\tag{22.9}$$

与(22.4)右方第四项同一类型. 这样的八个电荷称为八极子. 以上说明了什么叫做偶极子，四极子，八极子，等等，同时说明了这样组成的电荷组的电势在远处的主要项，分别地与(22.4)中的各项同一类型，因而说明了为什么将(22.4)中的p_i，p_{ij}，p_{ijk}分别地称为偶极矩，四极矩，等等.

(22.8)，(22.9)与(22.4)中各项有一个差别，即(22.4)中有$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3!}$等字样. 为一致起见，我们称(22.8)中的张量$\boldsymbol{l}^{(2)}\boldsymbol{p}^{*}$的二倍

为四极矩，(22.9)中的 $l_i^{(3)} p_{jk}^*$ 的六倍为八极矩，等等[①]

必须指出，(22.4)中的

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_j'} \frac{1}{R}\right) \tag{22.10}$$

各项，并不都是独立的. 同样

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k'}\right)\left(\frac{1}{R}\right) \tag{22.11}$$

也不都是独立的. 理由是：这些项都是

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{22.12}$$

的解，而像 $R^{-3} f(\theta, \varphi)$ 的解，只有

$$\begin{cases} R^{-3}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi, \quad R^{-3}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi, \\ R^{-3}\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\cos\varphi, \quad R^{-3}\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\sin\varphi, \quad R^{-3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) \end{cases} \tag{22.13}$$

五个. 在上式中，P_n^m，P_n 乃是关联勒让德(Legendre)函数及勒让德函数. 它们的具体形式为

$$\mathrm{P}_0 \equiv \mathrm{P}_0^0 = 1,$$

$$\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{P}_1^0 = \cos\theta, \quad \mathrm{P}_1^1 = \sin\theta,$$

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1), \quad \mathrm{P}_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta,$$

$$\mathrm{P}_2^2 = 3\sin^2\theta,$$

$$\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta),$$

$$\mathrm{P}_3^1 = \frac{1}{2}\sin\theta(15\cos^2\theta - 3),$$

$$\mathrm{P}_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta, \quad \mathrm{P}_3^3 = 15\sin^3\theta,$$

等等. 因此在(22.10)的六个项中，有一个线性关系，在十个不同的(22.11)式中，有三个线性关系. 事实上，在下面的导数中，取

① 参阅 J.A. Stratton：Electromagnetic Theory，第三章 § 3.12.

(x',y',z')在原点，

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\frac{1}{R}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^5}(R^2-3z^2)$$

$$=-\frac{1}{R^3}(1-3\cos^2\theta)=+\frac{2\mathrm{P}_2^0}{R^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\frac{1}{R}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^5}(R^2-3x^2)$$

$$=-\frac{1}{R^3}(1-3\sin^2\theta\sin^2\varphi)$$

$$=-\frac{1}{R^3}(\mathrm{P}_2^0+\mathrm{P}_2^2\cos 2\varphi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\frac{1}{R}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^5}(R^2-3y^2)$$

$$=-\frac{1}{R^3}(1-3\sin^2\theta\cos^2\varphi)$$

$$=-\frac{1}{R^3}(\mathrm{P}_2^0-\mathrm{P}_2^2\cos 2\varphi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'\partial x'}\frac{1}{R}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\frac{1}{R}=\frac{3zx}{R^5}=\frac{3}{R^3}\{\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\}$$

$$=\frac{1}{R^3}\mathrm{P}_2^1\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'\partial y'}\frac{1}{R}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\frac{1}{R}=\frac{3zy}{R^5}=\frac{3}{R^3}\{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\}$$

$$=\frac{1}{R^3}\mathrm{P}_2^1\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}\frac{1}{R}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{1}{R}=\frac{3xy}{R^5}=\frac{3}{R^3}\{\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\}$$

$$=\frac{1}{2R^3}\mathrm{P}_2^2\sin 2\varphi;$$

证明了各种不同的(22.10)乃是(22.13)的线性组合，证明了各种不同的(22.10)中有一个线性关系．事实上，这个关系即是

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\frac{1}{R}+\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\frac{1}{R}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\frac{1}{R}=0.$$

在(22.4)式中，我们时常将 $\partial/\partial x'$，$\partial/\partial y'$，$\partial/\partial z'$ 等换为 $-(\partial/\partial x)$，$-(\partial/\partial y)$，$-(\partial/\partial z)$，得

$$\varphi=\frac{p_0}{R}-\sum p_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{R}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(-)^n\sum_{i'i''i'''\cdots i^{(n)}}p_{i'i''i'''\cdots i^{(n)}}\frac{\partial^n}{\partial x_{i'}\partial x_{i''}\cdots}\frac{1}{R}+\cdots \quad (22.14)$$

根据§16的讨论，以上的讨论对于有稳定电流而电子速度 v 比 c 小得多的情形也有效.

在电荷所在区域以外，$\nabla^2\varphi=0$，因此 φ 必然取下列的形式：

$$\varphi=\sum_{n=0}\frac{1}{R^{n+1}}\{A_{n,m}\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi+B_{n,m}\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\},$$

式中 A，B 是常数. 直接地自 $\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 求出 $A_{n,m}$ 及 $B_{n,m}$ 是可能的，方法如下.

以 x'，y'，z' 为原点，使 $\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\xi}$ 变为同一个矢量；称 $x^2+y^2+z^2$ 为 r^2，称 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ 为 σ^2，又称矢量 $\boldsymbol{r}$ 及矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 所成角为 Θ，得①

$$\begin{cases}\dfrac{1}{R_\xi}=\sum\left(\dfrac{\sigma}{r}\right)^l\dfrac{1}{r}\mathrm{P}_l(\cos\Theta), & r>\sigma,\\[2ex] \dfrac{1}{R_\xi}=\sum\left(\dfrac{r}{\sigma}\right)^l\dfrac{1}{\sigma}\mathrm{P}_l(\cos\Theta), & \sigma>r.\end{cases}\quad (22.15)$$

又引入 (x,y,z) 的球面坐标 (r,θ,φ)，(ξ,η,ζ) 的球面坐标 (σ,α,β) 得②

$$\mathrm{P}_l(\cos\Theta)=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\alpha)\mathrm{e}^{m\mathrm{i}(\varphi-\beta)}. \quad (22.16)$$

以(22.16)的 $\mathrm{P}_l(\cos\Theta)$ 代入(22.15)，再以(22.15)代入(22.1)，注意当 r 取大值时，我们可以假定 $r>\sigma$，获得

$$\varphi=\sum_{l,m}\frac{1}{r^{l+1}}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$\times\left\{\int\sigma^{l+1}\mathrm{d}\sigma\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\rho(\sigma,\alpha,\beta)\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\beta}\right\}; \quad (22.17)$$

这即是我们所求的式子.

---

① Whittaker and Watson：Modern Analysis，§15.1，p.302.

② 同书§15.71，p.328.

§23 稳定电流的磁场

讨论限制在一个固定区域内对时间不变的电荷密度、电流所产生的磁场. 在区域外一点，$\rho \boldsymbol{v} = 0$，

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = -c^{-1}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{23.1}$$

因此

$$\begin{cases} \boldsymbol{H} = -\nabla \varphi, \\ \nabla^2 \varphi = 0. \end{cases} \tag{23.2}$$

因此 φ 必然为

$$\sum \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)[A_{lm}\cos m\varphi + B_{lm}\sin m\varphi]R^{-(l+1)} \tag{23.3}$$

的形式，亦即为

$$\frac{m_0}{R} - \sum m_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{R} + \cdots \tag{23.4}$$

的形式. 在上式中 $\boldsymbol{R}$ 代表区域中某一点(x', y', z')至区域外场点的矢量.

由以上，可以看出磁场可以分为许多部分，一部分好像是磁极所产生，一部分好像是磁偶极子所产生，一部分好像是磁四极子所产生等等，情形正同静电学中电荷组所产生的电场一样. 让我们由已知的 $\rho \boldsymbol{v}$（或 $\boldsymbol{j}$）计算(23.4)中的 m. 在这样的计算里我们将证明 $m_0 = 0$.

已知

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{23.5}$$

$$\boldsymbol{A} = c^{-1}\int (\boldsymbol{j}(\xi,\eta,\zeta)/R_\xi)\mathrm{d}V_\xi \quad (\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}). \tag{23.6}$$

运用上节的符号，将 $1/R_\xi$ 写为

$$\frac{1}{R}+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}+\cdots,\tag{23.7}$$

代入上式，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots,\\ \boldsymbol{A}^{(0)}=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int\left(\frac{\boldsymbol{j}}{R}\right)\mathrm{d}V,\\ \boldsymbol{A}^{(1)}=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}\mathrm{d}V,\\ \boldsymbol{A}^{(2)}=\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}\mathrm{d}V,\\ \vdots\end{cases}\tag{23.8}$$

值得提醒一下，在上式中，$\boldsymbol{j}$ 乃是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的函数，$\mathrm{d}V$ 仍是 $\mathrm{d}\gamma_1\mathrm{d}\gamma_2\mathrm{d}\gamma_3$，$R$ 及 $\nabla' R^{-1}$ 等在积分中的地位是参数. 因 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$，$c^{-1}\int(\boldsymbol{j}/R)\mathrm{d}V$ 可以化为面积分，因此让 $\boldsymbol{j}$ 在电荷区域表面等于零后，得 $\boldsymbol{A}^{(0)}=0$. 让我们计算 $n\geqslant 1$ 的 $\boldsymbol{A}^{(n)}$. 设

$$\boldsymbol{B}=\nabla'(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\cdots(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R},\tag{23.9}$$

式中共有 $n-1$ 个$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')$，那么

$$\boldsymbol{A}^{(n)}=\frac{1}{c}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V.\tag{23.10}$$

因 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$，我们令 $\boldsymbol{j}=\tilde{\nabla}\times\boldsymbol{G}$ ($\tilde{\nabla}$乃是对 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 取微商的算子)，得

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V&=\int(\tilde{\nabla}\times\boldsymbol{G})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V\\&=\int\boldsymbol{G}\times\tilde{\nabla}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B})=\int n(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{23.11}$$

另一方面，又可得

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V&=\int\boldsymbol{\gamma}(\tilde{\nabla}\times\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V\\&=\int\boldsymbol{G}\cdot\tilde{\nabla}\times(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}V\end{aligned}$$

$$= \int \boldsymbol{G} \cdot [-\boldsymbol{B} \times \widetilde{\nabla}\, \boldsymbol{\Upsilon} + \widetilde{\nabla} \times \boldsymbol{B\Upsilon}] \mathrm{d}V.$$

因

$$\widetilde{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -\nabla' \times \widetilde{\nabla}(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla') \cdots (\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla') R^{-1}$$
$$= -(n-1)\nabla' \times \nabla'(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla') \cdots (\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla') R^{-1} = 0,$$

得

$$\int \boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{G} \times (-\boldsymbol{B}) \cdot \widetilde{\nabla}\, \boldsymbol{\Upsilon} \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{G} \times (-\boldsymbol{B}) \mathrm{d}V.$$

(注意上面的 $\boldsymbol{B\Upsilon}$,$\widetilde{\nabla} \times (\boldsymbol{B\Upsilon})$等都是并矢量.)因此

$$\int \boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}V = -\frac{1}{n} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}V. \tag{23.12}$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{(n)} = \frac{1}{c} \int [\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{B})] \frac{1}{1 + (n^{-1})} \mathrm{d}V$$
$$= \frac{n}{(n+1)c} \int (\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}V. \tag{23.13}$$

引入对 x,y,z 的算子 ∇. 因

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right),$$

得

$$\boldsymbol{A}^{(n)} = \frac{n(-1)^n}{(n+1)c} \int (\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{j}) \times \nabla(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \cdots (\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \frac{1}{R} \mathrm{d}V. \tag{23.14}$$

所以

$$\nabla \times \boldsymbol{A}^{(n)} = \frac{n(-1)^n}{(n+1)c}$$
$$\times \int \nabla \times \left\{ (\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{j}) \times \nabla(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \cdots (\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \frac{1}{R} \right\} \mathrm{d}V$$
$$= \frac{n(-1)^n}{(n+1)c} \int \Big[(\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{j})(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \cdots (\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \nabla^2 \frac{1}{R}$$
$$- (\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{j}) \cdot \nabla\nabla(\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \cdots (\boldsymbol{\Upsilon} \cdot \nabla) \frac{1}{R} \Big] \mathrm{d}V. \tag{23.15}$$

因 $R\neq 0, \nabla^2 R^{-1}=0$,所以

$$\nabla\times \boldsymbol{A}^{(n)}=-\nabla\varphi^{(n)},$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}&=\frac{n(-1)^n}{(n+1)c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{j})\cdot\nabla(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla)\cdots(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla)\frac{1}{R}\mathrm{d}V\\&=\frac{n}{(n+1)c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{j})\cdot\nabla'(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\cdots(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}\mathrm{d}V;\end{aligned}\tag{23.16}$$

式中 $\boldsymbol{\gamma}$ 共出现 n 次,亦即是说在上式中有 $(n-1)$ 个 $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')$. 对于 $n=1$ 的特殊情形,得

$$\varphi^{(1)}=\frac{1}{2c}\left(\int\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{j}\mathrm{d}V\right)\cdot\nabla'\frac{1}{R}.$$

式中的

$$\frac{1}{2c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{j})\mathrm{d}V$$

即是 § 10 中的 $\boldsymbol{m}$(见(10.29)式).

如果我们令电流在线状导线中流动,证明也是极易的;情形如下. 由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$,我们可以将电流认为在许多个封闭电路中流动(它们可以部分地相叠),而在每一个电路上的各点的电流 i 是相等的. 显然地,我们可以先讨论一个如此的封闭电路上的电流所产生的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{H}$,而后对各个电路取和. 对于一个如此的电路,

$$\boldsymbol{A}^{(n)}=\frac{i}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\cdots\frac{1}{R}.$$

称含有 $(n-1)$ 个 $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')$ 的

$$\nabla'(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\cdots\frac{1}{R}$$

为 $\boldsymbol{B}$,得

$$\boldsymbol{A}^{(n)}=\frac{i}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B}.$$

现在

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B})=\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\widetilde{\nabla}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B})=\left(\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}\right)n,$$

$$\int \boldsymbol{\gamma}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B})=\int \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\nabla}\times(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma})$$
$$=\int(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\nabla}\times\boldsymbol{B})\boldsymbol{\gamma}+\int \boldsymbol{B}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\nabla}\boldsymbol{\gamma}$$
$$=\int \boldsymbol{B}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S};$$

因此

$$\int \boldsymbol{\gamma}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B})=-n^{-1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B}),$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{(n)}=\frac{i}{c}\left\{\int \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B})-\int \boldsymbol{\gamma}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B})\right\}\frac{1}{1+n^{-1}}$$
$$=\frac{ni}{(n+1)c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{B}$$
$$=\frac{ni}{(n+1)c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\times\nabla'(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\cdots(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R}$$
$$=\frac{ni(-1)^n}{(n+1)c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\times\nabla(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla)\cdots(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla)\frac{1}{R}.$$

因此

$$\nabla\times\boldsymbol{A}^{(n)}=\frac{ni(-1)^n}{(n+1)c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\cdot\nabla\nabla(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla)\cdots(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla)\frac{1}{R}.$$

因此

$$\nabla\times\boldsymbol{A}^{(n)}=-\nabla\varphi^{(n)},$$
$$\varphi^{(n)}=\frac{ni}{(n+1)c}\int(\boldsymbol{\gamma}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\cdot\nabla'(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\cdots(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla')\frac{1}{R},$$

与(23.16)实质上完全相同.

(23.16)可以写为(23.4)的形式. 由于 $\boldsymbol{A}^{(0)}=0$,我们看到 $m_0=0$. 这是必然的. 其次,引入一个符号 ε_{ijk},定义为

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,$$
$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=-1,$$
$$\varepsilon_{112}=\varepsilon_{113}=\varepsilon_{221}=\cdots=0,$$

$$\varepsilon_{111}=\varepsilon_{222}=\cdots=0$$

(亦即当下标有两个或两个以上相等时，ε_{ijk}即是零). 这样，我们可以将两个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的 i 分量写为

$$\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}A_jB_k.$$

用这个办法，将 $\varphi^{(n)}$写为

$$\frac{n(-)^n}{(n+1)c}\varepsilon_{ijk}\int\gamma_j j_k\gamma_{i''}\gamma_{i'''}\cdots\gamma_{i^{(n)}}\mathrm{d}V\,\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_{i''}}\frac{\partial}{\partial x_{i'''}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i^{(n)}}}\frac{1}{R},$$

得

$$m_{ii''i'''\cdots i^{(n)}}=n!\frac{n}{(n+1)c}\varepsilon_{ijk}\int\gamma_j j_k\gamma_{i''}\gamma_{i'''}\cdots\gamma_{i^{(n)}}\mathrm{d}V.$$

这便是所需要的结果.

如果我们要求类似(23.3)的结果，那么我们先将 $\boldsymbol{H}$ 写为

$$\nabla\times\int\frac{1}{c}\boldsymbol{j}_\xi\frac{1}{R_\xi}\mathrm{d}V_\xi=-\frac{1}{c}\int\boldsymbol{j}_\xi\times\nabla\frac{1}{R_\xi}\mathrm{d}V_\xi$$

$$=\frac{1}{c}\int\boldsymbol{j}_\xi\times\nabla_\xi\frac{1}{R_\xi}\mathrm{d}V_\xi=\frac{1}{c}\int(\nabla\times\boldsymbol{j})_\xi\frac{1}{R_\xi}\mathrm{d}V_\xi,$$

再以

$$\sum\frac{\sigma^l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\Theta)$$

代替$(1/R_\xi)$. 为求 φ起见，我们利用 φ等于任何自无穷远至 $\boldsymbol{r}$ 的线积分

$$-\int\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

的性质. 取线积分中的线为沿$-\boldsymbol{r}$ 方向的直线，自无穷远处至 $\boldsymbol{r}$ 点，得

$$\varphi=-\int_\infty^r H_r\mathrm{d}r$$

$$=-\int_\infty^r\mathrm{d}r\int\mathrm{d}V_\xi\frac{1}{c}(\nabla\times\boldsymbol{j})_\xi\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\sum\frac{\sigma^l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\Theta)$$

$$=\int\mathrm{d}V_\xi\frac{1}{c}(\nabla\times\boldsymbol{j})_\xi\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\sum\frac{1}{(l+1)}\frac{\sigma^l}{r^{l+2}}\mathrm{P}_l(\cos\Theta).$$

用 θ,φ表出$(\boldsymbol{r}/r)$，将(22.16)代替 $\mathrm{P}_l(\cos\Theta)$，再将所有的含有 θ,φ的项表为 $\mathrm{P}_{l^m}(\cos\theta)\cos m\varphi$同 $\mathrm{P}_{l^m}(\cos\theta)\sin m\varphi$的线性组合，即可获得所需要的结果. 这个结果不在此写出.

§24 多极放射

现在讨论一群电荷在一般情形下(即在有任意运动的情形下)的放射. 惟一的假定是诸电荷集中在某一个固定区域内,而我们所考虑的乃是离此区域很远的一点上的电磁场.

计算的出发点是

$$\varphi(x,y,z,t) = \int \rho(\xi,\eta,\zeta,t - R_\xi/c)/R_\xi \mathrm{d}V_\xi, \tag{24.1}$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t) = \int \boldsymbol{j}(\xi,\eta,\zeta,t - R_\xi/c)/R_\xi \mathrm{d}V_\xi; \tag{24.2}$$

式中 $\boldsymbol{j}$ 即是以前的 $\rho\boldsymbol{v}$, R_ξ 是 (ξ,η,ζ) 与 (x,y,z) 间的距离. 先讨论 φ. 利用 (15.9),可以将 φ 写为

$$\iint \rho(\xi,\eta,\zeta,t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t'-t+R_\xi/c)}\mathrm{d}t'\mathrm{d}k\frac{1}{2\pi}.$$

因此得

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z,t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{1/2}}\displaystyle\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\varphi_k(x,y,z)\mathrm{d}k, \\ \varphi_k(x,y,z) = \displaystyle\int \rho_k(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_\xi/c}\frac{1}{R_\xi}\mathrm{d}V_\xi, \\ \rho_k(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{(2\pi)^{1/2}}\displaystyle\int \rho(\xi,\eta,\zeta,t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt'}\mathrm{d}t'. \end{cases} \tag{24.3}$$

我们的问题乃是自 $\rho(\xi,\eta,\zeta,t')$ 中求 $\rho_k(\xi,\eta,\zeta)$,由 $\rho_k(\xi,\eta,\zeta)$ 求 $\varphi_k(x,y,z)$,再由 $\varphi_k(x,y,z)$ 中求 $\varphi(x,y,z,t)$. 如果已知

$$\rho(\xi,\eta,\zeta,t') = \rho_b(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt}, \tag{24.4}$$

式中 b 为一常数,而 $\rho_b(\xi,\eta,\zeta)$ 为 (ξ,η,ζ) 的某一个函数,那么

$$\rho_k(\xi,\eta,\zeta) = (2\pi)^{1/2}\delta(k-b)\rho_b(\xi,\eta,\zeta).$$

自这样的 ρ_k 去求 φ_k,再去求 φ,便获得了

$$\varphi(x,y,z,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt}\int \rho_b(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}bR_\xi/c}\frac{1}{R_\xi}\mathrm{d}V_\xi. \tag{24.5}$$

(24.3)中的 φ 在事实上只是在 ρ 等于"各种不同 b 的(24.4)右方所构成的和"时的 φ,亦即是相当于各种不同 b 的(24.5)式所构成的和.

因此问题只在怎样由 ρ_k 求出 φ_k. 在电荷的固定区域中取一固定点作为原点，称此时电荷的直角坐标为$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，球面坐标为$(\sigma,\alpha,\beta)$，称场点的直角坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，球面坐标为$(r,\theta,\varphi)$，又称矢量 $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{r}$ 所成角为 Θ. 现在让我们援用公式①

$$(e^{ikR_\xi/c})/R_\xi = i(k/c)\sum_{n=0}(2n+1)P_n(\cos\Theta)J_n^*(k\sigma/c)H_n^*(kr/c). \tag{24.6}$$

在上式中，$J_n^*(z)$, $H_n^*(z)$分别地代表$(\pi/2z)^{1/2}$乘上贝塞尔函数 $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$，汉开尔函数 $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)$. 这个式子只在 $r>\sigma$ 的情形下可用.（如果 $r<\sigma$，须将式中的 r, σ 对调.）援用了这个式子及(22.16)，我们便获得

$$\begin{aligned}\varphi_k(r,\theta,\varphi) = &\frac{ik}{c}\sum_{n,m}(2n+1)H_n^*(kr/c)P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \\ &\times\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int\rho_k(\sigma,\alpha,\beta)J_n^*(k\sigma/c)P_n^{|m|}(\cos\alpha)e^{-im\beta}dV.\end{aligned} \tag{24.7}$$

用同样的方法可以算出 $A_k(r,\theta,\varphi)$.

让我们计算出(24.7)中的开始几项. 在这个计算中，我们不再写出 ρ_k, φ_k 的下标 k；同时又将 k/c 换为 k'，使公式略略地简单一些. 很显然地，φ 的起初几项是

$$\begin{aligned}&ef_0(r,\theta,\varphi)+\left(\int\rho\gamma_i dV\right)f_i(r,\theta,\varphi) \\ &\qquad+\left(\int\rho\gamma_i\gamma_j dV\right)f_{ij}(r,\theta,\varphi)+\cdots,\end{aligned} \tag{24.8}$$

在此式中 f_{ij}可以使之等于 f_{ji}②. 在此式中，e 是总电荷，

$$\int\rho\gamma_i dV,\quad \int\rho\gamma_i\gamma_j dV,\quad \cdots \tag{24.9}$$

分别地代表总偶极矩，四极矩，等等. 在计算 A 时，我们获得

$$\left(\int j_i dV\right)g_i(r,\theta,\varphi)+\left(\int j_i\gamma_j dV\right)g_{ij}(r,\theta,\varphi)+\cdots \tag{24.10}$$

---

① Watson：Bessel Functions，Chap 11.（24.6)式乃是汉开尔函数的加法定理(addition theorem)的一个特殊情形. 第一类及第二类贝塞尔函数均有它们的加法定理(见该书 § 11.41，p. 365，公式(2)，(3))，由这些即可求出汉开尔函数的加法定理.

② 只消将 f_{ij}换为$\frac{1}{2}(f_{ij}+f_{ji})$即行.

必须指出,这里的系数

$$\int j_i \mathrm{d}V, \quad \int j_i \gamma_j \mathrm{d}V, \quad \cdots \tag{24.11}$$

同(24.9)中各项不是互相独立的.事实上,称 $\boldsymbol{j}_k$,$(\partial\rho/\partial t)_k$ 为 $\boldsymbol{j}$,$(\partial\rho/\partial t)$的傅里叶积分中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}$的傅里叶系数,得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}_k + (\partial\rho/\partial t)_k = 0, \tag{24.12}$$

亦即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}_k - \mathrm{i}k\rho_k = 0.$$

将下标 k 省略,得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} - \mathrm{i}k\rho = 0.$$

因此

$$\begin{aligned}\int \rho\gamma_i \mathrm{d}V &= \int \frac{1}{k\mathrm{i}}(\nabla \cdot \boldsymbol{j})\gamma_i \mathrm{d}V = \sum_l \int -\frac{1}{k\mathrm{i}} j_l \frac{\partial}{\partial \gamma_l}\gamma_i \mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{k\mathrm{i}}\int j_i \mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{24.13}$$

亦即

$$\int \boldsymbol{j}\mathrm{d}V = -k\mathrm{i}\int \rho\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V. \tag{24.14}$$

(24.13)亦可以用矢量写出:

$$\int \rho\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V = \int \frac{1}{k\mathrm{i}}(\nabla \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{\gamma} = -\int \frac{1}{k\mathrm{i}}(\boldsymbol{j} \cdot \nabla)\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V = -\frac{1}{k\mathrm{i}}\int \boldsymbol{j}\mathrm{d}V,$$

即是(24.14)式.同样,

$$\begin{aligned}\int \rho\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V &= \int \frac{1}{k\mathrm{i}}(\nabla \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V \\ &= \int -\frac{1}{k\mathrm{i}}[(\boldsymbol{j} \cdot \nabla\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{j} \cdot \nabla\boldsymbol{\gamma})] \\ &= -\frac{1}{k\mathrm{i}}\int (\boldsymbol{j}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{j})\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{24.15}$$

因此

$$\int \rho\gamma_i\gamma_j, \quad \int j_i\gamma_j \mathrm{d}V$$

等中有相互关系.在(24.9),(24.11)中所明显地写出的四种积分中,我们将利用(24.14),(24.15)两式消去一部分,使得在最后的 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 式中,只有下列几种出现:

$$\int \rho \gamma_i \mathrm{d}V, \quad \int \rho \gamma_i \gamma_j \mathrm{d}V, \tag{24.16}$$

$$\int (\gamma_i j_l - \gamma_l j_i) \mathrm{d}V. \tag{24.17}$$

(24.17)乃是磁偶极子

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c} \int (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{j}) \mathrm{d}V \tag{24.18}$$

的各个分量乘上 $2c$.

已知

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_0^*(k'r) = (-\mathrm{i}/k'r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \\
&\mathrm{H}_1^*(k'r) = -\frac{1}{k'r}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k'r}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \\
&\mathrm{H}_2^*(k'r) = \frac{1}{k'^2r^2}\left(2 + \frac{3\mathrm{i}}{k'r}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{24.19}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{J}_0^*(k'\sigma) = 1 - \frac{k'^2\sigma^2}{3!} + \cdots, \\
&\mathrm{J}_1^*(k'\sigma) = 2k'\sigma\left(\frac{1}{3!} - \cdots\right), \\
&\mathrm{J}_2^*(k'\sigma) = (2k'\sigma)^2\left(\frac{2!}{5!} - \cdots\right), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{24.20}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_0(\cos\Theta) = 1, \\
&\mathrm{P}_1(\cos\Theta) = \cos\Theta = (x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)/r^2\sigma^2, \\
&\mathrm{P}_2(\cos\Theta) = \frac{1}{2}\{3\cos^2\Theta - 1\} \\
&\qquad = \frac{1}{2}[3(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)^2/r^2\sigma^2 - 1], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

算出 φ 及 $\boldsymbol{A}$ 的分量 A_i 分别为：

$$\begin{aligned}
\varphi = &\frac{l}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r} + \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{p}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\left(-\frac{\mathrm{i}k'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \\
&+ \left(\sum_i p_{ii}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\left\{-\frac{k'^2}{6r} + \frac{\mathrm{i}k'}{3r^2} - \frac{1}{2r^3}\right\} \\
&+ \sum_i \sum_j p_{ij}\frac{x_i x_j}{r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\left(-\frac{\mathrm{i}k'}{r^2} + \frac{3}{2r^3}\right) + \cdots,
\end{aligned} \tag{24.21}$$

$$A_i = -\frac{k'\mathrm{i}}{r}p_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r} - \frac{1}{2}k'\mathrm{i}\left(\sum_j p_{ij}\frac{x_j}{r}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\left(-\frac{\mathrm{i}k'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$+\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\left(-\frac{\mathrm{i}k'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\cdots; \tag{24.22}$$

式中 p_i, p_{ij}代表(24.16)，$\boldsymbol{m}$ 代表(24.18). 在导出上式时，我们曾用了

$$\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V\cdot = \left\{\int\frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}V + \int\frac{1}{2}(\boldsymbol{j}\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{j})\mathrm{d}V\right\}\cdot$$

$$= \left(-\frac{1}{2}k\mathrm{i}\int\rho\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V\cdot\right) + \left(\int\frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{j})\mathrm{d}V\times\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}k\mathrm{i}\int\rho\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V\cdot\right) + c\boldsymbol{m}\times$$

的式子. 无疑地，(24.21)，(24.22)右方含有高次项，而这两个式子是否合用，亦即 $\varphi, \boldsymbol{A}$ 的展开是否有效，在乎高次极矩的影响是否可以忽略. 这又在乎以下两点：第一，J^* 函数能否以(24.20)中最初几项来代替；第二，(24.6)中的高次项能否忽略. 第一点所需要的乃是，k'乘上电荷区域的宽度(即区域的纵深度，横深度及高度中的最大的一个)比 1 小得多，亦即

$$k'a \ll 1; \tag{24.23}$$

其中 a 代表区域的纵横深度及高度中的最大数. 但 $k'=k/c$，而 k 是傅里叶波的频率乘上 2π，因此 c/k 乃是$(2\pi)^{-1}$乘上波长 λ，因此上式即是

$$2\pi a/\lambda \ll 1,$$

或

$$a \ll \lambda/2\pi. \tag{24.24}$$

第二点的研究是比较麻烦的. 但如果我们只研究在极远处的 φ，我们可以极易地证明在(24.24)满足时，高次项的影响是可以忽略的. 事实上，不难证明，电的 2^n 次极矩所产生的 φ 的形式为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\left\{c_1(\theta,\varphi)\frac{1}{r^{n+1}}+c_2(\theta,\varphi)\frac{k'}{r^n}+\cdots+c_{n+1}(\theta,\varphi)\frac{k'^n}{r}\right\}; \tag{24.25}$$

式中的 $c_1, c_2, \cdots$只与极矩大小及角 θ, φ 有关，而同 k', r 无关.（电极矩所产生的 $\boldsymbol{A}$ 也有类似的式子.）要证明 φ 必然取以上的形式，只消用量纲来考虑；c 等的量纲是 L^n，k' 的量纲是 L^{-1}. 因此，如果只考虑 r^{-1}项，那么只消(24.23)满足，便不难证明当 n 逐渐增加时，(24.25)中含有 r^{-1}的一项逐渐趋近于零；当 n 取极大值时它便可以忽略. 对于电磁矩所产生的 $\boldsymbol{A}$，磁矩所产生的 $\boldsymbol{A}$，我们有同样的情形，不必重复讨论.

(24.25)同时指出，如果讨论全部空间的 φ，即不限制 r 为大数，那么无论 k' 是如何地小，我们都不能忽略高次极矩的影响. 事实上 $c_1(\theta,\varphi)$，$c_2(\theta,\varphi)$，… 只与电荷在区域中的分布有关，c_1 在一般情形下不等于零，因此无论 k' 是如何地小，(24.25)不等于零.

由(24.21)，(24.22)求出的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 是

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{III}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{IV}} + \cdots, \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{III}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{IV}} + \cdots, \end{cases} \tag{24.26}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} = e\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}\left\{-\mathrm{i}k' + \dfrac{1}{r}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{I}} = 0, \end{cases} \tag{24.27}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{p}\left\{\dfrac{k'^2}{r} + \dfrac{\mathrm{i}k'}{r^2} - \dfrac{1}{r^3}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r} \\ \qquad\quad + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}\left\{-\dfrac{k'^2}{r} - \dfrac{3\mathrm{i}k'}{r^2} + \dfrac{3}{r^3}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{II}} = \left(\boldsymbol{p}\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\left(-\dfrac{k'^2}{r} - \dfrac{\mathrm{i}k'}{r^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \end{cases} \tag{24.28}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\mathrm{III}} = \left(\boldsymbol{m}\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\left(\dfrac{k'^2}{r} + \dfrac{\mathrm{i}k'}{r^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{III}} = m\left\{\dfrac{k'^2}{r} + \dfrac{\mathrm{i}k'}{r} - \dfrac{1}{r^3}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r} \\ \qquad\quad + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m})\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}\left\{-\dfrac{k'^2}{r} - \dfrac{3\mathrm{i}k'}{r^2} + \dfrac{3}{r^3}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}. \end{cases} \tag{24.29}$$

$(\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}})$，$(\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{II}})$，$(\boldsymbol{E}_{\mathrm{III}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{III}})$分别是总电荷，电偶极矩，磁偶极矩所产生的电磁场. 至于电四极矩所产生的电磁场，则由于用矢量来描写较为不便，所以用分量来写出. 称这些电磁场为 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{IV}}$，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{IV}}$，

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{E}_{\mathrm{IV}})_i = &-\sum_l p_{ll}x_i\left\{-\frac{\mathrm{i}k'^3}{6r^2} - \frac{3\mathrm{i}k'}{2r^4} + \frac{2}{r^5}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r} \\ &+ \sum p_{il}x_l\left\{-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}k'^3}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{k'^2}{r^3} + \frac{2\mathrm{i}k'}{r^4} - \frac{3}{r^5}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r} \\ &- \left(\sum p_{jl}x_jx_l\right)x_i\left\{\frac{k'^2}{r^5} + \frac{11\mathrm{i}k'}{2r^6} - \frac{15}{2r^7}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{H}_{\mathrm{IV}})_i = &\sum_{lj}\varepsilon_{ijl}(\partial A_l/\partial x_j) \\ = &-\frac{1}{2}\mathrm{i}k'\sum_{jl}\varepsilon_{ijl}\left\{p_{lj}\left(-\frac{\mathrm{i}k'}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\right. \end{aligned}$$

$$+\sum_m p_{lm}x_m x_j\left(\frac{k'^2}{r^2}+\frac{3\mathrm{i}k'}{r^3}-\frac{3}{r^4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'r}\Big\}.$$

由以上(24.9)与(24.11)中的关系的讨论,可见磁偶极矩与电四极矩的大小是同级的,它们的影响是同级的.同时自(24.28)与(24.29)又可看到电及磁偶极矩所产生的电磁场 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 是相似的,单位电偶极矩所产生的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的值,除了一个符号上的不同外,正是单位磁偶极矩所产生的 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}$ 的值.

在寻常的讨论中,我们常自第 8 节中的极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 及赫兹势 Π 开始,求(8.7)中 Π 的解,得

$$\Pi=\int\frac{1}{c}\boldsymbol{P}\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{R_\xi}{c}\right)\frac{1}{R_\xi}\mathrm{d}V_\xi,$$

再由此求 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$.计算时也是将 $\Pi,\boldsymbol{P}$ 写为 t 的傅里叶积分,得

$$\Pi_k\ (x,y,z)=\int\frac{1}{c}\boldsymbol{P}_k(\xi,\eta,\zeta)\frac{1}{R_\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_\xi/c}\mathrm{d}V_\xi,$$

也再将 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_\xi/c})/R_\xi$ 展为(24.6)中的级数.这样的方法有一个缺点,即我们要求 $\boldsymbol{P}$ 只在某一个固定区域中不等于零(如此方能应用(24.6)式),而事实上当 $\rho,\rho\boldsymbol{v}$ 集中于某一个区域 D 内而总电荷不等于零时,$\boldsymbol{P}$ 不可能集中于任何一个有限的区域内.为证明这一点,假定 $\boldsymbol{P}$ 集中于一个区域 D' 内.取一个区域 D'' 包含了 D'.在 D'' 的表面 $\boldsymbol{S}''$ 上,$\boldsymbol{P}$ 等于零.因此

$$\int_{S''}\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,$$

因此

$$\int_{D''}\nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}V=0,$$

亦即

$$\int_{D''}\rho\mathrm{d}V=0.$$

因此如果假定 $\boldsymbol{P}$ 集中于一个区域 D' 内,任何包含 D' 的区域中的总电荷等于零,亦即是说,全部空间的总电荷等于零;亦即是说,$\boldsymbol{P}$ 集中于一个区域内的情形相当于一个特殊情形——全部空间总电荷等于零的情形.因此如果电荷集中于一个区域内而总电荷不等于零,我们不能假定 $\boldsymbol{P}$ 集中于一个区域内.

这一点也可以由下面的一个特殊情形看出.如果只有一个静止电荷,在 (ξ,η,ζ) 点,那么 $\boldsymbol{P}$ 的一个可能值即是

$$-e\boldsymbol{i}\varepsilon(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta). \tag{24.30}$$

(上式的散度是$-e\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$,对时间的积分是零.)由(24.30)可见虽然$\rho$集中于一点,$\boldsymbol{P}$的值到处不等于零.

§25　多极放射的另一讨论

以上的讨论虽然是一般性的,但应用起来极不方便,因为它需要将ρ作傅里叶的分解,由ρ_k求φ_k,再作φ_k对k的积分,手续过于麻烦.只有当ρ以一定的频率变化时,以上的讨论才简单合用.

在这里介绍另一个方法.在实质上它是将某点的电磁场表为各个电荷在某一个共同时刻$t^\dagger$时的$\boldsymbol{v}$,$\dot{\boldsymbol{v}}$,…的函数,而这个时刻与各个不同电荷的不同的推迟时刻相差不多.仔细讲来,情形是这样的.

假定电荷等都在一个固定的小区域中活动.取原点为这固定区域中的一个固定点.讨论在t时刻离区域极远处一点(x_1,x_2,x_3)的电磁场.我们引入$t^\dagger$,定义为

$$t^\dagger=t-r/c, \tag{25.1}$$

而将该点的$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$表为各电荷在$t^\dagger$时刻的$\boldsymbol{v}$,$\dot{\boldsymbol{v}}$,等的函数.注意(25.1)中的r只与场点所在位置有关,与电荷无关,因此$t^\dagger$不是各个电荷的推迟时.但由于电荷在一个小区域中,它的直角坐标γ_1,γ_2,γ_3在任何时刻取小值,r同

$$[(x_1-\gamma_1(t))^2+(x_2-\gamma_2(t))^2+(x_3-\gamma_3(t))^2]^{1/2}$$

对于任何t而言相差不多,因此$t^\dagger$同各个电荷的推迟时相差不多.

严格的计算要援用§17中的方法,但这个方法过于冗长,在此不拟援用.较简单的方法是§18中的方法,而这是我们在此要用的方法.根据这个方法,我们先写下

$$\varphi(x,y,z,t)=\int\rho(\xi,\eta,\zeta,t')\delta(t'-t+R_\xi/c)R_\xi^{-1}\mathrm{d}V_\xi. \tag{25.2}$$

用了我们所选择的原点,我们便将(ξ,η,ζ)换写为$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.将

R_ξ^{-1} 写为

$$\sum\left(\frac{\sigma}{r}\right)^l \frac{1}{r}\mathrm{P}_l(\cos\Theta)$$

$$=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{r^3}+\frac{1}{2r^3}\left(\frac{3(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r})^2}{r^2}-\sigma^2\right)+\cdots \quad (25.3)$$

$$(\sigma^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)$$

(这便是(22.15)式),将 R_ξ 写为①

$$r\sum\left(\frac{\sigma}{r}\right)^l C_l^{-1/2}(\cos\Theta)=r-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{r}+\cdots \quad (25.4)$$

(C 的定义见本页注①). 将这些代入(25.2),再将

$$\delta(t'-t+R_\xi/c)=\delta(t'-t+(r/c)-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}/cr)+\cdots) \quad (25.5)$$

展开,成为

$$\delta(t'-t+r/c)+\delta'(t'-t+r/c)\left[-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{cr}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\delta''(t'-t+r/c)\left[-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{cr}+\cdots\right]^3+\cdots; \quad (25.6)$$

逐项地积分,便获得

$$\varphi=\frac{1}{r}e(t^\dagger)+\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{p}(t^\dagger)+\frac{\boldsymbol{r}}{cr^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{p}(t^\dagger)+\cdots; \quad (25.7)$$

式中 $t^\dagger$ 代表 $t-r/c$,

$$\begin{cases} e(t^\dagger)=\int\rho\left(t^\dagger-\dfrac{r}{c}\right)\mathrm{d}V, \\ \boldsymbol{p}(t^\dagger)=\int\rho\left(t^\dagger-\dfrac{r}{c}\right)\boldsymbol{\gamma}\,\mathrm{d}V, \end{cases} \quad (25.8)$$

等等. 可以指出, $e(t^\dagger)$与 $t^\dagger$ 无关,因为 e 乃是总电荷,应该与时刻无关. 同样地算出

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{cr}\int\boldsymbol{j}(t^\dagger)\mathrm{d}V+\frac{1}{c}\int\boldsymbol{j}(t^\dagger)\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{r^3}\mathrm{d}V$$

---

① Whittaker and Watson: Modern Analysis, §15.8, p. 329.

$$+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{j}(t^{\dagger})\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{cr^{2}}\mathrm{d}V+\cdots \tag{25.9}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho(t^{\dagger})\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V&=-\int(\nabla\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V\\&=\int\boldsymbol{j}\cdot\nabla\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V=\int\boldsymbol{j}(t^{\dagger})\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

得

$$\int\boldsymbol{j}(t^{\dagger})\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}(t^{\dagger}). \tag{25.10}$$

用同样精神，可证明

$$\left(\int\boldsymbol{j}(t^{\dagger})\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V\right)\cdot=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho(t^{\dagger})\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V\right)\cdot\right\}+\{c\boldsymbol{m}(t^{\dagger})\times\}. \tag{25.11}$$

将(25.10)，(25.11)右方代入(25.9)，忽略了电四极矩，得

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{cr}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}(t^{\dagger})}{\mathrm{d}t}-\frac{\boldsymbol{r}}{r^{3}}\times\boldsymbol{m}(t^{\dagger})+\cdots \tag{25.12}$$

由此计算出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=&\frac{\boldsymbol{r}}{r^{3}}e+\left\{-\frac{\boldsymbol{p}}{r^{3}}+\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^{5}}\boldsymbol{r}\right\}+\left\{-\frac{\dot{\boldsymbol{p}}}{cr^{2}}+\frac{3(\dot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{r})}{c}\frac{\boldsymbol{r}}{r^{4}}\right\}\\&+\left\{\frac{1}{c^{2}}\frac{(\ddot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^{3}}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}}{r}\right\}+\cdots,\end{aligned} \tag{25.13}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{p}}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^{3}}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\boldsymbol{r}}{r^{2}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}-\frac{\boldsymbol{m}}{r^{3}}+\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^{5}}\boldsymbol{r}+\cdots \tag{25.14}$$

在上式中，$\dot{\boldsymbol{p}}$，$\ddot{\boldsymbol{p}}$ 等代表 p 对 t 的一次及二次微商，而在(25.13)，(25.14)中它们同 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{m}$ 等都是在 $t^{\dagger}=t-r/c$ 时的值. (25.13)式右方许多项都是极熟悉的；第一项是电荷的静电场，第二项是静止电偶极子的静电场，第四项是辐射场. 要看出最后一点，可以令电荷为一群点电荷；那时

$$\boldsymbol{p}(t^{\dagger})=\sum_{(i)}e^{(i)}\boldsymbol{\gamma}^{(i)}(t^{\dagger}),\quad \dot{\boldsymbol{p}}(t^{\dagger})=\sum e^{(i)}\boldsymbol{v}^{(i)}(t^{\dagger}),$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}(t^{\dagger}) = \sum e^{(i)} \dot{\boldsymbol{v}}^{(i)}(t^{\dagger}),$$

因此(25.13)右方最末一项即是§16中$\boldsymbol{v}$等于零的$\boldsymbol{E}''$.在(25.14)右方的许多项也是极熟悉的.第一项是稳定电流的磁场,第二项是辐射磁场,亦即是§16中$\boldsymbol{v}$等于零的$\boldsymbol{H}''$,最末两项乃是静止磁偶极子的静磁场.

公式(25.13),(25.14)与上节(§24)的结果形式上是不同的,这是由于所用的方法不同,所用方法的近似程度不同之故.就应用而言,如果只计算低级的电磁极矩的放射,这一节的结果比较方便一些.

这一节的主要结果为:如果只讨论辐射,$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$的值正同§16中$\boldsymbol{v}$等于零的$\boldsymbol{E}'',\boldsymbol{H}''$一样. Heitler在他的书中也获得了同样的结论,但是他用了另一个方法.这个方法在计算$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$的高次项时比本节中所用的方法更不方便①.

① W. Heitler: Quantum Theory of Radiation, Chap. 1 § 3.

第五章　电子运动方程(初步讨论)

§26　电子质量的电磁学说

在第一章§1中，我们已经看到，我们的理论还缺乏一部分——电荷运动方程．这个问题，到目前尚未完善地解决．要全面地讨论这个问题中的困难，必须叙述比较近代的关于电子运动的理论，而这些理论建立在相对论的基础上，不能在这一章中叙述．因此在这一章中我们讨论一些不依赖相对论的电子运动的理论；至于建立在相对论上的(或者必须用相对论语言的)理论，我们留在第三部中讨论．

首先应该指出：如果将电荷的分布认为是连续的，亦即假定空间各点有一个不为无穷大的密度 ρ，电荷速度 $\boldsymbol{v}$，再假定 ρ，$\boldsymbol{v}$ 除了适合连续性方程(1.8)外，不受其他限制(运动方程除外)，那么写下电荷的"流体力学运动方程"(即类似流体力学中的欧拉方程的运动方程)，是毫无困难的．但这样的工作没有实际的意义，因为用了这样的运动方程后，由于电荷(同正或同负)的排斥力，在解中可以看到电荷逐渐分裂，而看不到一个我们所想像的电子．(我们所想像的电子乃是一个始终以电荷量 e 集中于一个小区域的物体．)换句话说，一个如上所述的"流体力学运动方程"，不能保证一个寻常的电子的不分裂，因此与事实矛盾，所以是没有实际意义的．

当然，我们可以引进别种的力，使电子中各部分始终凝结在一起而不分裂．这样的理论在此不拟讨论①，因为一方面这增加了理

---

① H. Poincaré, *Rend. Pol.* **21** (1906)129. 他作了一些尝试，但也未具体地说明用什么别的力可以使电子不分裂．

论上的复杂性,另一方面并不能具体地说明如何使电子不分裂.

另一个办法是给电子一个模型,用少数的几个“几何量”的值来决定电子的情形,再写下这些几何量对时间变化的微分方程.例如将电子认为是一个点,那时点的坐标(x,y,z)便是所需的几何量;又如将电子认为一个大小不变的圆球,电子中心的坐标(x,y,z)便是所需几何量的一部分.在前者的情形下,我们只消写下(x,y,z)对时间变化的微分方程,便确定了电子运动的规律;在后者的情形下,我们必须假定电子内部没有绕中心的旋转,方能使(x,y,z)的微分方程完全地决定了电子的运动.同样,在洛伦兹电子中,如果我们假定电子各部分的收缩率只与电子中心的速度有关,而又假定电子内部没有绕中心的旋转运动,那么电子中心的坐标(x,y,z)对时间的变化的方程,便是运动方程的全体.在这一章中,我们用“给模型”的办法,将问题简单化,同时假定电子内部没有旋转,洛伦兹电子各部分收缩率均匀,等等.

首先讨论电子的“质量的电磁学说”.先讨论“似稳情形”,即电子中心的加速度$\dot{\boldsymbol{v}}$及$\ddot{\boldsymbol{v}}$,$\dddot{\boldsymbol{v}}$,… 等都是极小的情形.一个这样的电子的速度$\boldsymbol{v}$是几乎不变的.它所产生的电磁场有一个动量$\boldsymbol{G}$,能量U(见§13,§14).如果用阿伯拉汉姆模型,$\boldsymbol{G}$,U的值见(14.19),(14.20);如果用洛伦兹模型,$\boldsymbol{G}$,U的值见(14.11).这个动量与电子的运动是不可分割的;如果电子速度是$\boldsymbol{v}$,它的电磁场的动量便是$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v})$;如果电子速度改变,成为$\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$,它的电磁场的动量便改变成为$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})$,因此外界的电磁场所施于电子的力,非但供给电子机械动量的变化,也必须供应$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v})$的变化.(在力学中,施于一个物体上的力,供给了该物体动量的增加.)由此可以看到,一个电子的运动方程应为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(f)}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}, \tag{26.1}$$

式中$\boldsymbol{G}^{(m)}$代表机械动量,$\boldsymbol{G}^{(f)}$为电子的电磁场的动量,$\boldsymbol{F}$代表外界所施的力.令$\boldsymbol{E}''$,$\boldsymbol{H}''$为外界电荷所产生的电磁场,那么$\boldsymbol{F}$等于

$$\int \rho \left(\boldsymbol{E}'' + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}'' \right) \mathrm{d}V \tag{26.2}$$

在电子体积上的积分.所以有这个积分,乃是因为在此我们讨论大小不等于零的电子,例如阿伯拉汉姆及洛伦兹模型的电子;将来我们令电子圆球半径或电子椭圆球的长半轴趋近于零,便附带地讨论了点电荷.当电子体积不等于零时,外界所施的力即是(26.2)式.值得指出,(26.2)中的 ρ 乃是由电子所产生的 ρ,在电子外等于零,因此(26.2)中的积分区域,可以换为全部空间.

以(14.19),(14.20),(14.11)的 $\boldsymbol{G}^{(f)}$ 代入式(26.1),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ \frac{1}{2} U_0 \left(\frac{c^2+v^2}{cv^2} \log \frac{c+v}{c-v} - \frac{2}{v} \right) \frac{\boldsymbol{v}}{v} + O(\dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{v}}, \cdots) \right\} = \boldsymbol{F} \quad \text{(阿伯拉汉姆模型)} \tag{26.3}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \frac{\boldsymbol{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + O(\dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{v}}, \cdots) \right\} = \boldsymbol{F}. \quad \text{(洛伦兹模型)} \tag{26.4}$$

在实验中①,我们证实电子有以下的运动方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + O(\dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{v}}, \cdots) \right\} = \boldsymbol{F}, \tag{26.5}$$

式中 m_0 为一常数;因此有些作者认为洛伦兹模型更近于事实.有些人甚至于认为可以假定

$$\boldsymbol{G}^{(m)} = 0. \tag{26.6}$$

那时使(26.4),(26.5)一致起见,便假定了

$$m_0 = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}. \tag{26.7}$$

这样的理论认为电子的动量,完全是它所产生的电磁场的动量,因此认为它的惯性也是由后者而来.因此认为它的质量也完完全全

① 例如 W. Kaufmann, *Gött Nackr. math.—nat. Klasse* 143, (1901); A. H. Bucherer, *Verh. d. Deutschen Phys. Ges.* **6** (1908)688.

地由后者决定，正如(26.7)所表示. 这样的学说称为“电子质量的电磁学说”.

如果援用阿伯拉汉姆模型而要求(26.3)与(26.5)一致，那么必然要假定 $\boldsymbol{G}^{(m)}$ 取一个较复杂的形式. 那时与电子的电磁场的动量相应的一个质量，与 $\boldsymbol{G}^{(m)}$ 中的机械质量合并，成为(26.5)中的质量. 由上可见电磁质量依然是存在的，但现在它不再是全部质量. 由于 $\boldsymbol{G}^{(m)}$ 取一个较复杂形式是难以想像的一件事，我们觉得洛伦兹模型是一个比较好的模型，亦即觉得(26.4)更接近于事实. 既然用了(26.4)，便不妨假定(26.6)（即 $\boldsymbol{G}^{(m)}=0$），使问题简单化.

在讨论“电子质量的电磁学说”的优缺点前，让我们指出电子的电磁场带有能量 U，而这个能量 U 与电子是不可分离的，因此有一个类似(26.1)而涉及能量的式子. 这个式子是

$$\frac{\mathrm{d}U^{(m)}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U^{(f)}}{\mathrm{d}t}=W, \tag{26.8}$$

式中 $U^{(m)}$ 代表电子的机械运动的动能，$U^{(f)}$ 代表电子所产生的电磁场的能量，W 代表外界对电子所作的功. $U^{(m)}$ 与 $\boldsymbol{G}^{(m)}$ 之间可以假定有以下的关系

$$\frac{\mathrm{d}U^{(m)}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t}. \tag{26.9}$$

在此我们必须分开地讨论两个模型.

对于阿伯拉汉姆模型的电子，电子各部分的速度是相同的，因此

$$W=\int\rho\left(\boldsymbol{E}''+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}''\right)\mathrm{d}V\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{26.10}$$

另一方面，如果不讨论 $\dot{v}^2,\ddot{\boldsymbol{v}},\cdots$ 等项，我们已知

$$\frac{\mathrm{d}U^{(f)}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(f)}}{\mathrm{d}t} \tag{26.11}$$

（见 § 14(14.20)后的讨论），因此不讨论 $\dot{v}^2,\ddot{\boldsymbol{v}},\cdots$ 时，(26.8)可以由(26.1)得来. 事实上，将(26.1)乘以 $\boldsymbol{v}$，再忽略 $O(\dot{v}^2,\ddot{\boldsymbol{v}})$，即获得了忽略 $O(\dot{v}^2,\ddot{\boldsymbol{v}},\cdots)$ 后的(26.8)式.

对于阿伯拉汉姆电子，(26.11)所以成立的理由是极简单的. 令 ρ 依然代表由电子所产生的电荷，令 $\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{H}'$ 为这个电子所产生的电磁场. 无疑地，$\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{H}'$，ρ，$\boldsymbol{v}$ 适合麦克斯韦方程. 由它，可以求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}^{(f)} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T} - \int \rho\left(\boldsymbol{E}' + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}'\right)\mathrm{d}V; \qquad (26.12)$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 代表并矢式，见式(3.13)，V 为全部体积，$\boldsymbol{S}$ 在无穷远. 不难证明

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T} = O(\dot{v}^2),$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}^{(f)} = -\int \rho\left(\boldsymbol{E}' + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}'\right)\mathrm{d}V + O(\dot{v}^2). \qquad (26.13)$$

另一方面，用同样考虑，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U^{(f)} &= -\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int\rho\left(\boldsymbol{E}' + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}'\right)\mathrm{d}V\cdot\boldsymbol{v} \\ &= -\int\rho\left(\boldsymbol{E}' + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}'\right)\mathrm{d}V\cdot\boldsymbol{v} + O(\dot{v}^2). \qquad (26.14)\end{aligned}$$

因此忽略了 $O(\dot{v}^2)$，得

$$\frac{\mathrm{d}U^{(f)}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}^{(f)}. \qquad (26.15)$$

对于洛伦兹电子，我们必须注意到电子各部分的速度是可以不一样的. 称 $\boldsymbol{v}$ 为电子各部分的速度，称 $\boldsymbol{u}$ 为电子中心的速度，(26.4)便改写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}\frac{\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + O(\dot{\boldsymbol{u}},\ddot{\boldsymbol{u}},\cdots)\right\} = \boldsymbol{F} \quad (\beta = u/c). \qquad (26.16)$$

外界所作的功 W 是

$$\int\rho\left(\boldsymbol{E}'' + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}''\right)\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V,$$

不等于 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}$. 在(26.16)式两方乘以 $\boldsymbol{u}$ 后，得

$$\frac{\mathrm{d}U^{(m)}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4}{3}U_0\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right)+O(\dot{u}^2,\ddot{u},\cdots)=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{26.17}$$

另一方面，(26.8)是

$$\frac{\mathrm{d}U^{(m)}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{U_0}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right)\right\}+O(\dot{u}^2,\ddot{u},\cdots)$$
$$=\int\left\{\rho\left(\boldsymbol{E}''+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}''\right)\mathrm{d}V\cdot\boldsymbol{v}\right\}, \tag{26.18}$$

因上式右方与(26.17)的右方是绝不同的两回事，因此两个式子也是绝不同的.

(26.17)可以认为是质心运动的能量守恒式子. 由此可见

$$\frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \tag{26.19}$$

乃是质心运动的“电磁”动能. 因此质心运动的“电磁”动能不等于电子的电磁场的总能. 当 $U^{(m)}=0$，$\boldsymbol{G}^{(m)}=0$ 时，质心运动的动能不等于电子电磁场的总能. 因此我们不能自电子电磁场的总能求电子的“电磁”质量，而必须由电子的电磁场的总动量去求电子的“电磁”质量①.

$U^{(f)}$，$\boldsymbol{G}^{(f)}$ 在此不满足以 $\boldsymbol{u}$ 代替 $\boldsymbol{v}$ 的(26.11). 以前关于阿伯拉汉姆电子的(26.11)的证明在此不成立，因为 $\boldsymbol{v}$ 在电子各部分中不一样，使(26.14)的右方不等于(26.13)的右方乘上一个矢量. 只有在 $\boldsymbol{v}$ 极小时，电子各部分速度才可以认为几乎相同，$U^{(f)}$，$\boldsymbol{G}^{(f)}$ 才满足(26.11)式. 那时的洛伦兹电子近似于阿伯拉汉姆电子. 在一般情形下，(26.11)式不成立，使得由(26.16)所导出的(26.17)的左方与(26.18)的左方也不相同.

因(26.17)和(26.18)是不同的，我们不得不研究一下(26.16)同(26.18)是否矛盾. 不幸地，回答是正面的. 为说明这一点，考虑

---

① 这一点值得指出，正是因为在量子电动力学中，电子的电磁质量通常由它的电磁场的能量决定.

$\boldsymbol{E}'',\boldsymbol{H}''$只在电子中心不等于零的特殊情形.在这个特殊情形下,除电子中心处外,$\boldsymbol{E}'',\boldsymbol{H}''$均等于零,因此(26.18)右方等于(26.17)的右方.但(26.17),(26.18)的左方不相同,因此(26.18)与(26.17)矛盾.因此(26.18)与导出(26.17)的(26.16)式矛盾.

上面的讨论说明:如果我们假定了(26.16)作为电子的运动方程,我们便不能假定(26.18)式.(26.16),(26.18)分别地代表动量、能量守恒式子;因此我们的结论是:对于洛伦兹电子,如果我们有了动量的守恒,我们便不能有严格的能量守恒.这指出了洛伦兹模型在理论上的严重缺点.

虽然洛伦兹模型有如此严重的缺点,但由于它的运动方程(26.16)与实验结果(26.5)的相似,依然是两个模型中比较好的模型.我们通常令$\boldsymbol{G}^{(m)}$等于零,将(26.16)写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}\frac{\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}+O(\dot{\boldsymbol{u}},\ddot{\boldsymbol{u}},\cdots)\right\}=\boldsymbol{F},\qquad(26.20)$$

同时将$U^{(m)}=0$的(26.17)认为代表能量守恒的式子.在此必须记住,(26.17)中的能量不是电子的电磁场的能量.

现在让我们讨论电子质量的电磁学说的优缺点.优点有两个:第一,由它而来的,用了洛伦兹模型后的运动方程(26.20)与实际运动方程(26.5)符合;第二,由这个理论可以算出电子半径(或运动时的长半轴)的值,而这个值与实际情形相近.让我们分别地叙述这两点.

第一点固然是值得提出的,但不能过于强调.理由有两个:首先,没有电磁场的中子的运动方程,也取(26.5)式的形式;其次,相对论的考虑,要求质点的运动方程取某些形式,而其中的最简单的形式,即是(26.5)的形式.第一句话说出:像(26.20)中的动量,正不必一定是由于电磁场而来的.第二句话说出:像(26.20)中的动量,正是相对论所要求的;任何满足相对论的运动方程,自然而然地会含有(26.20)中的动量,正不必假定这动量是由于电子本身所产生的电磁场而来的.

关于第二个优点，让我们先计算电子在静止时的半径 a. 根据(26.7)式及 U_0 与 a 的关系可以算出 a. 如果在电子内，电荷的分布是均匀的，

$$U_0 = (3/5)(e^2/a),$$

如果电荷集中于电子圆球的表面，得

$$U_0 = e^2/2a.$$

因此一般地讲，a 的值满足下式：

$$m_0 = \alpha(e^2/ac^2), \tag{26.21}$$

式中 a 为大小接近于 1 的数. 我们通常将

$$r_0 \equiv e^2/mc^2$$

称为电子的"经典的半径"，因为 r_0 与(26.21)所决定的 a 相差不多，为同级的量. 引入 m_0,e,c 的值①：

$$m_0 = 9 \times 10^{-28}\ 克,$$

$$e = 4.8 \times 10^{-10}\ 静电单位, \quad c = 3 \times 10^{10}\ 厘米/秒,$$

得

$$r_0 = 2.8 \times 10^{-13}\ 厘米.$$

在许多过程中——例如电子对于光的散射——无论我们用经典的电动力学或量子电动力学，我们计算的结果，正好像电子有一个半径 r_0 似的. 这似乎支持了电子质量的电磁学说. 但这一点也不宜过于强调. 首先，在以上所谈的计算过程中，我们曾经假定了电子为几何点；只是最后的结果同假定电子有一个半径 r_0 相似. 因此 r_0 是一种"有效半径". 其次，如果作用于电子的物质与电子的作用是属于"磁"的性质的(例如作用于电子磁矩上)，那么作用所产生的各种过程的几率，同假定电子有一个半径 r_0 而获得的几

---

① 根据国际科技数据委员会(CODATA)1999 年发表的推荐值为
$m_0 = 9.109\,381\,88(72) \times 10^{31}$ kg； $c = 299\,792\,458$ m/s；
$e = 1.602\,176\,462(83) \times 10^{-19}$ C.

率完全不相似.对于这些过程,必须假定电子另有一个半径,称为"磁半径".如果电子磁矩是 μ,磁半径的大小为

$$(\mu^2/mc^2)^{1/3} \approx 10^{-11} \text{ 厘米},$$

比 r_0 大得多.换句话说,对于某些含有"磁作用"的过程而言,过程的几率的大小正好像电子有一个"有效半径"10^{-11}厘米似的①.因此,根据"电子的某些过程的几率大小正好像电子有一个半径 r_0 似的"的理由,机械地去假定静止电子始终是一个以 r_0 为半径的圆球,是不妥的.

电子质量的电磁学说另一个缺点是:我们不能假定电子是一个点.因为这样假定后,

$$a = 0, \quad U_0 = \infty, \quad m_0 = \infty,$$

与事实不符.但事实上,量子力学需要"电子是几何点"的假定.在经典区域中,如果我们引入相对论,我们也常常援用这个假定.因此这个缺点是严重的.用了相对论观点后对于电子模型的讨论,留在第三部中.

§ 27　电子的自作用力

(1) 证明(26.1)与下式等效

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t} = \int \rho \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right) \mathrm{d}V, \tag{27.1}$$

式中 ρ 为电子的电荷密度(因此在电子外等于零),$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 为总的电场、磁场;$\boldsymbol{E}$ 等于电子所产生的电场 $\boldsymbol{E}'$ 加上外界所产生的电场 $\boldsymbol{E}''$;同样地,$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{H}''$.(27.1)右方的积分区域可以认为是电子的体积,也可以认为是全部空间.显然地,在此我们只证明(26.1)同(27.1)在 $\dot{v}^2$,$\ddot{\boldsymbol{v}}$ 等可以忽略时的等效,因为(26.1)只是在

---

① 伊万宁柯及沙科洛夫:经典场论 § 30.

上述情形下被引入的.

证明是极简单的.(27.1)的右方是

$$\int\rho\left(\boldsymbol{E}'+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}'\right)\mathrm{d}V+\int\rho\left(\boldsymbol{E}''+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}''\right)\mathrm{d}V. \tag{27.2}$$

利用 $\boldsymbol{E}',\boldsymbol{H}',\rho,\rho\boldsymbol{v}$ 等所适合的麦克斯韦方程,而将上式中某一个积分的区域认为是全部空间,获得

$$\int\rho\left(\boldsymbol{E}'+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}'\right)\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}')\mathrm{d}V+\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}. \tag{27.3}$$

面积分中的面在无穷远处,因此

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}=O(\dot{v}^2).$$

因此忽略了 $O(\dot{v}^2)$,(27.1)成为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}')\mathrm{d}V+\int\rho\left(\boldsymbol{E}''+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}''\right)\mathrm{d}V,$$

亦即是(26.1)式.

当 $\boldsymbol{G}^{(m)}$ 假定为零,(27.1)成为

$$\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V=0; \tag{27.4}$$

亦即是说:“电子的运动是如此的,使电子上所受的总的电磁力等于零.”

用同样的方法,可以证明(26.8)与

$$\frac{\mathrm{d}U^{(m)}}{\mathrm{d}t}=\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V \tag{27.5}$$

等效.如果 $\boldsymbol{G}^{(m)}$ 假定为零,$U^{(m)}$ 亦为零,上式成为

$$\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=0. \tag{27.6}$$

由此可以立刻看出(26.1)与(26.8)对于阿伯拉汉姆电子是一致的.事实上,(27.6)只是(27.4)乘上电子各部分的共同速度 $\boldsymbol{v}$ 而已.

但(27.1)与(26.1)有一个不同点,即(27.1)可以用到 $\dot{v}^2,\ddot{\boldsymbol{v}}$ 等

不能忽略的情形，可以用到电子有任何运动的情形. 称(27.2)中第一项为电子的自作用力，以 $\boldsymbol{F}^{(c)}$ 代表之，(27.1)成为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(m)}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{F}^{(c)}=\boldsymbol{F}. \tag{27.7}$$

我们在下段中拟计算 $\boldsymbol{F}^{(c)}$，求出当 $\ddot{\boldsymbol{v}}$ 不能忽略时的电子运动方程(27.7).

(2) 自作用力 $\boldsymbol{F}^{(c)}$ 的计算

为计算简单化起见，我们只讨论某一刹那的 $\boldsymbol{F}^{(c)}$，而在这刹那，电子中心速度 $\boldsymbol{u}$ 假定等于零，而加速度 $\dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}, \cdots$ 不等于零. 由§14 的(14.18)式，知在该时电子各部分的速度也等于零，因此

$$\boldsymbol{F}^{(c)}=\int\rho\boldsymbol{E}'\mathrm{d}V.$$

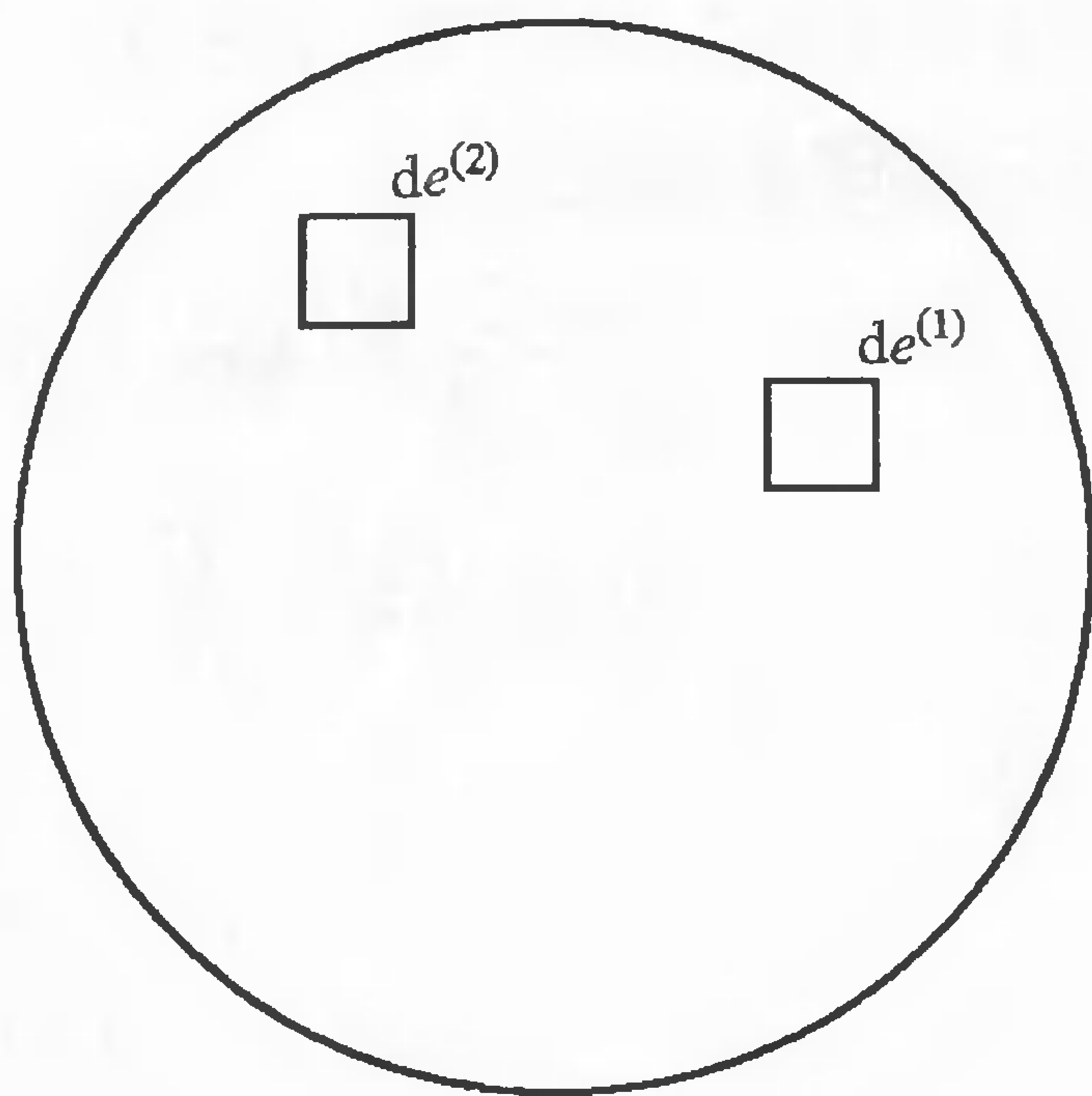


图　23

如图 23，在电子中取一小部分 $\mathrm{d}e^{(1)}$，而讨论在该处的 $\boldsymbol{E}'$. $\boldsymbol{E}'$ 是电子其他部分所产生的电场，是其他的许多小部分所产生的电场的和. 令 $\mathrm{d}e^{(2)}$ 为其他的小部分中之一. 根据(17.12)式，$\mathrm{d}e^{(2)}$ 在 $\mathrm{d}e^{(1)}$ 处所产生的电场为

$$\mathrm{d}e^{(2)}\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{1}{2c^2}\left(-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R}-\frac{(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}\boldsymbol{R}+\frac{v^2}{R^3}\boldsymbol{R}-\frac{3(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}{R^5}\boldsymbol{R}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\right\}+O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{27.8}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 代表在该时刻自 $\mathrm{d}e^{(2)}$ 至 $\mathrm{d}e^{(1)}$ 的矢量，$\boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{v}}$ 为电荷 $\mathrm{d}e^{(2)}$ 在该时刻的速度，加速度，等等. 如果讨论阿伯拉汉姆模型，它们即是电子中心的速度 $\boldsymbol{u}$，加速度 $\dot{\boldsymbol{u}}$，等等. 对于洛伦兹模型，根据§14 的(14.18)，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+O(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}),$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{u}} + O(\boldsymbol{u}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{u}}^2),$$

$$\ddot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{u}} + O(\boldsymbol{u}\cdot\dddot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{u}}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}), \cdots,$$

现在已假定 $\boldsymbol{u}$ 为零，因此如果忽略 $\dot{u}^2, \dot{\boldsymbol{u}}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}, \cdots$，得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}, \quad \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{u}}, \quad \ddot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{u}}, \quad \cdots \tag{27.9}$$

$\mathrm{d}e^{(1)}$与 $\mathrm{d}e^{(2)}$中的矢量 $\boldsymbol{R}$ 正与它们在始终静止的电荷中的矢量一样. 因此在下式

$$\boldsymbol{F}^{(c)} = \iint \mathrm{d}e^{(1)}\mathrm{d}e^{(2)}\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{1}{2c^2}\left(-\frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{R} - \frac{(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}\boldsymbol{R}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\ddot{\boldsymbol{u}} + \cdots\right\} \tag{27.10}$$

中取积分时，我们可以将 $\mathrm{d}e^{(1)}, \mathrm{d}e^{(2)}$认为一个圆球的两个小部分. 由于圆球对称性，

$$\iint \frac{(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}\boldsymbol{R}\mathrm{d}e^{(1)}\mathrm{d}e^{(2)} = \frac{1}{3}\iint \frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{R}\mathrm{d}e^{(1)}\mathrm{d}e^{(2)},$$

$$\iint \mathrm{d}e^{(1)}\mathrm{d}e^{(2)}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0.$$

又因

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\mathrm{d}e^{(1)}\mathrm{d}e^{(2)}}{R}$$

为静止电荷的能量 U_0，(27.10)成为

$$-\frac{4}{3}\dot{\boldsymbol{u}}\left(\frac{U_0}{c^2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{c^3}\right)\ddot{\boldsymbol{u}} + \cdots \tag{27.11}$$

很显然地，(27.11)的第一项与(27.11)中未写出的高次项都同电子的半径及内部电荷的分布有关. 事实上，当电子形状趋近于一点时，(27.11)的第一项趋近于无穷大，而高次项趋近于零. 根据 $\boldsymbol{F}^{(c)}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{G}^{(f)}/\mathrm{d}t$ 的关系，可以想像(27.11)的第一项必然是 $\boldsymbol{u}=0$ 时的

$$\mathrm{d}\left\{\frac{4}{3}U_0\boldsymbol{u}\Big/(1-\beta^2)^{1/2}\right\}\Big/\mathrm{d}t;$$

事实上这的确如此.

因 $\boldsymbol{F}^{(c)}$等于(27.11)，运动方程(27.4)(或 $\boldsymbol{G}^{(m)}=0$ 的(27.7))成为

$$\frac{4}{3}U_0\frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{c^2}-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{u}}+\cdots=\boldsymbol{F}. \tag{27.12}$$

这个结果对于两种模型的电子都有效.

(3) 另一种运动方程

在第三部中我们将指出另有一种运动方程,现将它写下:

$$m_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}}{1-\beta^2}+\frac{3\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}})}{c^2(1-\beta^2)^2}+\frac{3\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2}{c^4(1-\beta^2)^3}\right\}=\boldsymbol{F}\text{①}. \tag{27.13}$$

这是由于假定电子为质点,考虑它在附近所放射的动量、能量,引入守恒定律而获得的.这个式子是符合相对论的.它的导出及它的优缺点将在第三部中讨论.

在此我们只指出几点.首先在 $\dot{u}^2,\ddot{\boldsymbol{u}}$ 可以忽略时,(27.13)与 $\boldsymbol{G}^{(m)}$ 为零的(26.16)式一样,不同的只是此处的 m_0 代替了(26.16)的 $4U_0/3c^2$.在 $\boldsymbol{u},\dot{u}^2$ 取小值而可以忽略时,(27.13)又同(27.12)一样,所差的依然是 m_0 与 $4U_0/3c^2$ 的不同.因此便令人猜想(27.13)同洛伦兹电子的(27.4)是完全一样的.(不必讨论阿伯拉汉姆电子的(27.4),因为当 $\ddot{\boldsymbol{u}},\dot{u}^2$ 可以忽略而 $\boldsymbol{u}$ 取大值时,它的(27.4)即是(26.3),与(27.13)不一样.)但是可以证明,即使不讨论比 $\ddot{\boldsymbol{u}},\dot{u}^2$ 高的高次项,(27.13)同洛伦兹电子的(27.4)在一般情形下是不一样的.为证明这一点,我们不必讨论一般情形,而只消讨论一个特殊情形,即

$$\ddot{\boldsymbol{u}}=\dddot{\boldsymbol{u}}=\cdots=0,$$

而 $\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}}$ 是任意数的情形.该时利用(14.18),得

---

① 这个式子在第三部中用狄拉克的理论导出.在此以前,已见于其他文献,例如 Becker, *Zeits. f. Physik*, **75** (1932)476.

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + c_1(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}), \\ \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{u}} + c_2(\dot{\boldsymbol{u}}^2), \\ \ddot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{u}}, \quad \dddot{\boldsymbol{v}} = \dddot{\boldsymbol{u}}, \quad \cdots; \end{cases} \tag{27.14}$$

式中 c_1, c_2 为与 $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \cdots$ 等无关的数. 显然地，自作用力 $\boldsymbol{F}^c$ 等于

$$\int \mathrm{d}e^{(1)} \left\{ \int \mathrm{d}e^{(2)} \left[\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} - \frac{e\dot{\boldsymbol{v}}^{(2)}}{2c^2 R} - \frac{\boldsymbol{R}}{2c^2 R^3}(\dot{\boldsymbol{v}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{R}) + \frac{2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}^{(2)} + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\boldsymbol{v}^{(1)}}{c} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}^{(2)}}{c} \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{1}{2c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}^{(2)} \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + \cdots \right) \right] \right\}. \tag{27.15}$$

以(27.14)代入，使上式成为 $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \cdots$ 的函数. 在此积分中，必须注意 $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 有关，而积分区域也与 $\boldsymbol{u}$ 有关，乃是一个收缩的椭圆球. 不难证明，与 c_1, c_2 无关的项乃是

$$\dot{\boldsymbol{u}} f_1(u),$$

而与 c_1, c_2 有关的项乃是

$$f_2(u, (\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}), \dot{u}^2).$$

因此(27.4)不含有(27.13)中的一项

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{3\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})}{c^2(1-\beta^2)^2}.$$

因此(27.4)与(27.13)乃是不同的两个方程.

不难证明，(27.4)是不合乎相对论的要求的. 为证明这一点，只消讨论(27.4)的某一些项，证明它们不合相对论的要求. 这个工作在此精简.

(27.13)可以写成以下的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ \frac{m_0 \boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{1-\beta^2} + \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})}{c^2(1-\beta^2)^2} \right) \right\}$$
$$+ \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\boldsymbol{u}\left(\frac{\dot{u}^2}{(1-\beta^2)^2} + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} \right) = \boldsymbol{F}, \tag{27.16}$$

上式乘以 $\boldsymbol{u}$ 后可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})}{(1-\beta^2)^2} \right\}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{\dot{u}^2}{(1-\beta^2)^2}+\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3}\right)=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}^{①}. \quad (27.17)$$

可以注意以上两式左方第二项乃是动量、能量的放射，因此(27.16)可以了解为动量守恒，花括号中的项了解为电子的动量(左方第二项是动量放射，右方为外界所施的力). 同样(27.17)可以了解为能量守恒，花括号中的项了解为电子能量(左方第二项是能量放射，右方为外界所作的功). 在此必须指出：如果将(27.16)花括号中的项认为是电子的电磁场的动量，那么必须用洛伦兹模型，同时 m_0 必须等于$(4/3)(U_0/c^2)$，因此(27.17)花括号中的项不可能是电子的电磁场的能量.

可以附带地指出，两个花括号中的项可以合成一个四维空间的矢量(指相对论中的矢量而言)；同时两个放射量乘以$(1-\beta^2)^{-1/2}$后也可以合成一个矢量. 这使得整个式子(27.16)，(27.17)成为相对论中一个矢量式子的四个分式.

§28　我们对于电子运动方程的要求

让我们看一看，一个正确的电子运动方程应该满足什么条件(相对论的要求，暂且不提). 从动量守恒定律，我们希望它取以下的形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^*}{\mathrm{d}t}+R(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{F}, \quad (28.1)$$

式中 $\boldsymbol{G}^*$ 代表电子的动量，$R(\boldsymbol{G})$代表动量的放射，$\boldsymbol{F}$ 代表外界所施的力. 从能量的守恒，我们希望同时有

$$\frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}t}+R(U)=W. \quad (28.2)$$

式中 U^* 代表电子的能量，$R(U)$代表能量的放射，W 代表外界所

---

① 由于(27.17)式，花括号中第二项有时称为“加速度能量”，见 G.A. Schott, *Phil. Mog.* **29** (1915)49.

做的功. 如果电子可以认为是一个质点,而速度、加速度是 $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \cdots$, 等等,我们有

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}, \tag{28.3}$$

因此我们希望有

$$\frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}t} + R(U) = \boldsymbol{u} \cdot \left\{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^*}{\mathrm{d}t} + R(\boldsymbol{G})\right\}. \tag{28.4}$$

很显然地,电子的运动由三个微分方程决定,因此在一般情形下,(28.1)与(28.2)是冲突的. 但当我们已有了(28.3)及(28.4)时,(28.2)便成为(28.1)的结果,它们间便没有了矛盾.

另一方面,实验告诉我们,当 $\dot{u}^2, \ddot{\boldsymbol{u}}, \cdots$ 可以忽略时,电子的运动几乎是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m_0 \boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \boldsymbol{F}; \tag{28.5}$$

而当 $\boldsymbol{u}, \dot{u}^2$ 几乎是零而 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ 不可以忽略时,电子的运动几乎是

$$m_0 \dot{\boldsymbol{u}} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{F}. \tag{28.6}$$

这也是一个理论上可以满意的电子运动方程所应该满足的条件(见第三部 § 64 光谱线的宽度的讨论).

最后,自 § 21,我们得

$$R(\boldsymbol{G}) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} \boldsymbol{u} \left\{ \frac{\dot{u}^2}{(1-\beta^2)^2} + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})^2}{c^2 (1-\beta^2)^3} \right\}, \tag{28.7}$$

$$R(U) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \frac{\dot{u}^2}{(1-\beta^2)^2} + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})^2}{c^2 (1-\beta^2)^3} \right\}, \tag{28.8}$$

这似乎是不应怀疑的. 总起来说, (28.1),(28.2)可以认为是运动方程, (28.4),(28.5),(28.6),(28.7),(28.8)可以认为是 U^*, $\boldsymbol{G}^*$, $R(U)$, $R(\boldsymbol{G})$所应适合的方程. 我们由这些方程去求出所需的 U^*, $\boldsymbol{G}^*$, 等等.

不难看出,如果我们采用下列的 U^*, $\boldsymbol{G}^*$:

$$U^* = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})}{(1-\beta^2)^2}, \tag{28.9}$$

$$\boldsymbol{G}^* = \frac{m_0 \boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{1-\beta^2} + \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})}{c^2(1-\beta^2)^2}\right\}, \tag{28.10}$$

那么(28.4),(28.5),(28.6)都可以满足.以这样的U^*,$\boldsymbol{G}^*$代入的运动方程(28.1),(28.2)正是(27.13)或(27.16)式.但是这样确定的U^*,$\boldsymbol{G}^*$不满足式子

$$\frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}^*}{\mathrm{d}t}. \tag{28.11}$$

(28.11)的必要性似乎不很显著.但当我们要求(28.11)满足时,那么在(28.4),(28.7),(28.8)许多式中一定有一个不能满足.这是很显然的,因为自(28.11),(28.4)得

$$R(U) = \boldsymbol{u}\cdot R(\boldsymbol{G}), \tag{28.12}$$

而事实上(28.7),(28.8)的$R(U)$,$R(\boldsymbol{G})$不满足上式.由于能量的放射比动量放射更有实际上的重要性,我们在这样的理论中放弃(28.7)式.如果机械地自(28.12)式中求$R(\boldsymbol{G})$的解,得

$$R(\boldsymbol{G}) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\boldsymbol{u}}{u^2}\left\{\frac{\dot{u}^2}{(1-\beta^2)^2} + \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3}\right\}.$$

这显然是错误的,因为当$u\to 0$时,$R(\boldsymbol{G})\to$无穷大.因此让我们将(28.12)改为

$$\overline{R(U)}^t = \overline{\boldsymbol{u}\cdot R(\boldsymbol{G})}^t, \tag{28.13}$$

式中"—t"符号代表对于时间的平均.讨论一个周期为τ的运动,得

$$\int_0^\tau R(U)\mathrm{d}t = \int_0^\tau \boldsymbol{u}\cdot R(\boldsymbol{G})\mathrm{d}t.$$

用分部积分法,又利用$\boldsymbol{u}$,$\dot{\boldsymbol{u}}$,… 的周期性质,我们可以将上式改为

$$\int_0^\tau R(U)\mathrm{d}t = -\int_0^\tau \dot{\boldsymbol{u}}\cdot\left(\int_0^t R(\boldsymbol{G})\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t.$$

讨论$\boldsymbol{u}$取小值时的情形,该时左方为

$$\int\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{e^2}{c^3}\right)\dot{u}^2\mathrm{d}t.$$

因此求得

$$\int_0^t R(\boldsymbol{G})\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\boldsymbol{u}} + C,$$

亦即

$$R(\boldsymbol{G})=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{u}}.$$

如果 $\boldsymbol{u}$ 不取小值，那么

$$R(\boldsymbol{G})=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{u}}\,f(u),\tag{28.14}$$

式中的函数 f 适合 $f(0)=1$ 的条件.

现在便可以挑选 U^*,$\boldsymbol{G}^*$，取

$$U^*=\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}},\quad \boldsymbol{G}^*=\frac{m_0\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}.\tag{28.15}$$

很显然地这满足了(28.11)，同时以这些值及(28.14)的 $R(\boldsymbol{G})$代入(28.1)后，我们的运动方程也满足了条件(28.5)，(28.6).

总结以上，我们在此共有两个理论，一个是不满足(28.11)而满足所有其他条件的(27.13)或(27.16)式，一个是不满足(28.4)，但满足(28.11)及代替(28.4)的(28.13)，而又同时改变了 $R(\boldsymbol{G})$的式子

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right)-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{u}}\,f(u)=\boldsymbol{F}.\tag{28.16}$$

由于它们都满足实际上所要求的(28.5)，(28.6)两式，所以都是可以采用的式子. (28.16)的缺点是其中尚含有未能决定的函数 $f(u)$. 在(28.16)左方引入适当的 $f(u)$，再引入一些其他的项，(28.16)即成为(27.13)或(27.16).

在第三部中我们将指出由于相对论的要求及条件(28.6)，(27.13)或(27.16)几乎成为惟一的运动微分方程. 其他的运动微分方程只是在它的左方加上一些 $\boldsymbol{u}$ 的更高次的微商而获得的式子. 在那里我们也将指出它的严重缺点，即一个电子可以“自己地”增加它的速度，即不由外力帮助而有了速度的增加，详细讨论留在第三部第九、十两章.

重复地讲，在这一节中，我们看到了(27.13)或(27.16)几乎是惟一的运动方程，而另一方面，在第三部中我们将证明由于相对论的要求，它几乎是惟一的运动方程；那么似乎它是正确的运动方程. 但它的缺点是严重的(§57). 应用它时必须引入一些观念，而这些观念依照寻常的理解是难以接受的. 这说明了关于电子运动方程的问题，至今尚未完满地解决.

第二部　狭义相对论

第六章　狭义相对论的时空观及相对论原理

在这一部中我们拟讨论狭义相对论.在近代的电子理论及场论中，狭义相对论占了极重要的地位.至于广义的相对论，我们不拟在此书中讨论；主要理由是它同电磁理论的关系较少①.

§29　伽利略变换

讨论两个观察者O,O'观察某一件事情发生的所在地点及发生的时刻.为简单起见，假定这件事集中在空间某一点上，而它所经历的时间又极短，因此每一个观察者观察到四个数字x,y,z,t；前三个描写事情的位置，最后一个描写事情所发生的时刻.称O所观察到的值为x,y,z,t；O'所观察到的值为x',y',z',t'.那么我们必然会问，$(x\ y\ z\ t)$及$(x'\,y'\,z'\,t')$两组数字之间有什么关系？

如果各个观察者测量一件事情的x,y,z时，始终以他自身为原点，又如果O,O'的x,y,z轴是平行的，又如果O看到O'在O的x轴上作等速运动，速率为v，那么在相对论发现前，人们都以为$(x\ y\ z\ t)$与$(x'\,y'\,z'\,t')$之间有以下的关系：

$$\begin{cases}x' = x - vt,\\ y' = y,\\ z' = z,\\ t' = t;\end{cases}\tag{29.1}$$

① 一个例外的讨论见 М.Ф. Щироков: Вестник МГУ. No.4, 67, 1947.

或

$$\begin{cases} x = x' + vt', \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \tag{29.2}$$

这便是有名的伽利略变换. (29.1)与以上所说 O 看到 O' 以速率 v 沿 x 轴运动是符合的,因为将 O' 作为被观察的对象(他的一连串的位置、情形,便是一连串的事情),他的 x' 始终是零,因此由(29.1)式得, $x=vt$. 显然地,自(29.2)式可以证明 O' 看到 O 以速率 v 沿 x 轴的负方向运动.

必须强调指出:我们不应该用任何先验的理由,作为(29.1),(29.2)的根据,因为运用任何先验的理由,本身即是反唯物主义的. 通常使我们相信(29.1),(29.2)的根据是所谓的"直觉". 但直觉事实上是由于对于自然界的认识而来的,而往往这些认识是粗糙的,在相对认识逐渐的改进提高中,我们无法相信如此粗糙的相对认识所带来的概念可以是一成不变的. (29.1)及(29.2)的根据,除了直觉以外,便是实验结果. 自实验而得来的认识,也是可以随着实验的增加、改进等等而改变的. 因此在原则上, (29.1),(29.2)是可以改进的. 在讨论到光速以前,我们常常只研究 O,O' 相对速率 v 比光速小得很多时的情形;那时(29.1),(29.2)同实验有很好的符合. 因此,物理学家以为(29.1),(29.2)是正确的,甚至于推想它们对于任何 v 是有效的. 但事实上,下面的讨论将指出它们只是一个更正确的理论的近似.

依照(29.1),(29.2),时空是"绝对"的. 这句话的具体意义是这样的. 如果 A,B 是两件事,由观察者 O 看来,在同时发生,

$$t_A = t_B.$$

由于(29.1),

$$t_A = t'_A, \quad t_B = t'_B,$$

得

$$t'_B - t'_A = t_B - t_A. \tag{29.3}$$

因此对于 O'，它们的时间间隔正同 O 所观察到的时间间隔一样. 这称为"绝对时间". 如果以上所说的两件事 A, B 由 O 看来在 x_A, x_B 处发生，由 O' 看来在 x'_A, x'_B 处发生，那么由于(29.1)，

$$x'_B - x'_A = x_B - vt_B - (x_A - vt_A) = x_B - x_A. \tag{29.4}$$

因此如果观察者 O 观察到两件事 A, B 同时发生，观察者 O' 非但观察到它们同时发生，并且观察到它们之间的距离也同 O 所观察到的距离一样. 后者称为"绝对空间".

有一点必须在此强调：即一般地讲，讨论某一个物体的某种运动时，必须说明这是哪个观察者所观察到的，也必须说明这是相对于哪个物体的. 所谓 A 相对于 B 的运动，即是 BA 矢量的变化. 因此"相对于物体 B"，及"由某个观察者 B 看来"两句话代表内容不相同的两句话. 当我们讨论一个物体的运动时，我们应该说"由某观察者 O 看来某物体 A 相对于另一物体 B 的运动"；这样，这句话的意义才完全明确. 有的时候，我们简说"由某观察者 O 看来物体 A 的某个运动"，或说"物体 A 相对于某观察者 O 的某个运动"，意即是"由 O 看来相对于 O 的某个运动".

可以指出：用了"绝对时空"的概念后(即用了(29.1)后)，两个物体 A, B 的相对位置、相对速度、相对加速度等等，对于任何观察者是相同的. 对于物体 A，我们有

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad z_A = z_A(t);$$

$$x'_A = x'_A(t'), \quad x'_B = x'_B(t'), \quad \cdots$$

同样地，对于物体 B 我们有 $x_B = x_B(t)$ 等式. 利用(29.1)，(29.2)，便不难证明当 $t' = t$ 时，

$$x'_B(t') - x'_A(t') = x_B(t) - x_A(t),$$

$$y'_B(t') - y'_A(t') = y_B(t) - y_A(t), \quad \cdots \tag{29.5}$$

将(29.5)中的式子两方分别地对 t 微商，便证明了当 $t = t'$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(x_B' - x_A') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_B - x_A), \quad \cdots, \tag{29.6}$$

这说明了相对速度对于任何观察者是相同的.微分二次,便证明了相对加速度对于不同观察者是相同的.

但是一个物体对于两个不同观察者 O,O' 的速度是不同的.令某个物体的运动由 O 看来为

$$x = ut, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

那么由于(29.1)式,得

$$x' = x - vt = ut - vt = (u - v)t = (u - v)t',$$

$$y' = y = 0, \quad z' = z = 0.$$

因此由 O' 看来,速度大小为 $(u-v)$,方向沿 x 轴.一般讲来,如果 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}$ 代表速度矢量($\boldsymbol{v}$ 是 O 看到 O' 相对于 O 的速度矢量,在上面的特殊情形下是以 x 轴为方向,v 为大小的矢量),我们得

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}. \tag{29.7}$$

如果某一个物体有加速度,而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'$ 代表 O,O' 所看到这个物体的加速度,那么当我们假定 $\boldsymbol{v}$ 不变时,

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}. \tag{29.8}$$

这一段的结果与上一段的结果是不矛盾的,因为在这段中,两个运动速度 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'$ 是相对于两个不同物体的速度.

如果光波(或电磁场)集中于一个小区域内,而这个小区域的中心 G 由 O,O' 看来有运动速度 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'$,那么显然 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'$ 应该适合(29.7)式.换句话说,光波的群速度[①]应该满足(29.7)式.至于光速的相速度,我们现在讨论如下.

假设 O 看到一个波

$$K\cos 2\pi\nu(t - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}/u), \tag{29.9}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 代表(x,y,z),$\boldsymbol{n}$ 代表波前的进行方向,u 为一个常数,K 代

---

① 参阅 Д.И. Блохинцев 著《量子力学基础》§7.该处有群速度的定义及讨论.注意求群速的公式(7.10).当相速在任何情形下为 c 时,(7.10)中的 ω,k 适合 $k=\omega/c$,因此群速 $V=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k=c$.

表振幅. 显然地，u 即是相速度. 可以设想 O' 对于这个波观察的结果，得一个类似的结果

$$K' \cos 2\pi\nu' (t' - \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{r}'/u'). \tag{29.10}$$

令 D 为某一物体，在 t_1 时在 (x_1, y_1, z_1) 处，在 t_2 时在 (x_2, y_2, z_2) 处. 自 t_1 至 t_2 在它身上所经过的波腹(或波节)的数目，由 O 看来是

$$\nu\left(t_2 - \frac{n_x x_2 + n_y y_2 + n_z z_2}{u}\right) - \nu\left(t_1 - \frac{n_x x_1 + n_y y_1 + n_z z_1}{u}\right), \tag{29.11}$$

而由 O' 看来是

$$\nu'\left(t_2' - \frac{n_x' x_2' + n_y' y_2' + n_z' z_2'}{u'}\right) - \nu'\left(t_1' - \frac{n_x' x_1' + n_y' y_1' + n_z' z_1'}{u'}\right), \tag{29.12}$$

式中 $(t_2'\ x_2'\ y_2'\ z_2')$，$(t_1'\ x_1'\ y_1'\ z_1')$ 是 $(t_2\ x_2\ y_2\ z_2)$，$(t_1\ x_1\ y_1\ z_1)$ 的函数，由(29.1)决定. 显然地(29.11)与(29.12)对于任何 $(t_2\ x_2\ y_2\ z_2)$，$(t_1\ x_1\ y_1\ z_1)$ 是相等的. 由这一点及(29.1)式，便可求出 ν, ν', u, u'，$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ 之间的关系. 为简单起见，取 $\boldsymbol{n}$ 在 xy 面中，即令

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0). \tag{29.13}$$

那时算出

$$\boldsymbol{n}' = (\cos\alpha', \sin\alpha', 0), \tag{29.14}$$

及

$$\alpha' = \alpha, \tag{29.15}$$

$$\nu' = \nu(1 - (v/u)\cos\alpha), \tag{29.16}$$

$$u' = u - v\cos\alpha. \tag{29.17}$$

因此相速度 $u'\boldsymbol{n}'$ 与 $u\boldsymbol{n}$ 不适合(29.7)式. 只在 $\alpha=0$ 或 π 的情形下，它们才适合(29.7)式. 可以看出：不论 α 是什么，只要它不等于 $\frac{1}{2}\pi$，u, u' 是不同的. 因此如果对于某一个观察者 O 而言，电磁场满足麦克斯韦微分方程，使电磁波的相对速率等于 c，那么对于另

一个观察者 O'，当 O' 以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于 O 而运动时，光波的相速不等于 c 而与 $\boldsymbol{v}$ 有关；因此由他看来，电磁场不可能满足麦克斯韦方程，而适合一个含有 $\boldsymbol{v}$ 的微分方程. 因此一定可以在 O' 系统中做一些实验来求出 $\boldsymbol{v}$.

讨论群速也带来同样的结论. 对于原来的观察者 O，电磁场满足麦克斯韦方程，因此各方向、各频率的电磁波的相速都是 c，因此群速也是 c（证明见 202 页注①中的讨论），因此对于观察者 O'，由(29.7)求出的群速便不是 c. 因此由他看来，电磁场不可能适合麦克斯韦方程.

以上说明用了(29.1)的时空观后，只有一个观察者能够看到他的电磁场满足麦克斯韦方程. 这个观察者即是通常所谈的"以太"(Эфир). 在最早的电磁理论中，以太是具有"力学"性质的，意即是：电磁现象相当于"以太"的形变. 但是自麦克斯韦方程被建立及超距理论被抛弃后，我们便没有必要去保持以太的"力学"性质. 但以上的一段说明用了(29.1)的时空观后，以太就运动学而言依然有它的意义.

但是下面的讨论将说明光的相速、群速对于任何观察者都是 c（首先说明群速是 c，然后说明相速也都是 c）. 这一方面否定了(29.1)的正确性，另一方面使我们有可能完完全全摆脱了"以太".

在这里我们附带地讨论声波的多普勒(Doppler)效应. 对于空气而言，声波的速率在各方向是相同的，设它为 b. 如果声源对于空气而言有一个速度 $\boldsymbol{v}^0$；如果对声源而言，波的频率是 ν^0，波相速度方向是 $\boldsymbol{n}^0$；对空气而言，波的频率是 ν，波相速度方向是 $\boldsymbol{n}$，那么依照(29.15)和(29.16)，

$$\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{n},$$

$$\nu^0 = \nu(1 - \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{n}/b).$$

如果接收声波的物体对于空气有一个速度 $\boldsymbol{v}$，而对于它，波的频率为 ν'，波相速度方向为 $\boldsymbol{n}'$，得

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n},$$

$$\nu' = \nu(1 - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}/b).$$

因此

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n}^0,$$

$$\begin{aligned}\nu' &= \nu^0\{1 - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}/b\}\{1 - \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{n}/b\}^{-1} \\ &= \nu^0\left\{1 - \frac{(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^0) \cdot \boldsymbol{n}}{b} - \frac{(\boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{n})[(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^0) \cdot \boldsymbol{n}]}{b^2}\right\} + O\left(\frac{1}{b^3}\right).\end{aligned} \tag{29.18}$$

波的速率 u', u, u^0 也有类似的关系.上式表出了声源与声接收者所观察的频率的关系,称为多普勒效应.

如果我们只要第一级的小量,ν', ν^0 的相差只与 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^0$ 有关,亦即是只与声源与声接收者的相对速度有关.以上的理论是与实际符合的,因为在实际中 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^0$ 及 b 等都比光速 c 小得很多,而对于这些 v 而言(29.1)是有效的.

对于光波而言,讨论是同样的,只消将空气换为以上所谈的某观察者 O(即对他而言麦克斯韦方程成立的观察者),将 b 换为 c.结果是否有效只在乎(29.1)式是否有效.当 $v^2/c^2, v^{02}/c^2$ 是极小而可以忽略时,(29.1)确是可以援用的(这一点的讨论见后(§32)),因此(29.18)也是正确的.

所以要提出(29.18)的理由是:当 $v^2/c^2, v^{02}/c^2$ 不可以忽略时,它是(29.1)的一个考验.如果在 $v^2/c^2, v^{02}/c^2$ 不可忽略时实验证实了(29.18),那么(29.1)完全可能是正确的. Ives 同 Stilwell 在实验中否定了(29.18)①,亦即是否定了(29.1).

§30 迈克耳孙-莫雷实验②

在上节中已经指出:如果承认(29.1)是正确的,那么至多只能对某一个观察者 O 而言各方向各频率的光波的相速度是 c(因而群速度也是 c),电磁场适合麦克斯韦方程,而对其他的观察者

① H.E. Ives and G.R. Stilwell, *J. of Optical Society of America*, **28** (1938) 215.

② A.A. Michelson, *Amer. Jour. of Science* **22**: 3 (1881)20.
A.A. Michelson and E.W. Morley, *ibid.* **34** (1887)333.

O'而言，光波的相速度，群速度都不是 c；并且由 O' 所观察电磁场的结果，可以在原则上决定 O,O' 的相对速度. 迈克耳孙-莫雷实验便是为了这个目的而设计的.

这个实验的装置如图24. 令 A 为光源，沿 AB 方向发光. S_0 为一个涂上银末的玻璃片，与 AB 线成 45°角[①]. 令光进行至玻璃片 S_0 的中点 C；该时 S_0 将光反射一半，透过一半. 透过的光进行至镜 S_1，受反射，沿 DC 回来，至 S_0 再受反射，最后沿 CF 进行. 在 C 点受 S_0 反射的光，行至镜 S_2，受反射，沿 EC 回来，遇到 S_0，通过 S_0，所以最后也沿 CF 进行. 我们的眼睛放在 F 点，面对着 C，观察两支光所产生的干涉. 在实验中，我们将整个仪器装置绕通过 C 点而与纸面垂直的一条线旋转 90°，同时观察在这过程中干涉图案有没有变化. 更明确地说，我们看 F 点的明暗有没有变化；如果有变化，我们看它变化了多少次（由明变暗再变为明，算为一次）.

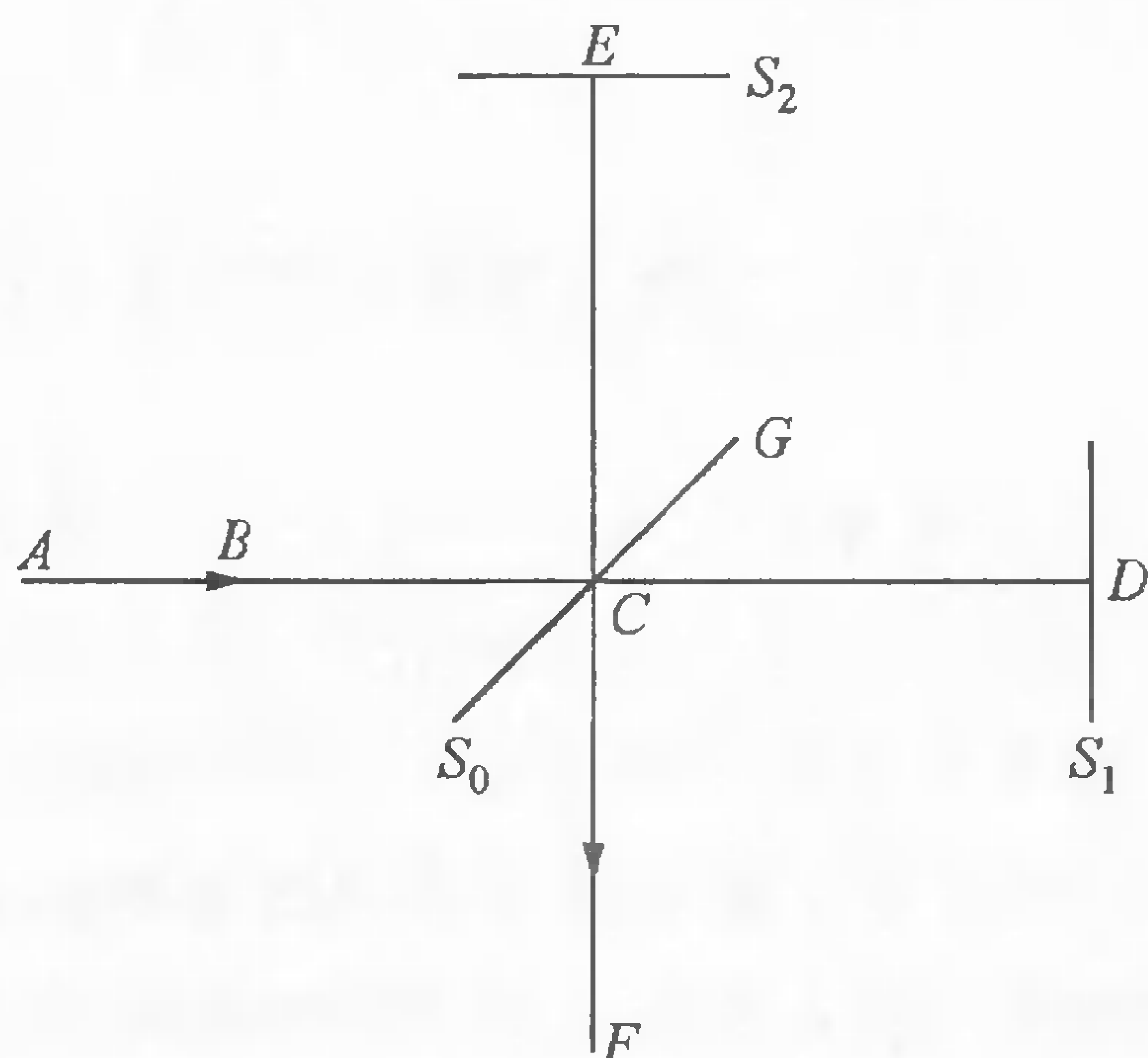


图 24

现在用(29.1)的理论来计算两支光自 A 至 F 所需的时间的差别. 在这个计算中，我们应该用群速度，而不应用相速度，理由见

① 严格讲来，在这样的理论中，这个角不是 45°. 原因是：在这样的理论中，麦克斯韦方程只对于以太有效而对于地球不成立，因此对于后者，寻常的反射定律——入射角等于反射角——不成立. 我们应该在以太系统中计算，计算这个角度应等于多少，才能使自 C 走向 S_2 的光，由以太看来与 AB 线成角 $\arccos(v/c)$（v 是地球相对于以太的速度，假定沿 AB 方向）. 可以证明这个角等于 $45°+O(v^2/c^2)$. 这一点是《物理通报》读者王理同志所提醒的.

本页注①. 换句话说，可以在讨论上述时间的差别时将光波认为是一个“点”，而援用(29.5)，(29.6)，(29.7)，(29.8)等等. 因此我们可以说“光波点”与另一物体的相对位移、相对运动是什么，而不必注明这是哪个观察者的观察结果.

假定在仪器旋转前 AB 的方向是地球相对于以太的运动方向，相对运动速率是 v，方向自左而右. 令 CD 的长为 l_1，CE 的长为 l_2. 因为 D 在地球上不动，它相对于以太的速率是 v；光相对于以太的速率是 c，因此光自 C 走向 D 时相对于 D 的速率是 $c-v$. 同样，光自 D 走向 C 时相对于 C 的速率是 $c+v$. 因此在 CD 过程上来回共需时间

$$l_1/(c+v)+l_1/(c-v)\approx 2l_1/c(1-\beta^2)\quad (\beta=v/c). \tag{30.1}$$

至于向 E 而行的光，我们不能让它的运动方向对于以太而言是与 AB 垂直的，因为如果如此，当它反射回来时(由以太看来)玻璃片 S_0 的中点 C 已经走开，两支光便不能叠合而产生干涉. 为了产生干涉，我们让向 E 进行的光对于地球而言是垂直于 AB 的. 令 t 为光自第一次反射(即自 AB 方向变为 CE 方向的反射)至遇到 S_2

① 如果我们讨论“以太”所应观察到的结果，那么群速、相速的讨论是一样的. 如果我们讨论地球上的观察者所应观察到的结果，那么必须用群速度，理由如下. 在仪器旋转前，在 CE 线上进行的光的进行方向，在以太看来不完全垂直于 AB，因此它的波前由以太看来(亦即是由地球看来)，与 AB 成一个角 α，$\alpha=\arcsin(v/c)$ (v 是地球相对于以太的速度，假定沿 AB 方向). 令 l_1 为 t 时的某一个波前，令 l_2 为它在 $t+1$ 时刻所到达处. 它们的垂直距离是相速度，而图中的 ab 是群速度. 显然地，由地球看来，光的行程是图中的 CE，因此在计算一个波前自 C 至 E 所需的时间，应该用群速度来计算. 以上仅是应该援用群速度的证明的一个提示，详细讨论请读者自己补充.

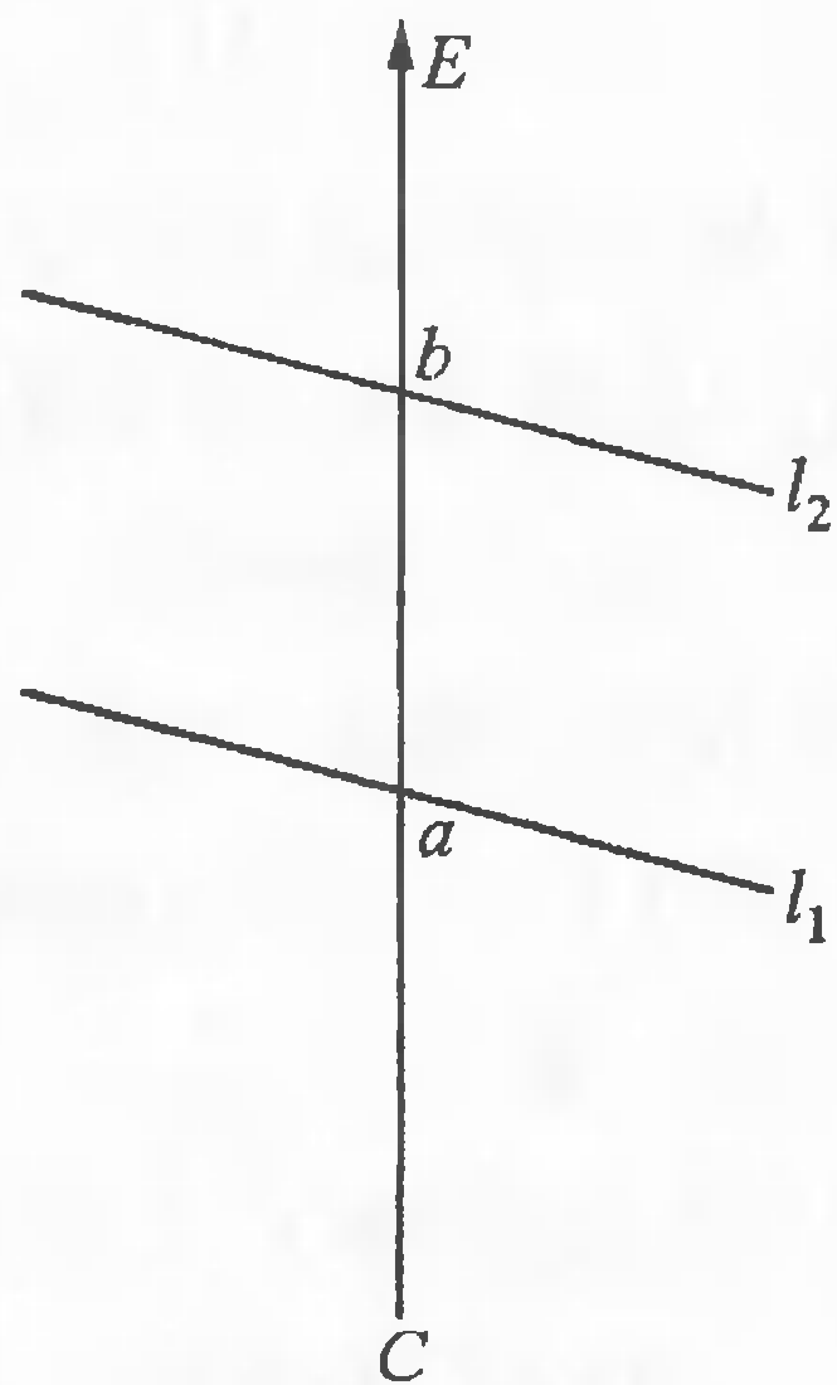


图　25

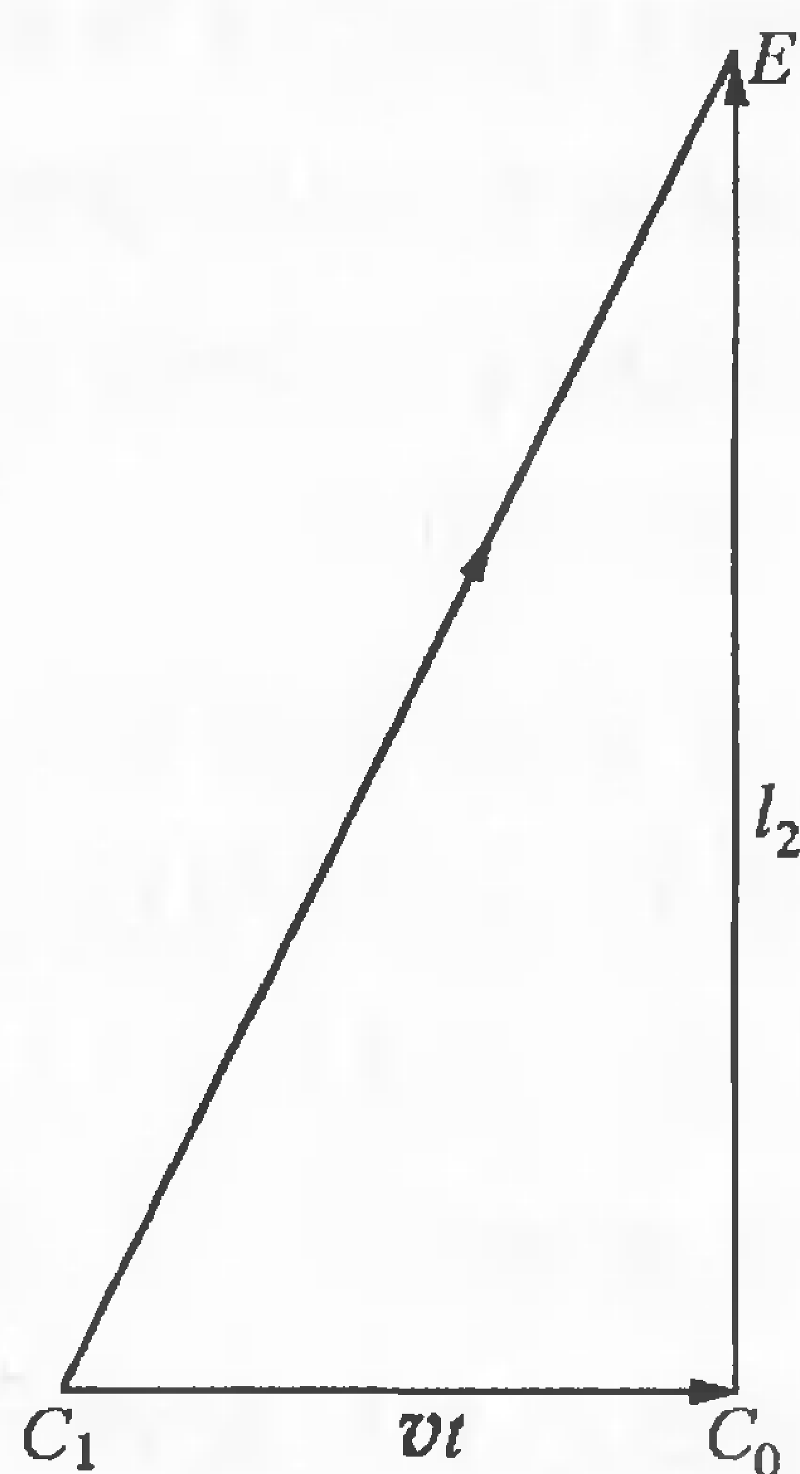


图 26

所需的时间. 画出矢量 $C_1C_0 = vt$，画出矢量 C_0E，方向与 AB 垂直，长度为 l_2（见图 26）. 它们分别为地球相对于以太，光相对于地球在时间 t 中的位移. 作它们的矢量和 C_1E，这便是光相对于以太在时间 t 中的位移. 它的长因此等于 ct. 由三角形 C_1C_0E，我们获得以下的关系：

$$(ct)^2 = (vt)^2 + l_2^2,$$

因此自第一次反射，遇 E，反射回来遇 S_0 所需的总时间为

$$2t = 2l_2/c(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{30.2}$$

两支光自 A 至 F 的时间差是

$$\frac{2l_2}{c(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}. \tag{30.3}$$

旋转仪器后，新的时间差成为

$$\frac{2l_2}{c(1-\beta^2)} - \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)^{1/2}}. \tag{30.4}$$

两个时间差的差是

$$2(l_1+l_2)\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{1}{(1-\beta^2)}\right\} \approx \frac{l_1+l_2}{c}\beta^2.$$

如果 $v \neq 0$，这不等于零，因此在仪器旋转时，干涉图案应该有变化. 但最小心的实验证明了图案的不变化.

为了解释这个实验结果与理论的不一致，物理学家想出了各种办法；其中一部分保持了(29.1)式，另一部分或者明显地放弃了(29.1)式，或者实质上破坏了(29.1)式. 凡是企图保持(29.1)式的办法，多少与其他实验冲突，因而站不住脚. 破坏了(29.1)的办法实质上带来了特殊相对论的时空观.

我们首先讨论想保持(29.1)式而同时解释迈克耳孙-莫雷实验的两种办法，指出它们的困难.

§31　想保持伽利略变换而解释迈克耳孙-莫雷实验的企图的失败

第一个企图是假定光相对于光源的速率是c.

因为S_0,S_1,S_2,光源A的运动是一样的,所以如此假定后,光相对于S_0,S_1,S_2的速率都是c,因此在计算自S_0至S_1,自S_0至S_2等等时间时,我们可以用

$$\text{时间} = \text{自 } S_0 \text{ 至 } S_1(\text{或 } S_2) \text{ 的距离 } /c$$

的公式,因此上面式中的v都应用零来代替,这样便解释了实验结果.在这样的假定下,光对以太的速率反而不是c了!在仪器旋转前,对于以太而言,光自S_0至S_1的速率是$c+v$,光自S_1至S_0的速率是$c-v$,自S_0至S_2及自S_2至S_0的速率是$c(1+\beta^2)^{1/2}$.

有两个理由使这个假定站不住脚.第一,决定电磁场的麦克斯韦方程明明白白地告诉我们电磁波的速率亦即是光的速率与光源的速度没有关系,因此光相对于光源的速度必然与光源的速度有关,不可能在光源速度改变时不改变.第二,让我们讨论天空中"双星"(двойные звезды)所射至我们的光."双星"中的两个星的速度是不同的.因此,如果它们各个所发的光相对于它们各个的速率是一样的,那么这两支光相对于我们的速率将是不同的.由于它们离开我们十分远的事实,相对于我们的速率的小小不同,将引起它们所射光到达我们所需的时间有一个很大的差别,而事实上,从我们对于双星的运动的理论研究及对于这双星所射来的光的观察,知道这两支光到达我们所需的时间并没有很大的差别.所以无论在理论上,或在实验中,我们无法接受上面所说的假定.

第二个企图是假定以太给地球拖住.

这便是一度有名的拖曳理论(теория драги).这个理论假定以太为光所经过的物质(或光的路程附近的物质)所拖住,一起运动.

用这个理论去解释迈克耳孙-莫雷实验时,我们只消假定以太

为地球所拖住一起运动，因此§30的式中的 v 等于零，因此两支光路程的时间差在仪器转动时没有变化，因而解释了实验结果.

单独地引入这个理论而不打破(29.1)式，依然是同某些实验冲突的.在此我们叙述两个如此的实验.

第一个是斐索(Fizeau)实验①(见图27).光自光源 A 射出，在镜 S_0 处分为两支.一支的路程为 $C_0CEC_1C_2DBC_3C_0F$，另一支路程为 $C_0C_3BDC_2C_1ECC_0F$，两支光在 F 处会合.图中粗线代表一个容器的壁，容器中充满了水，依照图中箭头方向流动.在实验中，我们使水的流速自零值逐渐增加至 v，观察在 F 处的干涉图案在此过程中有否变化.

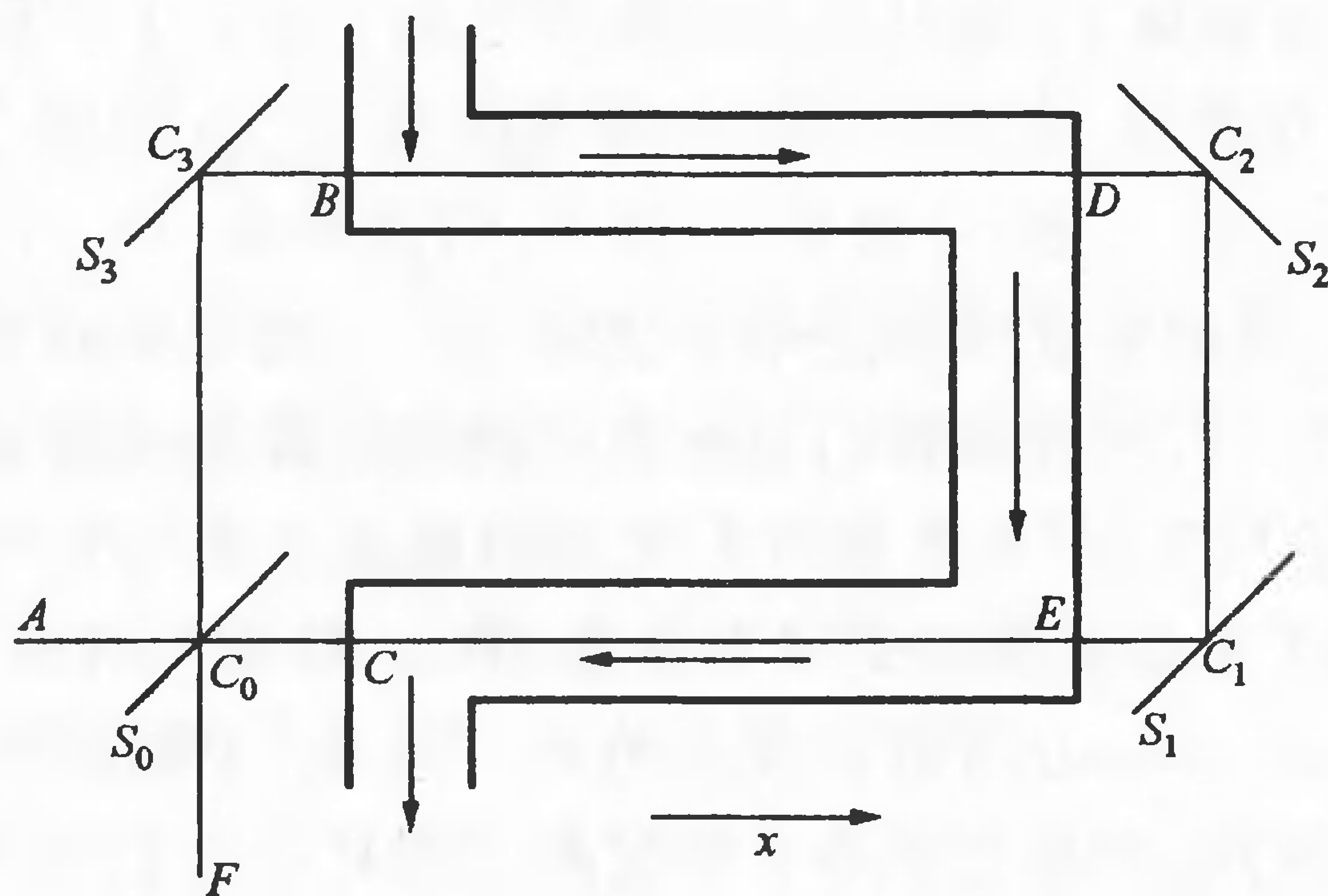


图 27

当水的流速是零时，两支光自 C_0 绕一周返至 C_0 所需的时间是相等的.当水的流速是 v 时，以太也有了运动，速率也是 v(依照拖曳理论)，因此对于第一支光而言，光相对于我们的速率等于光相对于以太的速率减去 v，亦即

$$(c/n)-v, \tag{31.1}$$

式中 n 代表水的折射率.称 BD 加 CE 的长为 l，光经过 BD 和 CE

① H. Fizeau, *C. R.* **33** (1851)349; *Ann. d. Phys. und Chem.*, *Erg.* **3** (1853) 457.

所需的时间为

$$l/\{(c/n)-v\}. \tag{31.2}$$

对于第二支光,所需时间为

$$l/\{(c/n)+v\}, \tag{31.3}$$

时间差为

$$2ln^2\beta/\{c(1-n^2\beta^2)\} \quad (\beta = v/c). \tag{31.4}$$

但事实上,自干涉图案的变化,可以算出真正的时间差

$$2l\beta(n^2-1)/\{c[1-\beta^2 n^{-2}(n^2-1)^2]\}. \tag{31.5}$$

为求得这个时间差,必须将光在水中相对于我们的速率$(c/n)-v$,$(c/n)+v$分别地改为

$$cn^{-1}-v(1-n^{-2}), \quad cn^{-1}+v(1-n^{-2}). \tag{31.6}$$

$(1-n^{-2})$在此称为拖曳系数;意思是说水没有将以太完全拖住,而只是使它有一个速率,等于v的一部分.

第二个实验是光的"行差"(абеppáция света). 在此,我们讨论一个很远的星射至地球的光的方向. 我们先取一个观察者O(在保持(29.1)的情形下,即等于选择一个坐标系,一个可以运动的坐标系),使对他而言地球在夏天的速度是沿x轴正向的,大小为v,在冬天的速度是沿x轴负向的,大小也是v.(这个观察者可以认为是太阳.)先讨论夏天在地球上观察星的情形. 今对于我们所选择的观察者O而言,星所射至地球的光的方向是AB(见图28),速率是u. 画出矢量CB,沿x方向,长度是v. AB,CB分别代表光相对于O,地球相对于O的速度,因此矢量AC代表光相对于地球的速度. 依照拖曳理论,后者的长度应等于c.

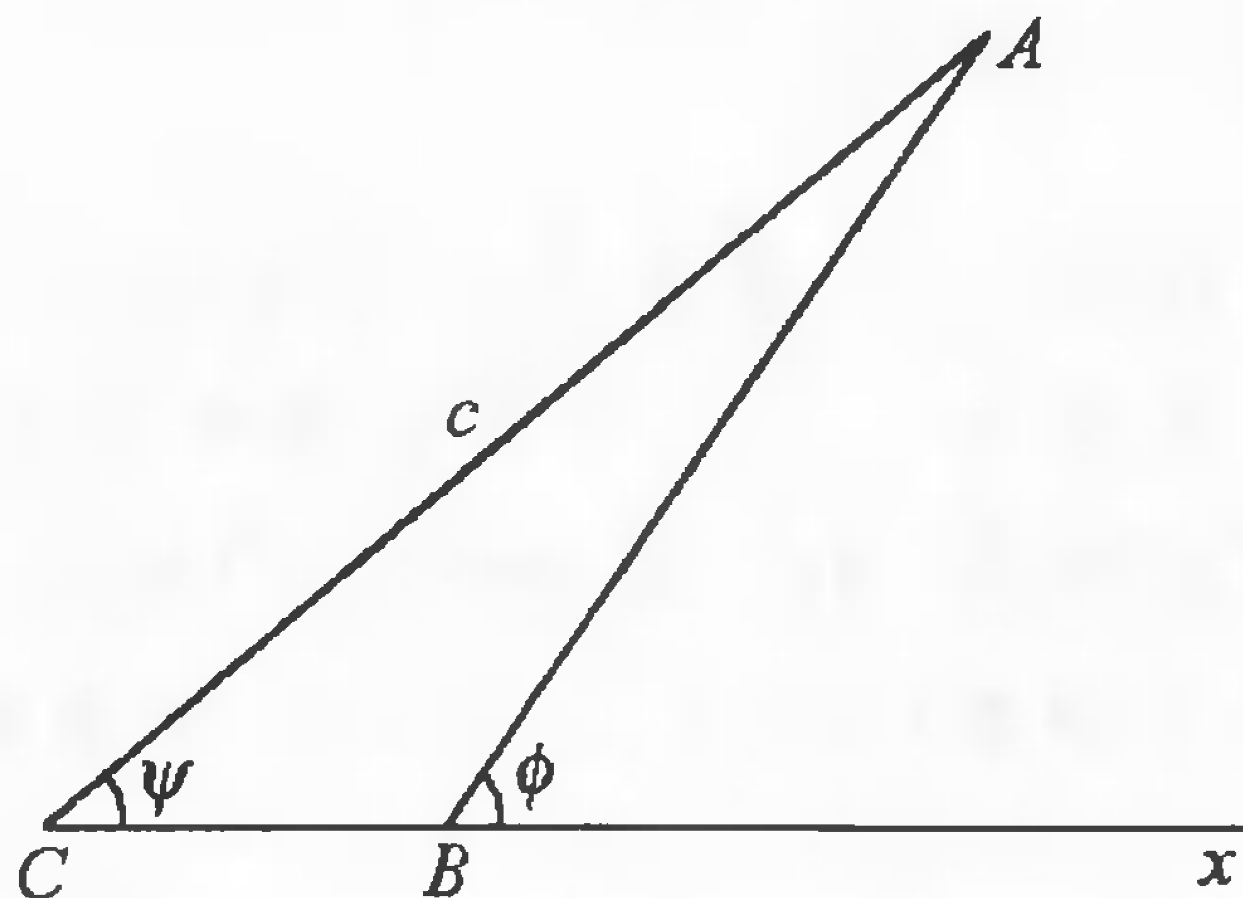


图　28

令$\angle ABx=\phi$,$\angle ACB=\psi$,得

$$\frac{c}{\sin\phi}=\frac{v}{\sin(\phi-\psi)},\tag{31.7}$$

由此得

$$\psi-\phi=-\beta\sin\phi+O(\beta^3).\tag{31.8}$$

要考虑冬天的情形，只消将 C 点画在 B 点的右方便行(见图 29). AB 的方向必须认为与前相同(因为这是由于星与太阳的相对位置而决定的). 因此称新的 ψ 为 ψ'，得

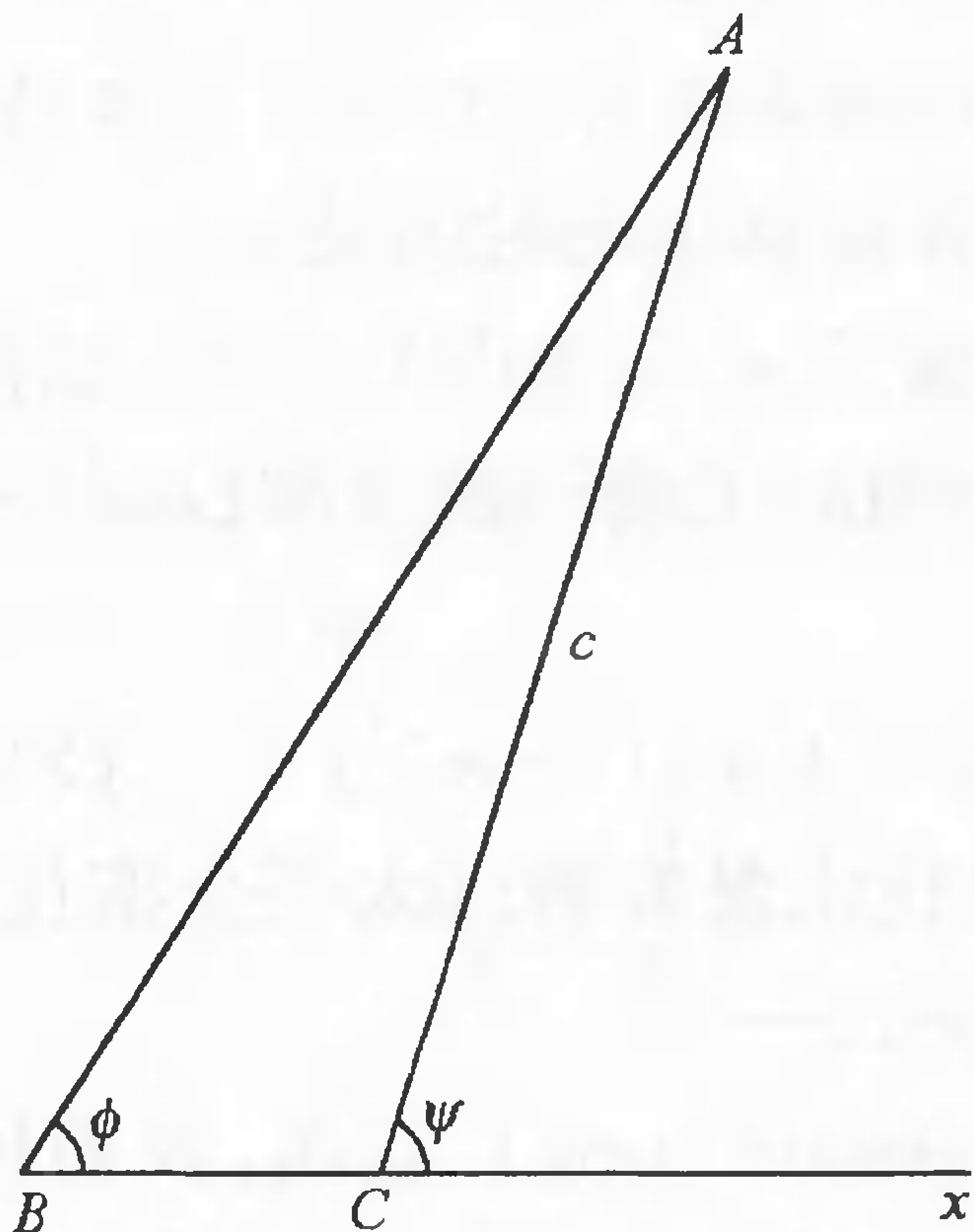


图 29

$$\frac{c}{\sin\phi}=\frac{v}{\sin(\psi'-\phi)},\tag{31.9}$$

由此得

$$\psi'-\phi=\beta\sin\phi+O(\beta^3).\tag{31.10}$$

但事实上，(31. 8)，(31. 10)的右方应该分别地为

$$\mp\beta\sin\phi+\frac{1}{2}\beta^2\sin\phi\cos\phi+O(\beta^3),\tag{31.11}$$

与(31. 8)，(31. 10)不符. 注意在以上的理论中我们由于应用拖曳理论的缘故，假定了 $AC=c$. 事实上如果令 $AB=c$，结果也与(31. 11)不符.

在历史上，我们先有斐索实验(1851 年)，后有迈克耳孙-莫雷实验(1886 年). 此外有一个与斐索实验极类似的实验，称为霍克(Hoek)实验(1868)，在此不拟介绍. 由于斐索实验的结果，我们假定当光在速率为 v 而折射率为 n 的介质中进行时，以太具有一个速率

$$v(1-n^{-2}).\tag{31.12}$$

如果接受了这个理论，那么在迈克耳孙-莫雷实验中，由于光所经过的介质是空气，$n\approx1$，那么以太的速率(31. 12)便等于零，亦即不随地球运动. 因此，便

无法解释迈克耳孙-莫雷实验.

以上的讨论告诉我们如果只用拖曳理论而不打破(29.1)式，不能同时地解释斐索实验及迈克耳孙-莫雷实验，也不能解释光行差的实验.

至于为了解释迈克耳孙-莫雷实验而不保持(29.1)的尝试，我们可以指出两个.

一个是假定对于任何观察者，光在真空中的速率都一样，都是c.严格地说，这假定是对于一群相互作等速运动的观察者，光在真空的速率都是c.这破坏了(29.7)式，因而破坏了(29.1).在下一节中我们将仔细地讨论这个假定.在这里，我们只指出它能解释迈克耳孙-莫雷实验；用它去解释这实验时只消令地球为观察者，便解决了一切.

另一个假定是斐兹杰惹(Fitzgerald)收缩[①].这个假定说如果有一个物体在某一个观察者O'看来是不动的，而在另一个观察者O看来是沿x轴以速率v运动的，那么它沿x方向的长度由O量得的值l_x同由O'量得的值l'_x有以下的关系，

$$l_x = l'_x(1-\beta^2)^{1/2}; \tag{31.13}$$

沿y或z方向的长度由O,O'量得的值则相等，

$$l_y = l'_y, \quad l_z = l'_z. \tag{31.14}$$

这个假定可以由上面所谈的假定获得；同时自这个假定及一些另外的补充假定可以求得上面的假定；这些放在以后讨论，在此我们看这个假定如何地解释迈克耳孙-莫雷实验.

令l_1,l_2代表地球上一个观察者在仪器未旋转前所量得CD，CE的长度.我们设身处地为以太，现在讨论两支光的干涉.因为斐兹杰惹收缩破坏了(29.1)，所以我们在讨论一段时间、一个运动时，必须说明观察者是谁.在此段中以下所讨论的，都是对于观察

---

① 参阅 C.F. Fitzgerald and O. Lodge, *London Transaction* **A184** (1893)727.

者以太而言的.在仪器未转动前,我们依然有(30.1)中的相对速率 $c-v$,$c+v$(如果 v 是以太所观察到的地球相对于它的速率),但是因为 CD 对于以太而言是动的,而方向又与运动方向相同,(30.1)中的 l_1 应改为 $l_1(1-\beta^2)^{1/2}$;此外(30.1)没有改变.至于向 S_2 而行的光,我们令它的方向(由以太看来)与 AB 成一个角 $\arccos(v/c)$,如此方能使这支光为 S_2 折回而遇 S_0 时可以遇到 S_0 的中点 C,与至 S_1 而折回的光相叠合,因此(30.2)依然有效.因此(30.3)的惟一变化是将 l_1 变为 $l_1(1-\beta^2)^{1/2}$.同样(30.4)的变化是将 l_2 变为 $l_2(1-\beta^2)^{1/2}$.因此以太所观察到的两个时间差(30.3),(30.4)完全相同,因而没有干涉图案的变化.注意在此我们没有讨论地球上观察者所应该观察到的结果.

必须强调地指出:第一个尝试是更本质的,而第二个尝试及其他类似的尝试是片面的、零星的.必须指出,第一个尝试非但解释了迈-莫实验,也直接建立了本章开始所提起两个观察者的 (x,y,z,t),(x',y',z',t') 之间的关系,这个关系又能解释上列其他几个实验,成为一个完整的而与事实相符的理论(见以下几节).其他尝试,在没有引入补充的假定前,显然不是一个完整的理论,因而是不够理想的.

§32 洛伦兹变换

现在较详地讨论解释迈克耳孙-莫雷实验而不保持(29.1)的第一个尝试.这便是假定对于许多互作相对等速运动的观察者,光速取相同的值 c.更严格地说,假定光的群速取同值 c.这带来了有名的洛伦兹变换.这个变换最初出现于洛伦兹的工作中,但完全地及正确地导出这个变换及阐明它的意义的第一个人是阿·爱因斯坦①.(不幸地,他的理论带有一些唯心的色彩,见本书§37.)由光

① A. Einstein, *Annalen der Physik*, **17** (1905), 891.

速不变的假定导出洛伦兹变换的具体讨论如下.

令 O,O' 为两个观察者,令 O 看到 O' 以速率 v 沿 x 轴正向相对于 O 而运动. 为肯定起见,令 $Ox,O'x',Oy,O'y',Oz,O'z'$ 成对地平行(即 $Ox \parallel O'x',Oy \parallel O'y',\cdots$). 又假定在 $t=0$ 时, O,O' 互相叠合,而那时 t' 也等于零. 让我们假定 O,O' 所观察任何一件事而得的 (x,y,z,t) 及 (x',y',z',t') 中有线性的关系.(所以如此假定,乃是因为这已经可以使光速对于 O,O' 取同值 c,也是因为空间时间每一点的性质应该是一样的,换句话说,是因为时空间中没有性质特殊的点.)在上述的 O,O' 的情形下,我们可以假定

$$t' = bt + gx, \tag{32.1}$$

$$x' = ax + ht, \tag{32.2}$$

$$y' = g_2 y, \tag{32.3}$$

$$z' = g_3 z, \tag{32.4}$$

式中 b,a,g,h,g_2,g_3 都是常数. 由于 O,O' 中的对称性,得

$$y = g_2 y'.$$

因此

$$y = g_2 y' = g_2(g_2 y) = g_2^2 y,$$

亦即

$$g_2^2 = 1,$$

亦即

$$g_2 = 1.$$

同理

$$g_3 = 1.$$

将 O' 认为被研究的物体,它的 x 等于 vt,它的 x' 始终为零. 亦即,当 $x=vt$ 时,被研究的物体即是 O',因此 x' 等于零;因此

$$0 = avt + ht,$$

亦即

$$h = -av. \tag{32.5}$$

以此代入(32.2)，再自(32.1)，(32.2)中求 x，得

$$x=\frac{b}{a(b+vg)}\left(x'+\frac{av}{b}t'\right). \tag{32.6}$$

在本节中我们将证明(32.2)式中 x 的系数 a 的倒数 a^{-1}，即是与 O' 一起运动的物体由 O 看来长度的收缩率(见下面(32.14))，同样(32.6)中 x' 的系数的倒数即是与 O 一起运动的物体由 O' 看来长度的收缩率. 由于 O,O' 在这一点上的对称性，得

$$a=b/[a(b+vg)]. \tag{32.7}$$

对于一支沿 x 轴正向运动的光，$x=ct$，因此

$$x'=a(x-vt)=a(ct-vt),$$

$$t'=bt+gx=bt+gct.$$

依照光速等值的假定，x' 应该与 ct' 相等. 因此

$$c(bt+gct)=a(ct-vt),$$

亦即

$$c(b+gc)=a(c-v). \tag{32.8}$$

同样地讨论沿 x 轴负向进行的光，得

$$-c(b-gc)=-a(c+v). \tag{32.9}$$

由(32.8)，(32.9)，得

$$a=b,\quad g=-av/c^2.$$

代入(32.7)，得

$$a=b=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

由此求出 g. 我们的最后结果是

$$\begin{cases} t'=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(t-vx/c^2),\ y'=y, \\ x'=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(x-vt),\ z'=z. \end{cases} \tag{32.10}$$

由此可求出

$$\begin{cases} t=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(t'+vx'/c^2),\ y=y', \\ x=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(x'+vt'),\ z=z'. \end{cases} \tag{32.11}$$

由(32.11)可以看到由 O' 看来，O 以速率 v 沿 x 轴负向运动. (32.10),(32.11)通常称为洛伦兹变换，是狭义相对论中最基本的公式.

由(32.10)式可以证明

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (32.12)$$

事实上，如果将 h 的值(32.5)代入(32.2)，得

$$x' = a(x - vt), \quad (32.13)$$

而要求(32.1),(32.13),(32.3),(32.4)的系数 b,g,a,g_2,g_3 如此地确定，使(32.12)对于任何(x,y,z,t)而言是满足的，我们也可以获得(32.10),(32.11)式. 证明在此精简. 当(32.12)成立时，我们便有以下的情形. 如果由 O 看来，光在 $t=0$ 时刻自原点出发，光速等于 c，那么(32.12)左方等于零，因此右方等于零. 现在由 O' 看来，这支光在 $t'=0$ 时刻也自原点出发，与(32.12)右方等于零的意义一起考虑，便得了由 O' 看来光速也是 c 的结论. 反之，如果有以上所谈的情形，那么(32.12)式便成立. 因此由(32.12)导出洛伦兹变换，正是想像中的事.

现在让我们讨论如何由(32.10),(32.11)获得斐兹杰惹收缩(сокращение масштабов длины)的理论.

令 A,B 两点对于 O' 而言是不动的. 令它们的时空坐标是(x_1',t_1'),(x_2',t_2'),(x_1,t_1),(x_2,t_2). O' 认为 AB 的长度是 $x_2'-x_1'$；这显然是不变的，因为 x_1',x_2' 都不变. O 认为 AB 的长度是 x_2-x_1，但 A,B 两点对于 O 而言是运动着的，$x_1=x_1(t)$，$x_2=x_2(t)$，所以长度是

$$x_2(t) - x_1(t).$$

$x_2(t)$，$x_1(t)$两个函数可以分别地由

$$x_1' = a\{x_1(t) - vt\},$$

$$x_2' = a\{x_2(t) - vt\}.$$

而求得. 将上两式相减，得

$$x_2(t)-x_1(t)=a^{-1}(x_2'-x_1')=(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}(x_2'-x_1'). \tag{32.14}$$

因此长度 x_2-x_1 与时间 t 无关而比 O' 所量得的长度小 $(1-\beta^2)^{1/2}$ 倍. 至于由(32.10)去证明沿 y,z 方向的长度对 O,O' 是一样的，是极显然的，不必多提. 用同样方法，可以证明与 O 一起运动的两点 A,B，由 O' 看来它们沿 x 方向的距离比由 O 看来的距离小，小 $(1-\beta^2)^{1/2}$ 倍. 以上便是由(32.10)求出斐兹杰惹收缩的讨论.

除了上面所述的斐兹杰惹收缩外，(32.10)另有一个影响，称为钟的推迟(запаздывание часов). 具体地讲，这是说一个对 O' 而言是不动的钟，由 O 看来觉得它比一个对 O 不动的钟走得更慢. 证明如下. 一个对 O' 不运动的钟，x 是不变的. 令此钟的分针走一全周；令此过程的始终时刻在 O,O' 看来为 t_1,t_2,t_1',t_2'. 由于

$$t_1=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(t_1'+vx'/c^2),$$

$$t_2=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(t_2'+vx'/c^2),$$

得

$$t_2-t_1=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(t_2'-t_1'). \tag{32.15}$$

因此在上述过程中，$t_2'-t_1'$ 等于一小时，而 t_2-t_1 大于一小时，亦即是当一个对 O' 不动的钟的分针走一周后，O 觉得时间已过去了比一点钟还多的时间. 换句话说，O 觉得那个钟走慢了.

以上两点是洛伦兹变换的直接结果，是光速不变的假定的必然结果. 这似乎是一时不易接受的，但只消我们认识到了(x,y,z,t)，(x',y',z',t')中可能有不同于(29.1)的关系，便不难接受这些较新的观念.

我们可以将(32.10)推广至 $\boldsymbol{v}$ 不在 x 轴方向的情形. 假定 $Ox,O'x',Oy,O'y'$ 等依旧成对地平行，假定 $\boldsymbol{v}$ 用这些坐标轴后成为(v_x,v_y,v_z). 取轴 Ox^*，$O'x^{*\prime},Oy^*,O'y^{*\prime},\cdots$，成对地平行，使得 $\boldsymbol{v}$ 在 Ox^*,Oy^*,Oz^* 坐标中成为$(v,0,0)$. 用这些坐标轴后的坐标 $x^*,y^*,z^*,x^{*\prime},y^{*\prime},z^{*\prime}$ 及时间 t,t' 显然地

满足(32.10)，(32.11)式. 通过(x^*, y^*, z^*)与(x, y, z)的关系，$(x^{*\prime}, y^{*\prime}, z^{*\prime})$与$(x', y', z')$的关系，便可以求出$(x, y, z, t)$与$(x', y', z', t')$的关系，这个关系如下：

$$\begin{cases} x' = \{1+(\gamma-1)v_x^2/v^2\}x + (\gamma-1)v_xv_yy/v^2 + (\gamma-1)v_xv_zz/v^2 - v_x\gamma t, \\ y' = (\gamma-1)v_yv_xx/v^2 + \{1+(\gamma-1)v_y^2/v^2\}y + (\gamma-1)v_yv_zz/v^2 - v_y\gamma t, \\ z' = (\gamma-1)v_zv_xx/v^2 + (\gamma-1)v_zv_yy/v^2 + \{1+(\gamma-1)v_z^2/v^2\}z - v_z\gamma t, \\ t' = -\gamma v_xx/c^2 - \gamma v_yy/c^2 - \gamma v_zz/c^2 + \gamma t, \end{cases} \tag{32.16}$$

式中γ代表$(1-\beta^2)^{-1/2}$. 欲自x', y', z', t'中求x, y, z, t，只消在上式中将(x', y', z', t')与(x, y, z, t)交换，同时将v_x, v_y, v_z换为$-v_x, -v_y, -v_z$. 坐标轴$OX, O'X', OY, O'Y', \cdots$不成对平行的情形也可以根据上法的精神去讨论，详细情形在此精简. 为了避免不必要的麻烦，在以后讨论中，我们只讨论$\boldsymbol{v}$沿OX轴的情形.

最后，补加一句关于自斐兹杰惹收缩求(32.10)的讨论. 已有了(32.5)及斐兹杰惹收缩的假定

$$a = \frac{b}{a(b+vg)} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \tag{32.17}$$

依然不能完全地确定b, g等. 为了确定b, g等，必须引入补充的假定. 例如我们可以引入以下的假定：即当O看到O'以速度v运动时，O'看到O以速度$-v$运动. 由这个假定及(32.6)，得

$$av/b = v,$$

亦即

$$a = b. \tag{32.18}$$

由(32.5)，(32.17)及(32.18)即可求出(32.10)中所有的系数.

§33　速度及加速度的合成

为了解释§31中的斐索实验及光行差实验起见，我们在此讨论当一个质点在O'看来有速度(u_x', u_y', u_z')时，在O看来它有什么速度(u_x, u_y, u_z). 这称为"速度的合成"的讨论.

自(30.10)式，我们知x'变至$x'+\mathrm{d}x'$，t'变至$t'+\mathrm{d}t'$，…时，x，

y,z,t 也有变化. 它们中的关系为

$$dx = d\{\gamma(x' + vt')\} = \gamma(dx' + vdt'),$$

$$dt = d\{\gamma(t' + vx'/c^2)\} = \gamma(dt' + vdx'/c^2).$$

在此,我们已知 $dx' = u'_x dt'$,因此

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2} = \frac{u'_x dt' + vdt'}{dt' + vu'_x dt'/c^2}$$

$$= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}. \tag{33.1}$$

同样

$$u_y = u'_y/\{(1 + vu'_x/c^2)\gamma\}, \tag{33.2}$$

$$u_z = u'_z/\{(1 + vu'_x/c^2)\gamma\}. \tag{33.3}$$

由这些,可以求出

$$\begin{cases} u'_x = (u_x - v)/(1 - vu_x/c^2), \\ u'_y = u_y/\{(1 - vu_x/c^2)\gamma\}, \\ u'_z = u_z/\{(1 - vu_x/c^2)\gamma\}. \end{cases} \tag{33.4}$$

如果将(u'_x, u'_y, u'_z)写为 $u'(\cos\theta', \sin\theta', 0)$,那么$(u_x, u_y, u_z)$便成为 $u(\cos\theta, \sin\theta, 0)$;而$(u, \theta)$,$(u', \theta')$中有以下的关系

$$\begin{cases} u^2 = \dfrac{u'^2 + v^2 + 2u'v\cos\theta' - u'^2(v/c)^2\sin^2\theta'}{(1 + u'v\cos\theta'/c^2)^2}, \\ \tan\theta = u'\sin\theta'(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}/\{u'\cos\theta' + v\}, \end{cases} \tag{33.5}$$

$$\begin{cases} u'^2 = \dfrac{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta - u^2(v/c)^2\sin^2\theta}{(1 - uv\cos\theta/c^2)^2}, \\ \tan\theta' = u\sin\theta(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}/\{u\cos\theta - v\}. \end{cases} \tag{33.6}$$

如果 $\theta' = 0$,那么 $\theta = 0$,而同时

$$u = (u' + v)/\{1 + u'v/c^2\}. \tag{33.7}$$

由这些式子不难证明:当 $v \leqslant c$ 时,如果 $u' \leqslant c$,那么 u 也小于等于

c;如果 $u \leqslant c$,那么 u' 也小于等于 c. 换句话说,如果物体的速率原来小于 c,它便不可能由于观察者的改换而变为大于 c. 以后我们将说明有必要假定所有物体(质点)的速率都小于 c;因为观察者本身可以认为是被观察的质点,所以它的速率也将假定小于 c;假定这一点的理由在以后讨论(§35).

我们可以援用同样的方法来讨论加速度的合成. 将(33.1)式两方取微分,得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u_x &= \mathrm{d}\{(u_x' + v)/(1 + u_x' v/c^2)\} \\ &= \mathrm{d}u_x'/\{\gamma(1 + u_x' v/c^2)\}^2. \end{aligned} \tag{33.8}$$

但已知

$$\mathrm{d}t = \gamma(\mathrm{d}t' + v\mathrm{d}x'/c^2) = \gamma \mathrm{d}t'(1 + vu_x'/c^2), \tag{33.9}$$

因此得

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_x'}{\mathrm{d}t'} \frac{1}{\gamma^3(1 + vu_x'/c^2)^3},$$

亦即

$$a_x = a_x'/\{\gamma(1 + vu_x'/c^2)\}^3. \tag{33.10}$$

同样地,我们证明

$$\begin{cases} a_y = a_y'/\{\gamma(1 + vu_x'/c^2)\}^2 - \gamma vu_y' a_x'/c^2\{\gamma(1 + vu_x'/c^2)\}^3, \\ a_z = a_z'/\{\gamma(1 + vu_x'/c^2)\}^2 - \gamma vu_z' a_x'/c^2\{\gamma(1 + vu_x'/c^2)\}^3. \end{cases} \tag{33.11}$$

要求用 $a_x, a_y, a_z, u_x, u_y, u_z$ 表出 a_x', a_y', a_z' 的式子,只消在上式中将 $a_x, a_y, a_z, a_x', a_y', a_z', u_x', u_y', u_z', v$ 分别地换为 $a_x', a_y', a_z', a_x, a_y, a_z, u_x, u_y, u_z, -v$ 即行.

§34 用洛伦兹变换去解释第31节中的两个实验

让我们首先解释斐索实验[1]. 称水为观察者 O',称我们为观察者 O. 对于观察者 O' 而言,介质是不动的,因此光的速率为 c/n. 那么当光沿 $C_0CEC_1C_2DBC_3C_0F$ 进行而我们对于 CE 段中的光进行讨论时,O' 对于 O 的速度是 v,沿 x 轴负向,而 u'_x 是 c/n,因此

$$u_x = \frac{(c/n) - v}{1 - v\dfrac{c}{n}\dfrac{1}{c^2}} = \frac{(c/n) - v}{1 - \dfrac{v}{cn}}. \tag{34.1}$$

如果讨论光自 D 进行至 B 时对我们的速度,那么 $u'_x = -c/n$,而 O' 对 O 的速度为 v,沿 x 轴正向,

$$u_x = \frac{-(c/n) + v}{1 + v\left(-\dfrac{c}{n}\right)\dfrac{1}{c^2}}. \tag{34.2}$$

当 $(c/n) \gg v$ 时,(34.1),(34.2)的绝对值都是

$$\left(\frac{c}{n} - v\right)\Big/\left(1 - \frac{v}{nc}\right) \approx \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{v^2}{c}\right). \tag{34.3}$$

同样可以证明当光沿 $C_0C_3BDC_2C_1ECC_0F$ 进行时,它对于我们的速度的绝对值是

$$\frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{v^2}{c}\right), \tag{34.4}$$

因而证实了(31.6).

以上是用群速度的讨论;我们也可以用相速度来讨论. 为简单起见,只讨论光自 B 至 D 进行的情形. 假定对于 O' 而言,光波的

---

① 在这里我们用相对论中的速度合成来解释斐索实验. 但我们也可以建立以地球为观察者的电磁场方程(此时介质——水——是运动的,所以这样的场方程也称为运动介质的场方程),由此直接证明(31.6)式. 参阅 H.A. Lorentz, Lectures on Theoretical Physics, Vol. Ⅲ, p. 301. 在实质上,这说明了麦克斯韦方程对于任何观察者都有效.

振动可以用下式来描写：

$$K' \cos 2\pi\nu'\left(t' - \frac{x'}{c/n}\right). \tag{34.5}$$

换句话说，即是假定光的相速度是 c/n. 对于 O 而言，光波成为

$$K \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right), \tag{34.6}$$

式中 u 为一个还没有确定的常数. 根据 § 29 中的讨论，(29.11)与(29.12)是相等的；根据同样的精神，获得

$$2\pi\nu'\left(t' - \frac{x'}{c/n}\right) = 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right). \tag{34.7}$$

以(32.10)的右方代替上式中的 t'，x'，再令上式左右两方 t，x 的系数分别地相等，便获得

$$\nu' \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left[1 + \frac{v}{(c/n)}\right] = \nu,$$

$$\nu' \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left[-\frac{v}{c^2} - \frac{1}{(c/n)}\right] = -\nu \frac{1}{u}.$$

两式相除，即获得

$$u = \frac{(c/n) + v}{1 + v\dfrac{c}{n}\dfrac{1}{c^2}}, \tag{34.8}$$

亦即是(34.4)式.

其次，让我们讨论光行差的实验. 为此，我们称太阳为 O，地球为 O'. 先讨论夏天的情形，即 O 看到 O' 以速率 v 沿 x 轴正向运动的情形. 利用(33.6)式，再注意这个实验中的 ψ，ϕ 乃是(33.6)中的 $\pi+\theta'$，$\pi+\theta$，再假定 $u=c$，便获得了

$$\tan\psi = \sin\phi(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}/(\cos\phi + \beta). \tag{34.9}$$

由此可以算出

$$\sin\psi = \sin\phi(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}/(1 + \beta\cos\phi), \tag{34.10}$$

$$\cos\psi = (\beta + \cos\phi)/(1 + \beta\cos\phi), \tag{34.11}$$

因此

$$\sin(\psi-\phi)=-\beta\sin\phi+\frac{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}-1+\beta^2}{1+\beta\cos\phi}\sin\phi\cos\phi$$

$$=-\beta\sin\phi+\frac{1}{2}\beta^2\sin\phi\cos\phi+O(\beta^3),$$

所以 $$\psi-\phi=-\beta\sin\phi+\frac{1}{2}\beta^2\sin\phi\cos\phi+O(\beta^3).$$

同样，算出在冬天的情形下，

$$\psi'-\phi=\beta\sin\phi+\frac{1}{2}\beta^2\sin\phi\cos\phi+O(\beta^3).$$

这正是实验的结果.

注意我们也能用相速度的讨论来求得以上的结果. 为简单起见，只讨论夏天的情形. 假定光波对于 O 的相速率是 c. 假定对于 O,O' 而言，光波分别地取以下的形式

$$\begin{cases}K\cos 2\pi\nu\{t-(n_x x+n_y y+n_z z)/c\},\\ K'\cos 2\pi\nu'\{t'-(n'_x x'+n'_y y'+n'_z z')/u'\};\end{cases}\tag{34.12}$$

式中 ν',n'_x,n'_y,n'_z,u' 为一些还没有决定的常数，n' 等满足 $n'^2_x+n'^2_y+n'^2_z=1$. 依照 §29 中的讨论，以上两个波的相是相同的. 将 $t\ x\ y\ z$ 表为 $t'x'y'z'$ 的函数（利用(32.11)），将两个相的式中的 t',x',y',z' 的系数分别置为相等，得

$$\begin{cases}\nu'=\dfrac{\nu}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left\{1-\dfrac{n_x v}{c}\right\},\\ \dfrac{\nu' n'_x}{u'}=\dfrac{\nu}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left\{-\dfrac{v}{c^2}+\dfrac{n_x}{c}\right\},\\ \dfrac{\nu' n'_y}{u'}=\dfrac{\nu n_y}{c},\quad \dfrac{\nu' n'_z}{u'}=\dfrac{\nu n_z}{c}.\end{cases}\tag{34.13}$$

将上面的后三个式乘方后相加，得

$$\frac{\nu'^2}{u'^2}=\left(\frac{\nu}{c}\right)^2\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)\left(1-\frac{n_x v}{c}\right)^2,$$

再与第一个式子比较，得

$$u'=c.\tag{34.14}$$

消去 ν,ν'，便获得

$$n'_x = \frac{n_x - \beta}{(1-\beta n_x)},\quad n'_y = \frac{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} n_y}{(1-\beta n_x)},\quad n'_z = \frac{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} n_z}{(1-\beta n_x)}. \tag{34.15}$$

注意在我们的实验中，如果令光对于 O 而言，是在 xy 平面中的，与 OX 轴成角 $\pi+\phi$，正如图 28 中所示的，那么，

$$n_x = \cos(\pi+\phi) = -\cos\phi,\quad n_y = -\sin\phi,\quad n_z = 0; \tag{34.16}$$

由(34.15)及上式，得 $n'_z=0$，因此可引入 ψ，使

$$n'_x = -\cos\psi,\quad n'_y = -\sin\psi,\quad n'_z = 0. \tag{34.17}$$

这个 ψ 便是 § 31 图 28 中的 ψ. 由(34.15)，(34.16)，(34.17)得

$$\cos\psi = (\beta+\cos\phi)/(1+\beta\cos\phi),$$

$$\sin\psi = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} n_y/(1+\beta\cos\phi),$$

即是(34.10)，(34.11)式.

以上的讨论有两点意义：第一，(34.14)证明了如果光波的相速率对于某一个观察者是 c，它对于另一个观察者也是 c. 光波相速率等于 c 是麦克斯韦方程的特征之一，所以这说明在(32.10)下，我们的理论有可能使不同观察者所观察到的电磁场都适合麦克斯韦方程. 第二，光行差的实验说明了如果对于某一个观察者群速度与相速度的大小都是 c，方向相同，那么对于另一个观察者群速度与相速度的大小也都是 c，方向也相同. 群速度与相速度大小方向相同，是麦克斯韦方程在真空中的特征之一，因此这提示了在我们的理论中麦克斯韦方程对于不同的观察者都成立的可能性. 至于这个问题的解决，见本书第七章. 在此不妨指出：因为我们假定有一个观察者，对他而言麦克斯韦方程有效，因而对他而言光的群速、相速都是 c，那么由于(34.14)中的结果，我们知光对于所有的观察者的速率，无论所讨论的是群速或相速，数值都是 c.

(32.10)完满地解释了斐索及光行差实验，确是令人满意的.

§ 35　闵可夫斯基的时空[①]

因为两个观察者测量一件事情的时刻所得的结果可以不一样，便自然而然发生以下的问题.令 A,B 为两件事，它们的时空坐标对于观察者 O 而言是 $(x_{\mathrm{I}}\, y_{\mathrm{I}}\, z_{\mathrm{I}}\, t_{\mathrm{I}})$，$(x_{\mathrm{II}}\, y_{\mathrm{II}}\, z_{\mathrm{II}}\, t_{\mathrm{II}})$，对于另一个观察者 O' 而言是 $(x'_{\mathrm{I}}\, y'_{\mathrm{I}}\, z'_{\mathrm{I}}\, t'_{\mathrm{I}})$，$(x'_{\mathrm{II}}\, y'_{\mathrm{II}}\, z'_{\mathrm{II}}\, t'_{\mathrm{II}})$，那么有没有

$$t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}} > 0,$$

而

$$t'_{\mathrm{II}} - t'_{\mathrm{I}} < 0$$

的情形？如果有这样的情形，是不是意味着因果律受到了破坏？

这个问题的回答是：我们必须假定所有物体的速率都小于或等于 c；那时如果两件事中有一个可以影响另一个，它们的时间间隔 $t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}}$，$t'_{\mathrm{II}} - t'_{\mathrm{I}}$ 等等便取同样的符号.所谓"有一个可以影响另一个"，即是指可以有一个影响，自 A 传至 B，或自 B 传至 A.因此用了本段中的假定，这等于说

$$|x_{\mathrm{II}} - x_{\mathrm{I}}| / |t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}}| \leqslant c. \tag{35.1}$$

自(32.10)，得

$$t'_{\mathrm{II}} - t'_{\mathrm{I}} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{(t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}}) - \frac{v}{c^2}(x_{\mathrm{II}} - x_{\mathrm{I}})\right\}. \tag{35.2}$$

自(35.1)，知上式中右方括号第二项的绝对值比第一项的绝对值小，因此 $t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}}$ 与 $t'_{\mathrm{II}} - t'_{\mathrm{I}}$ 取同一符号.为了使当两件事之一能影响至另一个时 $t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}}$ 与 $t'_{\mathrm{II}} - t'_{\mathrm{I}}$ 取同一符号(这样因果律才能成立)，我们必须假定对于所有的观察者，所有物体的速率都小于或等于 c.事实上这只需要这句话对于一个观察者有效，因为自一个观察者换至另一个观察者，物体的速率不能由小于 c 的值变为大

---

① H. Minkowski: Raum und Zeit, *Phys. ZS.* **10** (1909)104.

于 c 的值.

A,B 两件事在四维空间中的距离,可以用四个数字

$$(x_{\mathrm{II}}-x_{\mathrm{I}},y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{I}},z_{\mathrm{II}}-z_{\mathrm{I}},c(t_{\mathrm{II}}-t_{\mathrm{I}})) \tag{35.3}$$

来描写.它们与

$$(x'_{\mathrm{II}}-x'_{\mathrm{I}},y'_{\mathrm{II}}-y'_{\mathrm{I}},z'_{\mathrm{II}}-z'_{\mathrm{I}},c(t'_{\mathrm{II}}-t'_{\mathrm{I}})) \tag{35.4}$$

的关系即是(32.10)的关系.此后,我们常将(32.10)中的(x,y,z,ct),(x',y',z',ct')写为(x_1,x_2,x_3,x_0),(x'_1,x'_2,x'_3,x'_0),同时将(32.10)式写为

$$x'_\mu=\sum_\nu a^\nu_\mu x_\nu \quad (\mu,\nu=1,2,3,0). \tag{35.5}$$

显然地(35.3),(35.4)也满足(35.5)式.此后,如果 O,O' 测量某一个物理量,获得值 $A_1,A_2,A_3,A_0,A'_1,A'_2,A'_3,A'_0$,而 A,A' 等满足

$$A'_\mu=\sum a^\nu_\mu A_\nu,$$

那么我们称$(A_1A_2A_3A_0)$组成一四维空间的矢量,而称 $A_1,A_2,A_3,A_0,A'_1,A'_2,A'_3,A'_0$ 为对于不同坐标系统的分量.以上说$(x_1x_2x_3x_0)$及$(x_{\mathrm{II}}-x_{\mathrm{I}},y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{I}},z_{\mathrm{II}}-z_{\mathrm{I}},c(t_{\mathrm{II}}-t_{\mathrm{I}}))$都组成矢量.

矢量(35.3)可以用

$$(x_{\mathrm{II}}-x_{\mathrm{I}})^2+(y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{I}})^2+(z_{\mathrm{II}}-z_{\mathrm{I}})^2-c^2(t_{\mathrm{II}}-t_{\mathrm{I}})^2 \tag{35.6}$$

的值来分类.(35.6)是一个形式的不变量;意思是说:将(35.6)中的符号右上角上加上一撇后,数值是不变的.因此如果(35.6)对于某一个观察者取正值,则它对于所有的观察者也都取正值.同样,当它对于某一个观察者取负或零值,则它对于所有的观察者也都取负或零值.使(35.6)取正值的矢量称"类空矢量",使(35.6)取负值的矢量称为"类时矢量".

对于一个"类空矢量",不可能有一个观察者存在,使对他而言,

$$x_{\mathrm{II}}-x_{\mathrm{I}}=y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{I}}=z_{\mathrm{II}}-z_{\mathrm{I}}=0, \tag{35.7}$$

因为这意味着(35.6)等于零或小于零. 对于一个"类时矢量",不可能有一个观察者存在,使对他而言, $t_{\text{II}}-t_{\text{I}}=0$,因为这意味着(35.6)大于零或等于零. 如果(35.3)是一个"类空矢量", A,B 两点中不可能有一个影响另一个;因为当 A 有影响给 B 时,

$$\{(x_{\text{II}}-x_{\text{I}})^2+(y_{\text{II}}-y_{\text{I}})^2+(z_{\text{II}}-z_{\text{I}})^2\}^{\frac{1}{2}}/(t_{\text{II}}-t_{\text{I}})\leqslant c, \tag{35.8}$$

与(35.6)>0 矛盾; B 有影响给 A 时,

$$\{(x_{\text{II}}-x_{\text{I}})^2+(y_{\text{II}}-y_{\text{I}})^2+(z_{\text{II}}-z_{\text{I}})^2\}^{\frac{1}{2}}/(t_{\text{I}}-t_{\text{II}})\leqslant c, \tag{35.9}$$

也与(35.6)>0 矛盾. 如果(35.3)是一个"类时矢量", A,B 是可以互相影响的. 在这时,(35.1)是满足的,因此对于不同的观察者, $t_{\text{II}}-t_{\text{I}}$ 取同样的符号. 因此对于"类时矢量", $t_{\text{II}}-t_{\text{I}}$ 的符号是一个不变量. $(t_{\text{II}}-t_{\text{I}})>0$ 的矢量称为"将来类时矢量",意味着"B 在 A 发生后才发生", $(t_{\text{II}}-t_{\text{I}})<0$ 的矢量称为"过去类时矢量",意味着"B 在 A 的过去曾发生".

对于一个类空矢量,我们能证明存在着一个观察者,使对他而言,这个矢量是纯空间的,意即是 $t_{\text{II}}-t_{\text{I}}=0$. 证明如下: 令对于某一个观察者 O^*,

$$y^*_{\text{II}}-y^*_{\text{I}}=z^*_{\text{II}}-z^*_{\text{I}}=0. \tag{35.10}$$

那么,对于它便有

$$|x^*_{\text{II}}-x^*_{\text{I}}|>c|t^*_{\text{II}}-t^*_{\text{I}}|. \tag{35.11}$$

令 O^* 看到观察者 $\hat{O}$ 以速率

$$c^2(t^*_{\text{II}}-t^*_{\text{I}})/(x^*_{\text{II}}-x^*_{\text{I}}) \tag{35.12}$$

相对于 O^* 沿 x 轴正向运动. (这是可能的,因为上式值的绝对值小于 c.)对于 $\hat{O}$ 而言,

$$\hat{t}_{\text{II}}-\hat{t}_{\text{I}}=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\left[t^*_{\text{II}}-t^*_{\text{I}}-\frac{c^2(t^*_{\text{II}}-t^*_{\text{I}})}{(x^*_{\text{II}}-x^*_{\text{I}})}\frac{(x^*_{\text{II}}-x^*_{\text{I}})}{c^2}\right]=0;$$

这即是我们所欲证明的. 对于一个“类时矢量”,我们能证明存在着一个观察者,使对他而言,矢量是纯时间的,即 $x_{\mathrm{II}}-x_{\mathrm{I}}=y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{I}}=z_{\mathrm{II}}-z_{\mathrm{I}}=0$. 证明如下：令对于某一个观察者 O^*,(35.10)式成立,那么对于它,

$$|x_{\mathrm{II}}^* - x_{\mathrm{I}}^*| < c|t_{\mathrm{II}}^* - t_{\mathrm{I}}^*|. \tag{35.13}$$

令 O^* 看到观察者 $\hat{O}$ 以速率

$$(x_{\mathrm{II}}^* - x_{\mathrm{I}}^*)/(t_{\mathrm{II}}^* - t_{\mathrm{I}}^*) \tag{35.14}$$

沿 x 轴正向运动. 显然地,对于 $\hat{O}$ 而言,

$$\hat{x}_{\mathrm{II}} - \hat{x}_{\mathrm{I}} = 0.$$

以上的讨论可以用图解(见图 30)来叙述. 令 A 点在原点(即令 $x_{\mathrm{I}}=y_{\mathrm{I}}=z_{\mathrm{I}}=t_{\mathrm{I}}=0$),而同时取去 $x_{\mathrm{II}}y_{\mathrm{II}}z_{\mathrm{II}}t_{\mathrm{II}}$ 的“Ⅱ”字样. 在图中我们只画出 x,t 坐标,把 y,z 坐标省略. 这些步骤简化了图解,但不影响问题的实际内容.

令 x,t 为某一个观察者 O 所观察到 B 事件的坐标. 令 $w=ct$. 作 x 轴,与 w 轴互相垂直(见图 30),那么 B 事件即相当于图中一点 (x,w). 当 B 点有变化时,这点便画出一曲线. 这曲线称为 B 的世界线. 由于速率小于或等于 c 的限制,

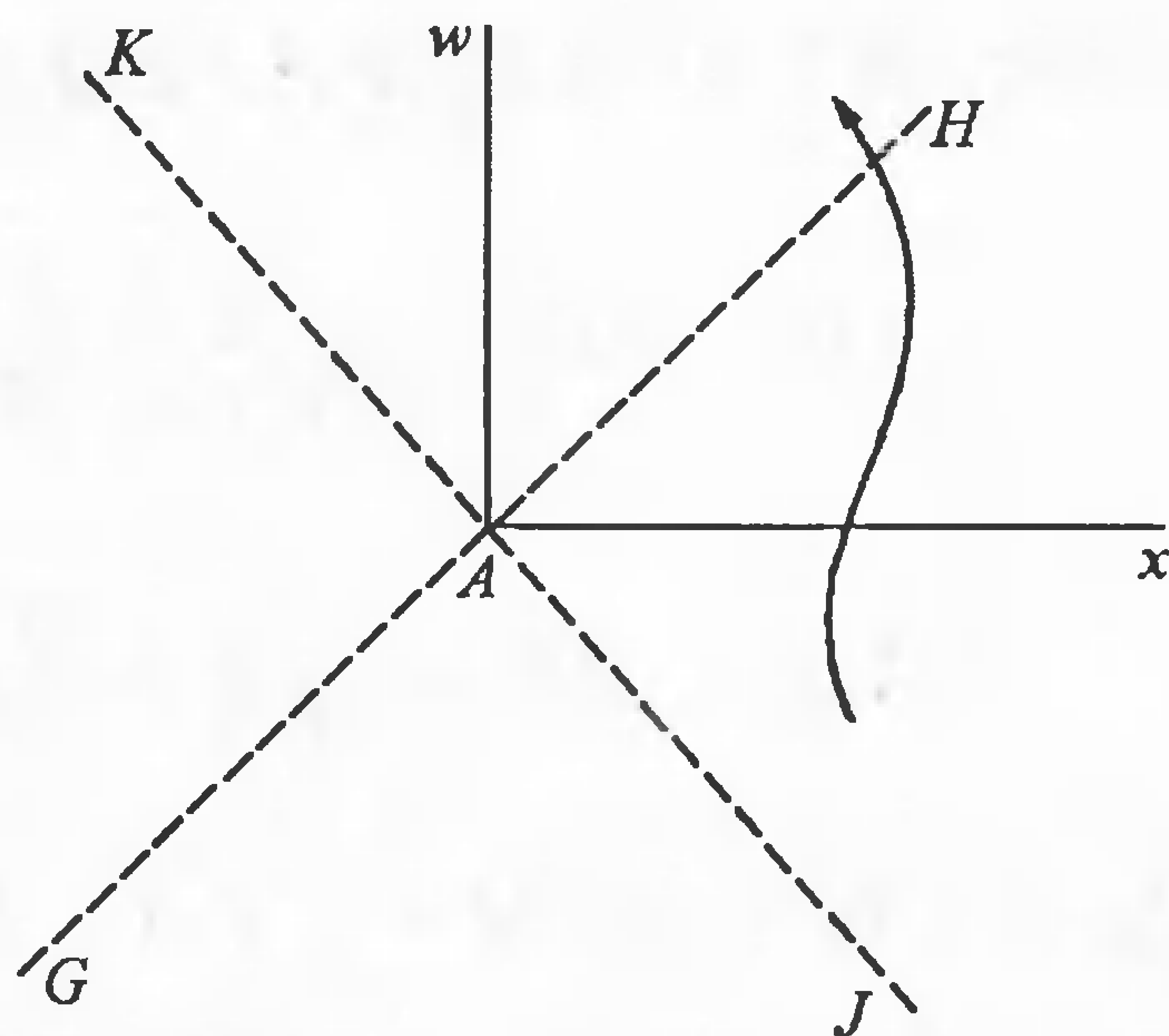


图　30

$$(\mathrm{d}x/\mathrm{d}w) \leqslant 1, \tag{35.15}$$

亦即世界线上各点的斜率大于 1. 经过原点的光波乃是图中的 GH,JH 线,与轴成 45°. 极容易证明：自原点 A 画出的矢量,如果夹在 AJ,AH 中,或夹在 AK,AG 中,必然是“类空矢量”；自 A 画出的矢量如果夹在 AK,AH 中,必然是“将来类时矢量”,如果夹在 AG,AJ 中,必然是“过去类时矢量”. 也很容易证明：A 所能影

响到的任何事情,必须夹在 AK,AH 中;能影响 A 的任何事情,必须夹在 AG,AJ 中. 这些证明,可由读者自己补充. 推广至四维空间时,JAK,GAH 两条线便成为四维空间中的一个锥面,称为光锥面,相当于 KAH 的一部分称为"将来光锥面",相当于 GAJ 的一部分称为"过去光锥面".

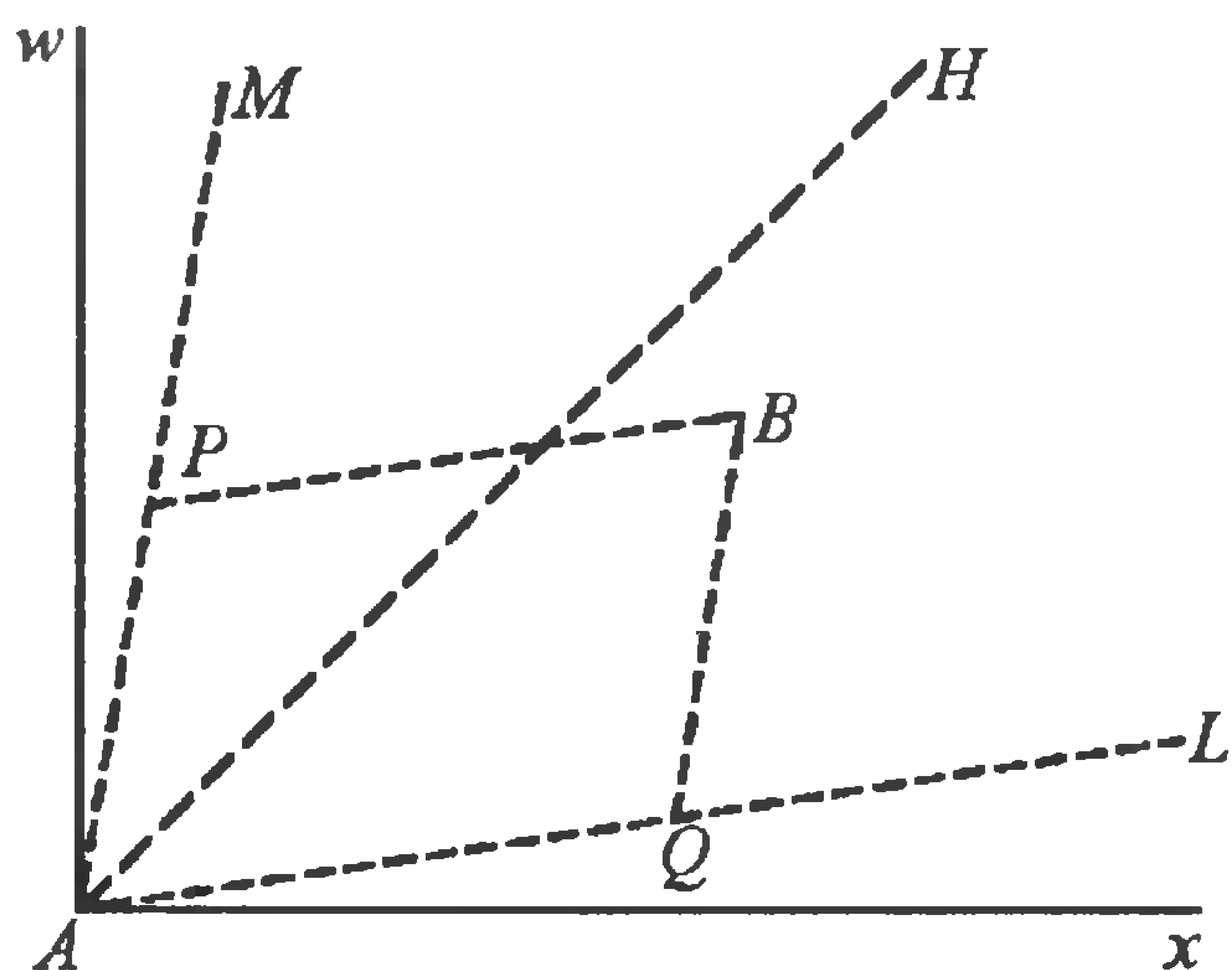


图 31

令 O' 为另一个观察者,而 O 看到他以速率 v 沿 x 轴正向运动. 作 AL,AM 两线(见图 31),使

$$\angle wAM = \angle LAx = \arctan v/c. \tag{35.16}$$

因 $v<c$,这个角比 45°小,因此 AM 夹在 Aw,AH 中,AL 夹在 AH,Ax 中. 经过 B 点作 AM,AL 的平行线,得平行四边形 $APBQ$. 现在我们能证明

$$\begin{cases} AP = BQ = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}, \quad w' = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}ct', \\ AQ = BP = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}x' \quad (\beta = v/c). \end{cases} \tag{35.17}$$

证明如下:称 $\angle wAM = \angle LAx$ 为 φ. 线段 AP 及 PB 在 Aw 上的投影的和是 w,在 Ax 上的投影的和是 x;因此

$$AP\cos\varphi + PB\sin\varphi = w,$$

$$AP\sin\varphi + PB\cos\varphi = x.$$

由此得

$$\begin{aligned} AP &= \frac{-x\sin\varphi + w\cos\varphi}{-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \\ &= \frac{(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}[-\beta x + w]}{1-\beta^2} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} w', \end{aligned}$$

$$PB = \frac{+x\cos\varphi - w\sin\varphi}{-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

$$= \frac{(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}[+x - w\beta]}{1-\beta^2} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} x',$$

即是所需要的证明.

因此我们可以将 AL 认为是 Ax' 轴，AM 认为是 Aw' 轴. A, B 在这两个轴上的分量，除了一个常数倍外，即是 x' 及 w'.

因此，如果 B 夹在 AH，AX 中，我们可以选择一个观察者 O'，使他的 AL 经过 B. 对于这个观察者而言，B 点的 t 坐标等于零. 如果 B 夹在 Aw，AH 中，我们可以选择一个观察者 O'，使他的 AM 经过 B. 对于这个观察者而言，B 点的 x 坐标等于零. 这便是以前所谈过的. 对于 AH 上的点，$x'=w'$，因此光对于 O' 而言速率也是 c，这也是以前所讨论过的. 同样，以上所有的数学上的讨论，都可以用图解法来讨论. 在这里，意义显得更一目了然.

以上的讨论，称为闵柯夫斯基的时空的讨论.

§ 36　相对论原则

让我们在这里说明什么叫做相对论原则.

让讨论的对象是一个质点，那么观察者 O 看到它的运动式为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{36.1}$$

这适合某些微分方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{36.2}$$

这便是牛顿运动定律，式中 m 代表质量，F_x, F_y, F_z 代表外界所施于质点上的力. 显然，O' 所量同样的物理量而获得的值 x', y', z', t', F'_x, F'_y, F'_z, m' 与 $x, y, z, t, F_x, F_y, F_z, m$ 有关，而 O' 所看到 x', y', z' 所适合的微分方程是由这些关系及(36.2)中求出. 如果求出的微分方程与(36.2)取同样的形式，亦即是说求出的微分方程为

$$m'\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2}=F'_x,\quad m'\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t'^2}=F'_y,\quad m'\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t'^2}=F'_z,\tag{36.3}$$

那么我们说(36.2)满足“相对论条件”，或者更严格地说，对于以上所述的那些关系而言满足相对论条件. 要求微分方程满足相对论条件称为相对论原则.

如果讨论的对象是一个场或几个场，那么由观察者 O 看来，在各时各地都有一个场或几个场；如果让场的强度方向用 M_1，M_2，M_3，…来代表，得

$$M_1=\psi_1(x,y,z,t),\quad M_2=\psi_2(x,y,z,t),\quad \cdots.\tag{36.4}$$

一般讲来，它们适合某些微分方程：

$$\Phi_1\left(M_1,M_2,\cdots,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,\quad \Phi_2(\cdots)=0,\quad \cdots,\tag{36.5}$$

上式的左方 Φ_1，Φ_2，…除包含 M_1，M_2，…等外，还包含它们对于 x，y，z，t 的一次或高次偏微商. 显然地，O' 所量同样性质的物理量而获得的值 x'，y'，z'，t'，M'_1，M'_2，…等与 x，y，z，t，M_1，M_2，…等有关系，而 O' 所看到 $M'_1M'_2M'_3$…所适合的微分方程是由这些关系与(36.5)中求出，如果求出的微分方程与(36.5)取同样的形式，亦即取

$$\Phi_1\left(M'_1,M'_2,\cdots,\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'},\frac{\partial}{\partial t'}\right)=0,\quad \Phi_2(\cdots)=0,\quad \cdots\tag{36.6}$$

的形式，那么我们说(36.5)满足相对论条件，或者更严格些说，对于上述这些关系而言满足相对论条件.

注意我们要求微分方程取同样的形式，而不要求像(36.1)，(36.4)等式取同样的形式.

显然地，一个任意取来的微分方程不一定满足相对论条件，即在两个观察者所量同样性质的物理量而获得的值中，不一定存在着一个适当关系，使得由它们和某一个对 O 的微分方程而求出的

对 O' 的微分方程，取同样的形式. 可以指出，当 $x'y'z't'$ 与 $x\ y\ z\ t$ 满足(29.1)时，(36.2)是满足相对论条件的. 在那里，我们除了令 $x\ y\ z\ t$ 与 $x'y'z't'$ 满足伽利略变换的关系外，再令

$$m = m',\quad F_x = F'_x,\quad F_y = F'_y,\quad F_z = F'_z,$$

便完成了证明. 换句话说，对于伽利略变换而言，(36.2)是满足相对论条件的.

用了(32.10)后，光波的群速率和相速率对于所有的观察者都是 c. 这样麦克斯韦方程便有可能对于所有的观察者都成立，换句话说，麦克斯韦方程有可能满足相对论条件. 让我们在此讨论有什么物理上的理由使我们相信它满足相对论条件.

理由之一便是光波的群速率和相速率对于所有的观察者都是 c. 这一点以上已经提起. 理由之二可以在斐索实验中看出. 那里实验的解释要求我们假定光对于观察者"水"而言速率是 c/n，亦即是对于观察者"水"而言，电磁波的速率是用在静止介质中的麦克斯韦方程所算出来的速率. 另一方面，以地球为观察者，用在运动的介质中的麦克斯韦方程，也能算出所需的结果(31.6). 作为理由之三，讨论以下的实验：

A，B 为两个电子，电荷为 e，对于地球而言是不动的(见图 32). 令对于某一个观察者 O 而言，麦克斯韦方程成立. 现在设身处地为 O，讨论 A，B 所受的力. 首先，O 看到 A，B 以同样速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 令 $\boldsymbol{v}$ 的方向沿正 x 轴，令 O 看到矢量 AB 为 (x,y,z). 那么由 O 看来，A 电荷在 B 点所产生的电磁场为

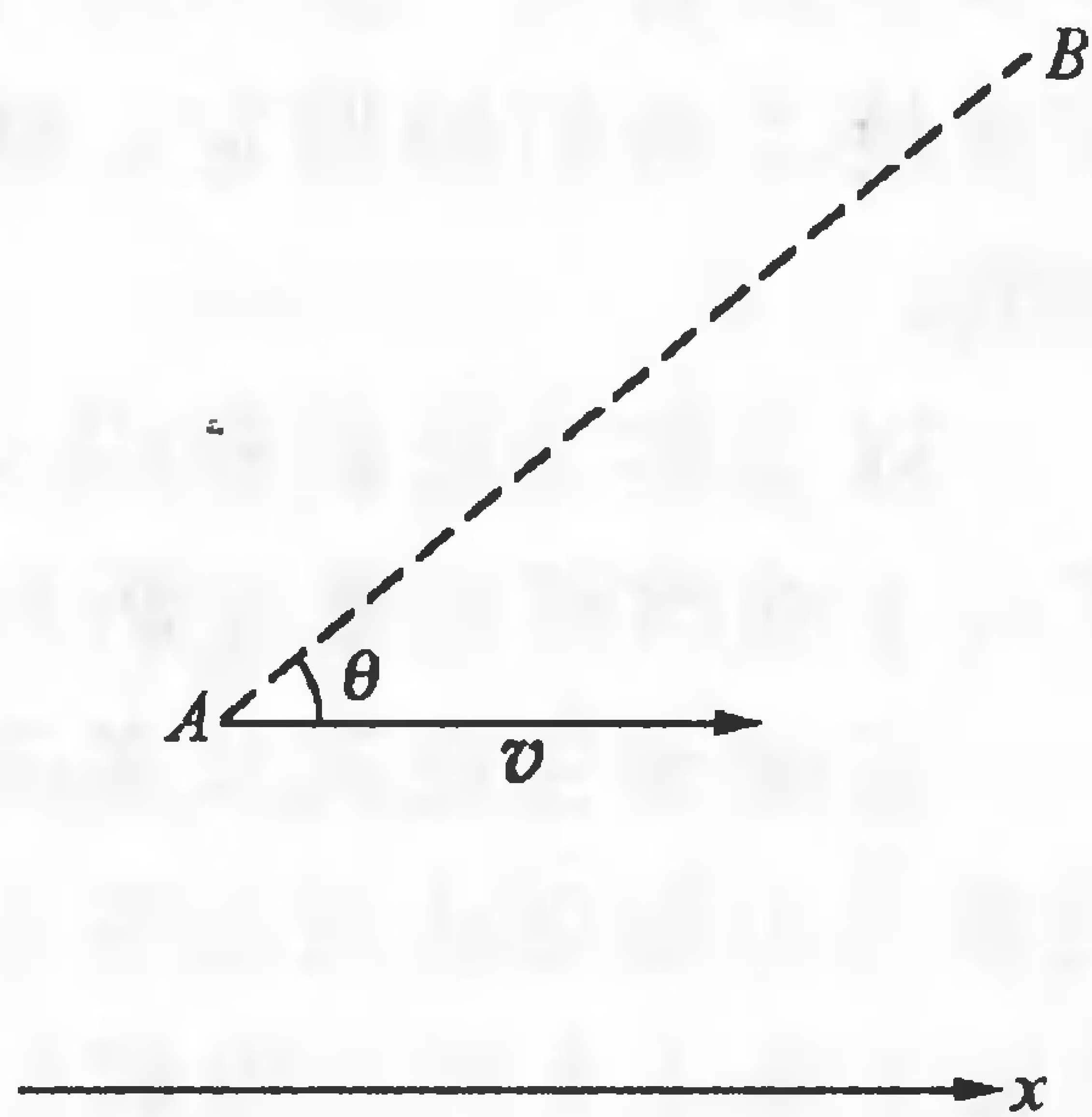


图　32

$$E_x = (1-\beta^2)ex/\kappa^3,$$
$$E_y = (1-\beta^2)ey/\kappa^3,$$
$$E_z = (1-\beta^2)ez/\kappa^3,$$

$$H_x = 0,$$
$$H_y = -\, e\beta(1-\beta^2)z/\kappa^3,$$
$$H_z = +\, e\beta(1-\beta^2)y/\kappa^3,$$
$$\kappa^2 = x^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2),$$

(参阅§13,(13.20)).将此代入

$$e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right),$$

可算出 B 所受的力.同样可以算出 B 电荷在 A 处所产生的电磁场,算出 A 所受的力.这两个力大小相同而方向相反,产生一个力偶,大小为

$$e^2\beta^2 \sin 2\theta/2\kappa + O(\beta^3),$$

方向为$(\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{AB})$的方向.因此 O 应该看到一个力偶,将 AB 线转动.

如果对于观察者地球而言,麦克斯韦方程成立,那么对观察者地球而言,两个电荷是静止的,所产生的电场是沿 AB 的,所产生的磁场是零,因此 A,B 所受力是沿 AB 的,因而没有力偶.如果对于观察者地球而言,麦克斯韦方程不成立,那么一般讲来,应该多多少少地看到一些力偶.但事实上,地球上的观察者看不到力偶.这支持了我们的假定:对于观察者地球而言,麦克斯韦方程是成立的.

以上称为屈路顿(Trouton)实验.还有其他许多实验,都证明了对于地球而言麦克斯韦方程是成立的.

但地球在夏天及冬天的运动是不相同的.我们可以将各个不同季节的地球认为是各个不同的观察者,所以上面所说的即是对于以上各个不同的观察者而言麦克斯韦方程都成立.

根据以上的讨论,我们有理由相信对于不同的观察者,麦克斯韦方程都成立,换句话说,我们相信它适合相对论条件.至于它是否真正能够适合相对论条件,须看在 $x,y,z,t,E_x,E_y,E_z,H_x,H_y,H_z,\rho,\boldsymbol{j}$ 等及 $x',y',z',t',E'_x,E'_y,E'_z,H'_x,H'_y,H'_z,\rho',\boldsymbol{j}'$ 等量中能

否找到适当的关系,使对 O 的麦克斯韦方程通过这些关系后变为对 O' 的麦克斯韦方程. 显然, x,y,z,t 及 x',y',z',t' 中的关系必须是(32.10),因为只有这个关系,才能使电磁波的速率对于所有的观察者都等于 c. 在第七章 § 39 中我们将具体地找到 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\rho,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{E}',\boldsymbol{H}',\rho',\boldsymbol{j}'$ 中的具体关系,从而证明麦克斯韦方程的确是合乎相对论条件的. 以上的讨论可以说为：实验要求相对论条件,而理论予以证实. 这显然是令人满意的.

由光速不变的事实推出了(32.10),便不得不推翻了(29.1). 在(32.10)的变换下, (36.2)是不适合相对论条件的. 但(29.1)是(32.10)的一种近似(即 $v\gg c$ 时的近似),因此我们猜想(36.2)是一个对于(32.10)而言是适合相对论条件的运动方程式的近似. 事实上这的确如此. 这一点以后讨论(§ 47).

在此我们必须强调：要不要相对论条件,最后由实验决定;决定要满足相对论条件的理论后,才去建立如此的理论,或去检验已有的理论是否满足相对论条件.

§ 37　与相对论有关的唯心思想的批判

自从相对论被建立的日子起,便产生了许多对于时间空间的唯心论思想. 我们在此作一个简单的叙述及批判,至于详细情形,可参阅 Г.А. 库尔萨诺夫所著《关于空间与时间的辩证唯物论》①及卡尔波夫所著《论爱因斯坦的哲学观点》②两篇论文.

第一种唯心思想是：既然两件事情的时间间隔、空间距离对于不同的观察者是不同的,那么时空是带有“主观”性质的. 这一点的错误是极易看出的. 的确,时空是带有相对性的,即两件事的时空间隔可以对于不同的观察者取不同的值,但这个相对性本身是

① 物理通报,第二卷,第二期,第 33 页.

② 科学通报,第二卷,第十二期,第 1231 页.

客观的. 换句话说,决定时空间隔如何对不同的观察者取不同的值的因素只是观察者的客观的运动情况,而同他们的主观意图无关. 某一个物体离观察者 A 近,离观察者 B 远,因此距离是相对的,但在以上情形下,能不能说这"物体的位置"没有客观的意义呢?在以上情形下,A 觉得这物体大,B 觉得这物体小,能不能说"这物体的大小"没有客观的意义呢?

第二种唯心思想是:既然时间间隔是相对的,而事情的先后对所有的观察者是一致的(指能互相影响的事),因此时间间隔的值没有绝对意义,而时刻的先后是有绝对意义的,因此时间只是"事情的排列". 又因排列是"感觉"的,因而时间存在于"感觉"中. 对此的批判是:虽然时间间隔对于不同的观察者取不同的值而因此具有相对性,但**这个相对性是客观的实在**(这一点已在上面提到). 承认了时间的相对性的客观性,便完全没有必要将时间认为只是事情的排列. 事实上,时间是物质运动、物质存在的形式;将时间认为事情的排列,至少忽略了时间的量的方面的性质,而这一些性质是不容忽略的. 更重要的一点是,排列绝不是"感觉"的,两个事情的先后是客观事实的一种情形. 因此,说时间存在于感觉中完全是错误的.

第三种唯心思想认为:时间必须通过测量而才有意义,测量在远处一件事情所发生的时刻,应该利用光波. 令光在这事情发生时由这事情发生处发出,在 t_f 时到达我们这里,那么令 u 代表光相对于我们的速度,再令 l 代表这事情发生处离我们的距离,我们便称 $t_f-(l/u)$ 为这件事发生的时刻 t,以 $t_f-(l/u)$ 作为时刻 t 的定义. 因此要决定时间,必先决定光速 u. 但要知道光速,必须知道如何决定时间,因此问题便无法解决. 这种唯心思想在此认为只有一个方法解决这个问题,乃是寻出地球相对于以太的速度 v,那么光相对于地球的速度 u 便是光相对于以太的速度 c 减去地球相对于以太的速度 v. 用了这个 u,便能用 $t=t_f-l/u$ 来决定时间. 这种唯心思想以为迈克耳孙-莫雷实验的结果是"不可能寻出以太"来,

因此以上的方法便不能应用. 因此只好索性假定 $u=c$,用 $t=t_f-(l/c)$来决定事情所发生的时刻 t,亦即以 $t_f-(l/c)$作为事情所发生的时刻 t 的定义. 同样,他们用光速等于 c 来定义两件事情是否在同时发生.

这样的思想见于爱因斯坦原著,见于许多理论物理教科书及专著[①]. 这些论文、教科书、专著虽然有时不明显地说出以上的话,但实质上(全部地或部分地)包含了以上的思想. 这些论著中较好的一部分也是用 $t=t_f-(l/u)$来定义时间(或同时性)的,但认为迈克耳孙-莫雷实验的作用乃是为我们解决了不知如何挑选 u 的困难,比上面所叙述的对于迈克耳孙-莫雷实验的误解,是略好一些的(例如注①中的第三个文献).

因为这种思想用了物理上的术语,使寻常的人批判它感觉困难,因此必须在此加以批判. 首先,时间不是通过测量而才有意义的;时间空间是客观存在着的事物运动的形式,在各种运动各种实验中反映出来,使我们对它们有所认识. 它不能是为我们所定义的,因为这样一来,我们可以下不同的定义而获得不同的时间. 迈克耳孙-莫雷及其他实验主要是证明了光速对于所有的观察者都是 c,而这里决定光速的时间即是寻常的时间,即是在客观事物运动中存在着而在许多其他实验中已反映给我们的时间. 将迈克耳孙-莫雷实验的结果解释为“寻不到以太”,是不完全的.

我们的意思是: 时间是客观的实在,因此先有“时间”(通过许多实验——其中也包含与电磁场有关、与麦克斯韦方程有关的实验——而对它有所认识),然后讨论用这个时间而算出来的光速;这个光速在迈克耳孙-莫雷实验及其他实验中被证实对于所有的

---

① A. Einstein, *Annalen der Physik*, **17** (1905)891 (注意在 892—894 页中的讨论).

A. Einstein, The Theory of Relativity, Chap. 8, Chap. 9 (1921).

G. Joos, Theoretical Physics, Chap. 10.

C. Møller, The Theory of Relativity §15, §16 (1952).

观察者都等于 c. 我们可以利用这个事实来检验两件事情是否在同时发生,而不应该用光速等于 c 来作两件事的同时性的定义.

以上所谈的唯心思想,显然是属于马赫主义类型的.

与相对论有关的唯心思想,还有一种,称为"唯能论",这一点将在以后讨论. 此外,近代物理学家有趋势认为相对论条件是一切理论都必须满足的条件,因而在没有讨论有什么事实根据前,便引入了相对论条件. 这样的精神,把相对论条件放在认识过程以上,把它认为是超乎认识过程的,显然是反辩证唯物主义的.

第七章　张量分析. 麦克斯韦方程的相对论形式. 相对论力学

§38　正 交 变 换

为建立以下的理论起见，我们在此补充一些数学.

在§32中我们已看到洛伦兹变换(32.10)，使得

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2. \quad (38.1)$$

如果我们令

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=\mathrm{i}ct, \quad (38.2)$$

上式成为

$$\sum_1^4 x_\mu^2=\sum_1^4 x'^2_\mu. \quad (38.3)$$

一个自 x_μ 变至 x'_μ 的变换，如果满足上式，称为正交变换. 因此洛伦兹变换是一个四维空间中的正交变换. 我们现在讨论四维空间中的正交变换的一般性质.

自 x_μ 变至 x'_μ 的变换可以写为以下的式子①.

$$x'_\mu=\sum_\nu \alpha_{\mu\nu}x_\nu. \quad (38.4)$$

在以后讨论中我们时常应用爱因斯坦求和约定，即所有的 $\sum$ 字样都不写出，而同时如果在一个式中遇见一个字母出现两次时，即认

---

① 我们可以令 $x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_0=ct$ 而讨论如此的 x_μ 的变换. 这样的讨论有一个好处，便是避免了虚数，但自 x_μ 至 x'_μ 的变换不再是正交变换，使得以下的公式必须有所改变. 但在本书中，我们援用(38.2)式，使 x_4 为一虚数，而同时使洛伦兹变换成为正交变换.

为这个式子前有一个对此字母取和的符号 $\sum$（这个符号也不写出）. 用了这样的求和约定，

$$\alpha_{\mu\nu}x_{\nu}, \quad \alpha_{\mu\nu}x_{\mu}x_{\nu}x_{\rho}, \quad \cdots,$$

便代表

$$\sum_{\nu}\alpha_{\mu\nu}x_{\nu}, \quad \sum_{\mu,\nu}\alpha_{\mu\nu}x_{\mu}x_{\nu}x_{\rho}, \quad \cdots$$

(38.4)便可写为

$$x'_{\mu} = \alpha_{\mu\nu}x_{\nu}. \tag{38.5}$$

如果(38.5)是正交变换，$x_{\mu}x_{\mu}=x'_{\mu}x'_{\mu}$ 得

$$x_{\mu}x_{\mu} = x'_{\mu}x'_{\mu} = \alpha_{\mu\nu}x_{\nu}\alpha_{\mu\rho}x_{\rho} = (\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho})x_{\nu}x_{\rho}. \tag{38.6}$$

上式对任何 x_{μ} 成立，因此

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho}; \tag{38.7}$$

式中 $\delta_{\nu\rho}$ 乃是一个 ν,ρ 的函数，定义为

$$\delta_{\nu\rho} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \nu \neq \rho, \\ 1, & \text{如果 } \nu = \rho. \end{cases} \tag{38.8}$$

令 α 代表矩阵

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

它的 $\mu\nu$ 矩阵元即是 $\alpha_{\mu\nu}$. 令 α^{T} 为 α 的转置矩阵，亦即将行列对调后的 α. 它的矩阵元适合下式：

$$\alpha^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}. \tag{38.9}$$

于是(38.7)可以写为

$$\alpha^{\mathrm{T}}_{\nu\mu}\alpha_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho},$$

或

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = I, \tag{38.10}$$

式中 I 代表单位矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}. \tag{38.11}$$

令 $\det\alpha$ 为将 α 认为行列式后所得的值，那么自(38.10)得

$$\det(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=\det\alpha^{\mathrm{T}}\cdot\det\alpha=\det I=1.$$

但

$$\det\alpha^{\mathrm{T}}=\det\alpha,$$

因此得

$$(\det\alpha)^2=1,$$

亦即

$$\det\alpha=\pm 1. \tag{38.12}$$

因此，α 不是一个奇异矩阵，α 所构成的行列式不等于零. 在这时可以自(38.5)中求出 x_ν 如何为 x'_ν 的函数，得

$$x_\nu=\beta_{\nu\rho}x'_\rho. \tag{38.13}$$

事实上，令 $\Delta_{\mu\nu}$为自 α 中取去 μ 行 ν 列后所成的矩阵的行列式，得

$$\beta_{\nu\rho}=(-)^{\nu+\rho}\Delta_{\rho\nu}/\det\alpha. \tag{38.14}$$

由行列式的性质，我们知

$$\sum_\rho(-1)^{\mu+\rho}\alpha_{\nu\rho}\Delta_{\mu\rho}=\delta_{\mu\nu}(\det\alpha),$$

$$\sum_\rho(-1)^{\mu+\rho}\alpha_{\rho\nu}\Delta_{\rho\mu}=\delta_{\mu\nu}(\det\alpha),$$

亦即

$$\beta\alpha=\alpha\beta=I. \tag{38.15}$$

由于上式，我们称 β 为 α^{-1}，得

$$\alpha^{-1}\alpha=\alpha\alpha^{-1}=I. \tag{38.16}$$

以上说明了如果 $\det\alpha\neq 0$，便存在着 α^{-1}，使(38.16)式满足. 现在我们将(38.10)乘以 α^{-1}，便得

$$\alpha^{\mathrm{T}}=\alpha^{-1}, \tag{38.17}$$

因此

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \alpha\,\alpha^{\mathrm{T}} = I. \tag{38.18}$$

这便是

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho}, \quad \alpha_{\nu\mu}\alpha_{\rho\mu} = \delta_{\nu\rho}. \tag{38.19}$$

(38.17),(38.18)是正交变换的主要性质. 由于(38.13),(38.17),我们得

$$x_\nu = \beta_{\nu\rho}x'_\rho = (\alpha^{-1})_{\nu\rho}x'_\rho = (\alpha^{\mathrm{T}})_{\nu\rho}x'_\rho = \alpha_{\rho\nu}x'_\rho. \tag{38.20}$$

通常在讨论非奇异的线性变换时,我们将两个变换

$$\begin{cases} x_\mu \to x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu \\ y_\mu \to y'_\mu = [(\alpha^{\mathrm{T}})^{-1}]_{\mu\nu}y_\nu \end{cases} \tag{38.21}$$

一起讨论,第二个变换称为第一个的逆(контравариантный)变换. 这两个变换使

$$\sum y'_\mu x'_\mu = \sum y_\mu x_\mu;$$

因为自(38.21)第二式,得

$$y_\nu = (\alpha^{\mathrm{T}})_{\nu\mu}y'_\mu,$$

所以 $$\sum y'_\mu x'_\mu = \sum y'_\mu \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \sum (\alpha^{\mathrm{T}})_{\nu\mu}y'_\mu x_\nu = \sum y_\nu x_\nu.$$

对于正交变换,

$$(\alpha^{\mathrm{T}})^{-1} = \alpha,$$

因此逆变换与原来的变换相同. 在此可以附带指出:对于任何不是奇异的矩阵 α,

$$(\alpha^{\mathrm{T}})^{-1} = (\alpha^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

因为自 $\alpha\alpha^{-1}=I$,利用$(ab)^{\mathrm{T}}=b^{\mathrm{T}}a^{\mathrm{T}}$ 的性质,得

$$(\alpha^{-1})^{\mathrm{T}}\,\alpha^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I,$$

亦即

$$(\alpha^{-1})^{\mathrm{T}} = (\alpha^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

如果我们讨论三维空间的正交变换(38.4),而令 $x_\mu,\alpha_{\mu\nu}$等都为实数,那么(38.4)可以代表在坐标轴转动下坐标的变换. 称原来的坐标轴为 OX_1,OX_2,OX_3,转动后的坐标轴为 OX'_1,OX'_2,OX'_3,

那么$\alpha_{\mu\nu}$即是$\cos(OX'_\mu,OX_\nu)$，(38.4)，(38.20)代表熟知的

$$x'_\mu=\sum_\nu\cos(OX'_\mu,OX_\nu)x_\nu,$$

$$x_\nu=\sum_\rho\cos(OX_\nu,OX'_\rho)x'_\rho,$$

而(38.19)代表这些方向余弦中的关系．它们的几何意义是极清楚的．

极易证明：正交变换成为一个群．这就是说，如果x通过一个正交变换$a_{\mu\nu}$变至x'，x'通过一个正交变换$b_{\mu\nu}$变至x''，那么自x变至x''的变换也是正交的．这可以由下式看出：

$$x_\mu x_\mu=x'_\mu x'_\mu=x''_\mu x''_\mu.$$

也可以直接证明：

$$x''_\mu=b_{\mu\nu}x'_\nu=b_{\mu\nu}a_{\nu\rho}x_\rho,$$

将ba写为c，得

$$c^{\mathrm{T}}c=(ba)^{\mathrm{T}}ba=a^{\mathrm{T}}b^{\mathrm{T}}ba=a^{\mathrm{T}}(b^{\mathrm{T}}b)a=a^{\mathrm{T}}a=I,$$

即是所需的证明．我们也很容易证明，行列式等于$+1$的正交变换是一个子群．事实上，如果$c=ab$，而

$$\det a=\det b=1,$$

那么

$$\det c=\det(ab)=\det a\det b=1.$$

现在讨论洛伦兹变换．它不是一般的正交变换，因为它适合以下的条件，即如果原来的x_1,x_2,x_3是实数，x_4是虚数，变换后的x'_1,x'_2,x'_3也必须是实数，x'_4是虚数．这要求任何一个洛伦兹变换$\alpha_{\mu\nu}$中的系数适合以下的条件：

$$\alpha_{\mu\nu}=\text{实数，如果}\ \mu\nu\ \text{中没有“4”字样，或者}\ \mu\nu\ \text{都是}\ 4,$$

$$\alpha_{\mu\nu}=\text{虚数，如果}\ \mu\nu\ \text{中只有一个是}\ 4. \qquad (38.22)$$

(注意寻常数学书籍中所讨论的正交变换所成矩阵的各个矩阵元都是实数，与此不同．)合乎这些条件的正交变换才能是洛伦兹变换．显然地，这些变换成为一个群，是正交变换群中的一个子群．这

些变换中满足 $\det\alpha=1$ 的变换成为这个子群中的一个子群. 通常我们称满足(38.22)而又满足 $\det\alpha=1$ 的变换为"正常洛伦兹变换",称满足(38.22)而又满足 $\det\alpha=-1$ 的变换为"反常洛伦兹变换". 正常、反常洛伦兹变换都称为洛伦兹变换. 注意在此我们所讨论的洛伦兹变换,乃是广义的洛伦兹变换,所包含的对象比§32中的对象广.

首先讨论正常的洛伦兹变换. 这些变换可以分为两种,一种的 $\alpha_{44}>0$,一种的 $\alpha_{44}<0$. 先讨论第一种. 我们说第一种变换必然是下列三个情形之一:

(i) 相当于三维空间中坐标轴的转动. 那时

$$\alpha_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) 相当于自观察者 O 所用的时空坐标变至另一个观察者 O' 所用的时空坐标,而在此 O,O' 的坐标轴是相互平行的(O,O' 作相互等速运动). 那时, $\alpha_{\mu\nu}$成为

$$\begin{bmatrix} 1+(v_x/v)^2\{\cdots\} & (v_xv_y/v^2)\{\cdots\} & \cdots & \mathrm{i}(v_x/c)(1-\beta^2)^{-1/2} \\ (v_yv_x/v^2)\{\cdots\} & 1+(v_y/v)^2\{\cdots\} & \cdots & \mathrm{i}(v_y/c)(1-\beta^2)^{-1/2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\mathrm{i}(v_x/c)(1-\beta^2)^{-1/2} & \cdots & \cdots & (1-\beta^2)^{-1/2} \end{bmatrix},$$

式中$\{\cdots\}$代表$(1-\beta^2)^{-1/2}-1$(参阅(32.16)). 这样的变换称为纯粹洛伦兹变换.

(iii) 是一个纯粹洛伦兹变换 $a_{\mu\nu}$乘上一个相当于三维空间中坐标轴转动的变换 $b_{\mu\nu}$.

证明如下:已给某一正常洛伦兹变换 $\alpha_{\mu\nu}$,而又已知 $\alpha_{44}>0$. 如果 $\alpha_{41}=\alpha_{42}=\alpha_{43}=0$,那么由 $\alpha_{4\mu}\alpha_{4\mu}=1$,得 $\alpha_{44}^2=1$,因此 $\alpha_{44}=1$. 利用这一点,又利用 $\alpha_{\mu4}\alpha_{\mu4}=1$, α_{14}, α_{24}, α_{34}都是虚数等事实,得

$$\alpha_{14}=\alpha_{24}=\alpha_{34}=0,$$

因此变换成为(i)中的情形.

如果 $\alpha_{41},\alpha_{42},\alpha_{43}$ 中有一个不等于零,我们可以引入一个纯粹洛伦兹变换 $a_{\mu\nu}$,使

$$a_{41}=\alpha_{41},\quad a_{42}=\alpha_{42},\quad a_{43}=\alpha_{43}.$$

这显然是可能的.由于 $a_{\mu4}a_{4\mu}=\alpha_{4\mu}\alpha_{4\mu}=1$,得 $a_{44}=\alpha_{44}$.我们现在利用 $a_{\gamma\rho}a_{\gamma\nu}=\delta_{\rho\nu}$,将 $x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu$ 写为

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \alpha_{\mu\rho}a_{\gamma\rho}a_{\gamma\nu}x_\nu=(\alpha_{\mu\rho}a_{\gamma\rho})a_{\gamma\nu}x_\nu \\ &= \beta_{\mu\gamma}a_{\gamma\nu}x_\nu \quad (\beta_{\mu\gamma}\equiv\alpha_{\mu\rho}a_{\gamma\rho}), \end{aligned}$$

因此 α 成为两个变换的组合,一个为 $a_{\gamma\nu}$,一个为 $\beta_{\mu\gamma}$.后一个相当于三维空间中的坐标轴转动.因为当 $\mu=1,2,3$ 时

$$\beta_{4\mu}=\alpha_{4\rho}a_{\mu\rho}=a_{4\rho}a_{\mu\rho}=\delta_{\mu4}=0.$$

因此根据证明的第一小段,$\beta_{44}=1,\beta_{14}=\beta_{24}=\beta_{34}=0$,亦即是我们所欲证明的.这一段证明实质上是自 $x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu$ 中求出 O' 对于 O 的速度 $\boldsymbol{v}$,引入观察者 O'',轴与 O 的轴平行,以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于 O 而运动,再将自 O 至 O' 的变换变为自 O 至 O'' 的变换及自 O'' 至 O' 的变换的乘积.在这样的处理中,O',O'' 的相对速度是零,因此自 x'' 变至 x' 的变换必然相当于三维空间中坐标轴的转动.

在本书中,我们只用到满足 $\alpha_{44}>0$ 的正常洛伦兹变换.

满足 $\alpha_{44}<0$ 的正常洛伦兹变换不可能是以上三种类型之一.这可以用数学具体地证明,也可以由以下的讨论看出.在以上三种类型中,一个"将来类时"的矢量(0,0,0,i)在变换后必然依然是"将来类时"的矢量,而经过一个 $\alpha_{44}<0$ 的变换中,它变为一个"过去类时"的矢量.

很显然的,如果 α 是满足 $\alpha_{44}<0$ 的正常洛伦兹变换,而 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 等代表变换

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & +1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix},$$

那么 $\delta_1\alpha,\delta_2\alpha,\delta_3\alpha,\delta_4\alpha,\alpha\delta_1,\alpha\delta_2,\alpha\delta_3,\alpha\delta_4$ 都是第一种的正常洛伦兹变换.(注意 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 中任何一个可以和一个寻常三维空间的坐标变换组合而变成另外一个.)因 $\delta_1^2=\delta_2^2=\delta_3^2=\delta_4^2=1$,我们可以将一个第二种正常洛伦兹变换 α 写为

$$\delta_1^2\alpha = \delta_1(\delta_1\alpha), \quad \alpha\delta_1^2 = (\alpha\delta_1)\delta_1, \quad \cdots$$

便证明了任何第二种的正常洛伦兹变换可以写为 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 中之一与一个第一种正常洛伦兹变换的组合.

现在讨论反常的洛伦兹变换 α,亦即 $\det\alpha=-1$ 的变换.这也分两种,$\alpha_{44}>0$ 的变换称为第一种,$\alpha_{44}<0$ 的变换称为第二种.先讨论第一种反常洛伦兹变换.这样的 α,乘上以下矩阵的任意一个

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix},$$

不论 σ 在先或在后,都成为第一种的正常洛伦兹变换.因 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\sigma_4^2=1$,我们可以将一个第一种反常洛伦兹变换 α 写为

$$\sigma_1^2\alpha = \sigma_1(\sigma_1\alpha) \quad 或 \quad \alpha\sigma_1^2 = (\alpha\sigma_1)\sigma_1,$$

即证明了第一种反常洛伦兹变换等于一个 σ 乘上一个第一种正常洛伦兹变换.同样,我们证明第二种反常洛伦兹变换等于一个 σ 乘上一个第二种正常洛伦兹变换.注意 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ 中任意一个可以和一个三维空间中坐标转动组合而变为另外一个.

$\rho_1\sigma_1,\rho_2\sigma_2,\rho_3\sigma_3$ 都是

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

这是特别有兴趣的,因为它相当于将时间轴倒转方向的一个变换.

有时我们讨论一个极小的洛伦兹变换;所谓"极小",乃是指变换前的 x_μ 与变换后的 x'_μ 相差极小.这样的变换 α 可以写为

$$\alpha_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon l_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2), \tag{38.23}$$

式中 ε 代表一个小数.由上式,知 α 的行列式的值与 1 的差必须为 ε 的数量级,但 α 的行列式必须为 $+1$ 或 -1,因此得

$$\det \alpha = 1.$$

因此一个极小的洛伦兹变换必须是正常的.同时我们也不难看出它的 $\alpha_{44}>0$.

由(38.19)第一式,得

$$(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon l_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2))(\delta_{\mu\rho} + \varepsilon l_{\mu\rho} + O(\varepsilon^2)) = \delta_{\mu\rho},$$

因此

$$\varepsilon(l_{\rho\nu} + l_{\nu\rho}) + O(\varepsilon^2) = 0,$$

亦即

$$l_{\rho\nu} = - l_{\nu\rho}. \tag{38.24}$$

当上式满足时,(38.19)第二式也满足(忽略 ε^2 的数量级).(38.24)乃是极小的洛伦兹变换的特征.

§39　四维空间的张量、矢量分析

让我们在此说明什么叫做四维空间中的标量、矢量、张量.如果两个任意的观察者 O,O' 分别地测量某一个物理量而获得的值 A,A' 相等,

$$A = A', \tag{39.1}$$

那么这个物理量称为标量,或不变量.依照(32.12),$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 是一个不变量.当两个任意的观察者 O,O' 所量到一件事的坐标有以下的关系

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu \tag{39.2}$$

时,如果他们分别量某一个物理量 A 而获得的值(A_1,A_2,A_3,A_4),

(A_1', A_2', A_3', A_4')满足

$$A_\mu' = \alpha_{\mu\nu} A_\nu, \tag{39.3}$$

那么这个物理量 $\boldsymbol{A}$ 称为矢量，而(A_1, A_2, A_3, A_4)，(A_1', A_2', A_3', A_4')称为它在 O, O' 系统中的分量. 如果上述的 O, O' 分别量某一个量 B 而获得的值 $B_{\mu\rho}, B_{\mu\rho}'$，$(\mu, \rho = 1, 2, 3, 4)$满足

$$B_{\mu\rho}' = \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\rho\gamma} B_{\nu\gamma}, \tag{39.4}$$

那么物理量 B 称为二级的张量①，而 $B_{\mu\rho}$称为分量. 同样地，我们定义三级、四级及高级的张量. 为方便起见，我们称标量、矢量为零级及一级的张量，因此标量、矢量及其他张量可以统称为张量.

由张量的定义及 $\alpha_{\mu\nu}$的性质，可以证明 $A_\mu B_\mu$ 是不变量，$A_\mu B_{\mu\nu}$ 是一个矢量的分量，等等. 证明如下：

$$\begin{aligned} A_\mu' B_\mu' &= \alpha_{\mu\nu} A_\nu \alpha_{\mu\rho} B_\rho = (\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\rho}) A_\nu B_\rho \\ &= \delta_{\nu\rho} A_\nu B_\rho = A_\nu B_\nu, \\ A_\mu' B_{\mu\nu}' &= \alpha_{\mu\rho} A_\rho \alpha_{\mu\theta} \alpha_{\nu\gamma} B_{\theta\gamma} = (\alpha_{\mu\rho} \alpha_{\mu\theta}) \alpha_{\nu\gamma} A_\rho B_{\theta\gamma} \\ &= \delta_{\rho\theta} \alpha_{\nu\gamma} A_\rho B_{\theta\gamma} = \alpha_{\nu\gamma} (A_\rho B_{\rho\gamma}). \end{aligned}$$

一般地讲，在

$$A_{\mu\nu\cdots} B_{\rho\theta\cdots} C_{\gamma\cdots} \cdots \tag{39.5}$$

中，如果下标 $\mu, \theta, \cdots$等出现各两次，那么上式即是某一个张量 D 的分量，而 D 的下标只包含在(39.5)中出现一次的下标，即在(39.5)的下标中拿去 $\mu, \theta\cdots$字样后而余下来的下标. 例如

$$A_{\mu\nu} B_{\rho\theta\mu} C_{\theta\xi}$$

是某一个三级张量 D 的“$\nu\rho\xi$”分量. 证明是极简单的，不必在此写出.

以上讨论物理量所构成的标量、矢量、张量的定义是(39.1)，(39.3)，(39.4)式. 为方便起见，我们有时不说 A, A', B, B' 是 O，

---

① 按国家标准规定，张量应用黑体表示，但考虑到本书第一版是在 1957 年出版的，作者也已过世，故仍保留原书字样. ——编者注

O' 所观察到的，而说它们是在 x, x' 系统中的值．利用(39.1)，(39.3)，(39.4)等式，我们可以定义数学上的标量、矢量、张量．如果有一群数值 $A, A', B, B', \cdots$，分别在 x, x' 系统中，而如果当 x，x' 有(39.2)关系时，他们便有(39.1)，(39.3)，(39.4)等关系，那么 A, A', B, B' 分别称为标量、矢量、张量等等，或称为零级、一级、二级或高级的张量．

可以证明，如果 A 是一矢量，B 是一个矢量，那么在 O, O' 系统中的$(A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3, A_4+B_4)$，$(A_1'+B_1', \cdots)$也满足(39.3)．因此这些分量构成一矢量，简写为 $A+B$．同样，如果 $A_{\mu\nu}$ 是一个二级张量，$B_{\mu\nu}$是另一个二级张量，O, O' 系统中的 $A_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}, A_{\mu\nu}'+B_{\mu\nu}'$也满足(39.4)；因此它们是一个张量的分量，这张量可称为 $A+B$．又如果 $A_{\mu\nu}$是一个张量，而 $T_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}'$等定义为

$$T_{\mu\nu}=A_{\nu\mu},\quad T_{\mu\nu}'=A_{\nu\mu}',$$

那么因

$$T_{\mu\nu}'=A_{\nu\mu}'=\alpha_{\nu\rho}\alpha_{\mu\theta}A_{\rho\theta}=\alpha_{\mu\theta}\alpha_{\nu\rho}T_{\theta\rho},$$

$T_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}', \cdots$乃是某一个张量在 O, O' 系统中的分量；这张量可以写为 $\tilde{A}$．将 A 写为

$$\frac{1}{2}(A+\hat{A})+\frac{1}{2}(A-\hat{A}),\tag{39.6}$$

即证明了任意一个二级张量可以写为两个二级张量的和，而在第一个中，$\mu\nu$ 分量等于 $\nu\mu$ 分量(在任何系统中都如此)，在第二个中，$\mu\nu$ 分量等于(-1)乘上 $\nu\mu$ 分量(在任何系统中都如此)．前一个张量称为“对称的张量”，后一个称为“反对称的张量”．

纯粹的数学上的矢量、张量是没有很多意义的．因为已知 A_ν，$B_{\nu\gamma}$等在某一个系统 O 中的值，那么我们总可以在 O' 系统中选择 $A_\nu', B_{\nu\gamma}'$的值，使它们满足(39.3)，(39.4)式，因而获得了一个矢量或张量．但有一个数学上的张量，它在各个系统中的各个分量所取的值，只同标明这分量的下标有关，而不同所挑选的系统有关；这

个张量是值得特别提出的. 这个张量是 $\delta_{\mu\nu}$. 为证明这的确如此，令在 O 系统中它的 $\mu\nu$ 分量为 $\delta_{\mu\nu}$，那么假定它为张量后，知它在 O' 系统中的 $\mu\nu$ 分量为

$$\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\theta}\delta_{\rho\theta} = \alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\rho} = \delta_{\mu\nu},$$

因此"数值"不变. 我们也可以如此地讨论，令它在 O,O' 中的 $\mu\nu$ 分量都等于 $\delta_{\mu\nu}$，观察以这些分量的值代替下式

$$B'_{\mu\rho} = \alpha_{\mu\nu}\alpha_{\rho\gamma}B_{\nu\gamma}$$

中的 B,B'，而看这个式子能否满足. 这样也可以证明以上所说的话. 这个"数值不变"的张量，以后常用到，代表它的符号即是 $\delta_{\mu\nu}$.

另外有一个"数值不变"的赝张量(псевдотензор)$\tilde{\varepsilon}$. 它的定义为

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}=0 & \text{(如果 } \mu,\beta,\gamma,\delta \text{ 中有两个是一样的)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}=1 & \text{(如果 } \mu,\beta,\gamma,\delta \text{ 可以自 1,2,3,4 用偶数次的对调得来)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\mu,\beta,\gamma,\delta}=-1 & \text{(如果 } \mu,\beta,\gamma,\delta \text{ 可以自 1,2,3,4 用奇数次的对调得来)}, \end{cases} \tag{39.7}$$

所谓对调，即是两个下标字母的交换. 我们所以称它为"数值不变"的赝张量，乃是因为它对于正常的洛伦兹变换而言是一个"数值不变"的张量，而对于反常的洛伦兹变换而言，不是一个"数值不变"的张量. 假定在 x 系统中，它的 $\mu\beta\gamma\delta$ 分量取以上的值，讨论自 x 至 x' 的一个正常洛伦兹变换 α. 在 x' 系统中它的 $\mu\beta\gamma\delta$ 分量为

$$\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\beta\theta}\alpha_{\gamma\nu}\alpha_{\delta\xi}\tilde{\varepsilon}_{\rho\theta\nu\xi},$$

亦即是(根据行列式的定义)

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}\det\alpha = \tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}. \tag{39.8}$$

如果自 x 至 x' 的变换是反常的洛伦兹变换，那么在 x' 系统中它的 $\mu\beta\gamma\delta$ 分量等于

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}\det\alpha = -\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}; \tag{39.9}$$

因此 $\tilde{\varepsilon}$ 不是一个数值不变的张量.

在这里我们简单地介绍赝标量、赝矢量等名称. 如果 $B_{\mu\beta\gamma\delta}$是一个张量，对于任何一对下标是反对称的，那么 B 的分量的绝对值只有两个不同的数值，其中一个是零. 在各个系统中分别地引入 $\tilde{\varphi}$，定义为

$$\tilde{\varphi}=\frac{1}{4!}\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}B_{\mu\beta\gamma\delta}, \tag{39.10}$$

得

$$B_{\mu\beta\gamma\delta}=\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}\tilde{\varphi}. \tag{39.11}$$

如此的 $\tilde{\varphi}$ 称为赝标量. 如果 x,x' 中的联系为一个洛伦兹变换 α，我们得

$$\tilde{\varphi}'=(\det\alpha)\tilde{\varphi}. \tag{39.12}$$

由于上式，我们称 $\tilde{\varphi}$ 为赝标量.

如果 $B_{\beta\gamma\delta}$是一个张量，对于任何一对下标是反对称的，那么 B 的分量的绝对值只有五个不同的值，其中一个是零. 在各个系统中分别地引入 $\tilde{A}_\mu$，定义为

$$\tilde{A}_\mu=\frac{1}{3!}\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}B_{\beta\gamma\delta}, \tag{39.13}$$

可算出

$$B_{\beta\gamma\delta}=\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}\tilde{A}_\mu. \tag{39.14}$$

如果 x,x' 中的联系是一个洛伦兹变换 α，我们得

$$\tilde{A}'_\mu=(\det\alpha)\alpha_{\mu\nu}\tilde{A}_\nu. \tag{39.15}$$

由于上式，我们称 $\tilde{A}_\mu$ 为赝矢量.

如果 $B_{\gamma\delta}$是一个张量，对于 $\gamma\delta$ 是反对称的，那么我们分别地在各个系统中引入 $\tilde{A}_{\mu\beta}$，定义为

$$\tilde{A}_{\mu\beta}=\frac{1}{2!}\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}B_{\gamma\delta}, \tag{39.16}$$

由此可得

$$B_{\gamma\delta}=\frac{1}{2!}\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}\tilde{A}_{\mu\beta},\quad \tilde{A}_{\mu\beta}=-\tilde{A}_{\beta\mu}. \tag{39.17}$$

当 x,x' 中的联系是一个洛伦兹变换 α 时，我们得

$$\tilde{A}'_{\mu\beta}=(\det\alpha)\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\beta\theta}\tilde{A}_{\rho\theta}. \tag{39.18}$$

$\tilde{A}$通常称为 B 的对偶(двойственный)张量.

赝标量、赝矢量、对偶张量在近代的理论物理中有极大的应用，但在本书中没有很多用处.

$\tilde{\varepsilon}$ 的主要用途为体积的计算. 在寻常三维空间中,如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 三个矢量的起点都在原点,它们所支的平行六面形体的体积是 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$,亦即是

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

这可以写为

$$\tilde{\varepsilon}_{ijk}A_iB_jC_k, \tag{39.19}$$

式中 $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$的定义与(39.7)相仿,

$$\tilde{\varepsilon}_{123}=\tilde{\varepsilon}_{231}=\tilde{\varepsilon}_{312}=-\tilde{\varepsilon}_{132}=-\tilde{\varepsilon}_{321}=-\tilde{\varepsilon}_{213}=1,$$

而其他分量等于零. 在四维空间中,四个矢量所支的体积 V 在各个系统中分别地定义为

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}A_\mu B_\beta C_\gamma D_\delta. \tag{39.20}$$

这样的体积在洛伦兹变换 α 中依照下式

$$V'=(\det\alpha)V \tag{39.21}$$

变换. 证明如下:

$$\begin{aligned} V'&=\tilde{\varepsilon}_{\beta\beta'\beta''\beta'''}A'_\beta B'_{\beta'}C'_{\beta''}D'_{\beta'''} \\ &=\tilde{\varepsilon}_{\beta\beta'\beta''\beta'''}\alpha_{\beta\gamma}\alpha_{\beta'\gamma'}\alpha_{\beta''\gamma''}\alpha_{\beta'''\gamma'''}A_\gamma B_{\gamma'}C_{\gamma''}D_{\gamma'''}. \end{aligned}$$

因

$$\tilde{\varepsilon}_{\beta\beta'\beta''\beta'''}\alpha_{\beta\gamma}\alpha_{\beta'\gamma'}\alpha_{\beta''\gamma''}\alpha_{\beta'''\gamma'''}=\tilde{\varepsilon}_{\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''}(\det\alpha),$$

得

$$V'=(\det\alpha)\tilde{\varepsilon}_{\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''}A_\gamma B_{\gamma'}C_{\gamma''}D_{\gamma'''}=(\det\alpha)V,$$

即是所欲证明的.

现在讨论什么叫做一个标量场. 在这里,观察者 O 看到在各时各地有一个量 ϕ,为 x_1,x_2,x_3,x_4 的函数,称为 $\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$. 观察者 O' 观察同一个物理量,获得 $\phi'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)$. 如果在一个时空点上, ϕ,ϕ' 取相同的值,那么 ϕ,ϕ' 等称为一个标量场. 由定义知,当 x,x' 代表同一件事情时,标量场 ϕ,ϕ' 满足

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=\phi'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4), \tag{39.22}$$

亦即

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=\phi'(\alpha_{1\mu}x_\mu,\alpha_{2\mu}x_\mu,\alpha_{3\mu}x_\mu,\alpha_{4\mu}x_\mu); \quad (39.23)$$

式中的 α 即是自 x 变至 x' 的变换系数. 由以上可见, 函数 $\phi(x)$, $\phi'(x')$ 的形式可以是不一样的.

同样地, 如果 O 在各时各地测量到四个量 $A_\mu(x)$, O' 测量同样性质的物理量而获得值 $A'_\mu(x')$, 而又如果当 x,x' 代表同一件事情时, 我们有

$$A'_\mu(x')=\alpha_{\mu\nu}A_\nu(x), \quad (39.24)$$

那么 A 称为矢量场. 同样,

$$A'_{\mu\nu}(x')=\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\theta}A_{\rho\theta}(x) \quad (39.25)$$

是张量场的定义.

如果 ϕ 是一个标量场, 那么 $\partial\phi/\partial x_\mu$ 是一个矢量场, 理由是:

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu}. \quad (39.26)$$

这个矢量场称为 ϕ 在四维空间中的陡度. 同样可以证明: 如果 $A_\mu(x)$ 是一个矢量场, $\partial A_\mu(x)/\partial x_\nu$ 是一个张量场. 事实上,

$$\frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'_\nu}=\frac{\partial}{\partial x'_\nu}\alpha_{\mu\rho}A_\rho(x)=\alpha_{\mu\rho}\frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x_\theta}\frac{\partial x_\theta}{\partial x'_\nu}$$
$$=\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\theta}\frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x_\theta}. \quad (38.27)$$

同样,

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$$

也是一个张量场, 称为 A_μ 在四维空间中的旋度. 又 $\partial A_\mu(x)/\partial x_\mu$ 可以证明为一标量场,

$$\frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\alpha_{\mu\nu}A_\nu(x)=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu}$$
$$=\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho}=\delta_{\nu\rho}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho}=\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\nu}. \quad (39.28)$$

这称为 A_μ 在四维空间中的散度. 以 $\partial\phi/\partial x_\mu$ 作为 A_μ,便证明了

$$\partial^2\phi/\partial x_\mu\partial x_\mu=\{(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)+(\partial^2/\partial z^2)-c^{-2}(\partial^2/\partial t^2)\}\phi$$

是一个标量场. 同样可以证明 $\partial^2 A_\mu/\partial x_\rho\partial x_\rho$, $\partial^2 A_\rho/\partial x_\mu\partial x_\rho$ 是一个矢量场 B_μ. 一般的规则是：不论下标出现在被微分的场量上,或出现于微分符号 $\partial/\partial x$ 的 x 上,如果某个下标出现两次,我们在所有的下标中取走这些下标,余下的下标便表明这个导数的变换性质;即如果余下的下标为 $\mu\nu\theta$,那么导数即是某张量的 $\mu\nu\theta$ 分量.

可以证明如果 $A_{\mu\nu}$是一个反对称的张量,

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial A_{\nu\rho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial A_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} \tag{39.29}$$

是一个张量 $B_{\mu\nu\rho}$,而它对于每一对下标都是反对称的. 如果 $A_{\mu\nu}$可以用一个矢量场 C_θ 以下式来表出：

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}C_\nu-\frac{\partial}{\partial x_\nu}C_\mu, \tag{39.30}$$

那么 $B_{\mu\nu\rho}$等于零. 反过来说,如果(39.29)等于零,那么便存在着一个矢量场 $\boldsymbol{C}$,使 $A_{\mu\nu}$满足(39.30). 这一点在三维空间的矢量分析中是人所共知的. 事实上,令 $\boldsymbol{G}_\nu$ 为 $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho}A_{\nu\rho}$,那么(39.29)成为零或 $\nabla\cdot\boldsymbol{G}$, (39.30)成为

$$\boldsymbol{G}=\nabla\times\boldsymbol{C}.$$

因此上面的话成为：如果 $\boldsymbol{G}=\nabla\times\boldsymbol{C}$,则 $\nabla\cdot\boldsymbol{G}=0$;如果 $\nabla\cdot\boldsymbol{G}=0$,则 $\boldsymbol{G}$ 为某一个矢量场的旋度. 这当然是人所共知的.

标量、矢量、张量分析与物理规律须适合相对论条件的关系是这样的. 如果已知对于某一个系统 O,标量或标量场 A 适合 $A=0$,那么对于另外的系统 O',我们有 $A'=0$. 如果已知对于某一个系统 O,矢量或矢量场 A 适合

$$A_\mu=0\quad(对于所有的\ \mu), \tag{39.31}$$

那么对于另外的系统 O',我们有

$$A'_\mu=0. \tag{39.32}$$

同样：如果对于系统 O 或观察者 O,张量或张量场 $B_{\mu\nu}$适合

$$B_{\mu\nu}=0\quad(对于所有的\ \mu,\nu), \tag{39.33}$$

那么对于另外的系统或观察者 O'，我们得

$$B'_{\mu\nu}=0. \tag{39.34}$$

因此如果对于某一个观察者 O，物理规律可以写成以下的形式：

$$C_{\mu\nu\cdots}=0, \tag{39.35}$$

而式中 C 代表一个由物理标量、矢量、张量(或它们的场)及“数值不变”的数学张量 $\delta,\tilde{\varepsilon}$ 所构成的标量、矢量或张量(或它们的场)，那么对于另外的观察者 O'，

$$C'_{\mu\nu\cdots}=0. \tag{39.36}$$

因(39.35)，(39.36)左方的 C,C' 对于它们所包含的物理量而言，形式是相同的，所以这两个式子的同时存在便意味着物理规律对于不同的观察者取相同的形式，便等于说(39.35)是满足相对论条件的. 这便是相对论条件与张量分析的关系. 以后我们将具体地根据这个精神证明麦克斯韦方程满足相对论条件.

在相对论发展初期，通常认为所有满足相对论条件的方程，都属于(39.35)类型，即都是左方为一个某级的张量的分量而右方为零的式子. 后来，发现了旋量(спинор)而证明了左方为旋量而右方为零的式子也合乎相对论条件. 旋量又推广至超旋量(экспинор). 这些理论在相对论的量子力学中占极重要的地位，但与本书的内容无关.

§40　四维空间的速度矢量、加速度矢量

让我们在此讨论一二个简单的矢量.

首先，一个质点的时空坐标$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$是满足(39.3)的，因此它是一个矢量. 令 $\xi_\mu+\Delta\xi_\mu$ 为它在经过一小段时间后的时空坐标，那么 $\xi_\mu+\Delta\xi_\mu$ 也是一个矢量. 因此 $\Delta\xi_\mu$ 也是一个矢量. 一般地讲，两个质点的时空距离 $\xi_\mu^{\mathrm{II}}-\xi_\mu^{\mathrm{I}}$，或一个质点在两个不同时刻的时空坐标的差，都构成矢量. 以(34.14)的结果 $u'=c$ 代入(34.13)，不难证明一个平面波的$(\nu n_x,\nu n_y,\nu n_z,\mathrm{i}\nu)$构成一个矢量.

不变量或标量$-c^{-2}d\xi_\mu d\xi_\mu$有特殊的意义. 设想一个观察者在某一刹那附近的一小段时间中与所观察的质点一起运动. 称它在此小段时间中所观察到的ξ_μ为ξ_μ^0,所观察到的$-i\xi_4^0$为t^0. 显然地,

$$\xi_1^0=\xi_2^0=\xi_3^0=0,\quad d\xi_1^0=d\xi_2^0=d\xi_3^0=0, \tag{40.1}$$

因此

$$-c^{-2}d\xi_\mu d\xi_\mu=-c^{-2}d\xi_4^0 d\xi_4^0=(dt^0)^2. \tag{40.2}$$

因此不变量$-c^{-2}d\xi_\mu d\xi_\mu$的平方根乃是与质点一起运动的观察者所观察到的"质点的时间"的变化. 这个时间通常称为"固有时"(собственное время),用s来代表.

在运动过程中,(ξ_1,ξ_2,ξ_3)是t的函数. 但通过(40.2)我们可以获得t与s间的关系. 因此ξ_μ等可以认为是s的函数.

让我们讨论ξ_μ对于s的导数,首先,因

$$\Delta\xi'_\mu=\alpha_{\mu\nu}\Delta\xi_\nu, \tag{40.3}$$

得

$$\frac{\Delta\xi'_\mu}{\Delta s}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\Delta\xi_\nu}{\Delta s}.$$

取$\Delta s\to 0$时的极限,得

$$\frac{d\xi'_\mu}{ds}=\alpha_{\mu\nu}\frac{d\xi_\nu}{ds}, \tag{40.4}$$

证明了$d\xi_\mu/ds$是一个矢量. 同样可以证明$d^2\xi_\mu/ds^2$也是一个矢量. $d\xi_\mu/ds$,$d^2\xi_\mu/ds^2$分别地称为四维空间中的速度矢量、加速度矢量,或简称为四速度、四加速度. 其次,可以寻到四速度与寻常速度$\boldsymbol{u}$的关系. 关系如下:由(40.2)式

$$\begin{aligned}ds^2&=-c^{-2}(dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2)\\&=dt^2-u^2dt^2/c^2=(1-\beta^2)dt^2\quad(\beta=u/c),\end{aligned} \tag{40.5}$$

因此

$$ds=dt(1-\beta^2)^{1/2},$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}},\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=(1-\beta^2)^{1/2}. \tag{40.6}$$

约定 i,j,k 等下标的任意一个代表 1,2,3 中之一(注意 $\mu,\nu,\rho,\theta,\alpha,\beta$ 代表 1,2,3,4 中之一),得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=u_i\dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\quad(i=1,2,3),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\xi_4}{\mathrm{d}s}=\mathrm{i}c\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\mathrm{i}c\dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}},\end{cases} \tag{40.7}$$

式中 u_i 代表 $\boldsymbol{u}$ 的分量.由上式右方,可以验证 $\mathrm{d}\xi_\mu/\mathrm{d}s$ 确是一个矢量;这即是说,我们可以自 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'$ 间的关系(§33),直接证明(40.7)的右方满足矢量的变换方程(39.3),因而构成一个矢量.

以 $\dot{\xi}_\mu$ 代表 $\mathrm{d}\xi_\mu/\mathrm{d}s$,我们立即看到

$$\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu=\dot{\xi}_i\dot{\xi}_i+\dot{\xi}_4\dot{\xi}_4=(u^2-c^2)/(1-\beta^2)=-c^2. \tag{40.8}$$

这说明四速度的长度是一个常量,同时说明它是一个类时矢量.事实上,不难看出它是将来类时矢量.

让我们计算 $\mathrm{d}^2\xi_\mu/\mathrm{d}s^2$ 与 $u_i,\dot{u}_i$ 的关系.我们得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}s^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_i}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right)\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\\ &=\frac{\dot{u}_i}{(1-\beta^2)}+\frac{u_i(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})}{c^2(1-\beta^2)^2}.\end{aligned} \tag{40.9}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 代表寻常的加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$.

又可算出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\xi_4}{\mathrm{d}s^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\xi_4}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{i}c}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right)\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\\ &=\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})}{(1-\beta^2)^2}.\end{aligned} \tag{40.10}$$

由上式及 $\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}',\dot{\boldsymbol{u}}'$ 中的关系,可以直接证明 $\mathrm{d}^2\xi_\mu/\mathrm{d}s^2$ 为一矢量,正同由(40.7)可以证明 $\mathrm{d}\xi_\mu/\mathrm{d}s$ 是一个矢量一样.以 $\ddot{\xi}_\mu$ 代表 $\mathrm{d}^2\xi_\mu/\mathrm{d}s^2$,我们算出

$$\ddot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\mu = \frac{c^2 \dot{u}^2 - (u \times \dot{u})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} > 0, \tag{40.11}$$

说明了四加速度是一类空矢量.

不难自(40.7),(40.9),(40.10)中直接证明

$$\dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\mu = 0. \tag{40.12}$$

这一个式子也可以自(40.8)式对 s 作微分而求到.

当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 两个矢量相垂直时,即

$$A_\mu B_\mu = 0 \tag{40.13}$$

时,如果已知 $\boldsymbol{A}$ 是类时的,那么 $\boldsymbol{B}$ 必然是类空的. 证明是极简单的. 由(40.13),得

$$A_i B_i + A_4 B_4 = 0.$$

对于此间所考虑的矢量, A_4, B_4 是虚数. 将 A_4, B_4 写为 $\mathrm{i}A_0, \mathrm{i}B_0$ 得

$$A_i B_i - A_0 B_0 = 0,$$

因此

$$|A_i B_i| - |A_0 B_0| = 0.$$

因

$$|A_i B_i| = |\{(A_i A_i)(B_j B_j)\}^{1/2} \cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})|$$
$$\leqslant \{(A_i A_i)(B_j B_j)\}^{1/2},$$

得

$$\{(A_i A_i)(B_j B_j)\}^{1/2} - |A_0 B_0| \geqslant 0,$$

亦即

$$(A_i A_i)^{1/2}(B_j B_j)^{1/2} \geqslant |A_0 B_0|. \tag{40.14}$$

已知 $\boldsymbol{A}$ 为类时,即

$$(A_i A_i)^{1/2} < |A_0|,$$

(40.14)便要求

$$(B_j B_j)^{1/2} > |B_0|,$$

亦即要求 $\boldsymbol{B}$ 为类空矢量. 由(40.8)知 $\dot{\xi}_\mu$ 为类时矢量,对(40.8)微分,得(40.12),由此知 $\dot{\xi}_\mu$, $\ddot{\xi}_\mu$ 垂直. 利用以上的理论,知 $\ddot{\xi}_\mu$ 为一类空矢量.

§41　麦克斯韦方程适合相对论条件的证明

根据§39中的讨论,我们只消将麦克斯韦方程写为左方为一某级张量的分量而右方为零的方程,便能证明麦克斯韦方程的适合相对论条件.在此处不同系统中的 x,x' 是用(32.10)来联系的,所以此处麦克斯韦方程的适合相对论条件,也称为在(32.10)变换下的"不变"(指形式不变).

有两个证明方法:一个是直接证明,在此证明中我们不必引入势 $\varphi,\boldsymbol{A}$;另外有一个通过势 $\varphi,\boldsymbol{A}$ 的证明.

(1) 直接证明

麦克斯韦方程及电荷的连续性方程是

$$\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u}+(\partial\rho/\partial t)=0, \tag{41.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{u}, \tag{41.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho, \tag{41.3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{41.4}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0. \tag{41.5}$$

我们首先假定$(\rho u_x,\rho u_y,\rho u_z,\mathrm{i}c\rho)$成为一个矢量 j_μ,于是(41.1)成为

$$\partial j_\mu/\partial x_\mu=0. \tag{41.6}$$

其次我们假定 H_x,H_y,H_z,E_x,E_y,E_z 等构成一个张量 $H_{\mu\nu}$

$$H_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & H_z & -H_y & -\mathrm{i}E_x\\ -H_z & 0 & H_x & -\mathrm{i}E_y\\ H_y & -H_x & 0 & -\mathrm{i}E_z\\ \mathrm{i}E_x & \mathrm{i}E_y & \mathrm{i}E_z & 0\end{bmatrix}, \tag{41.7}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}H_{\nu\mu}=\frac{4\pi}{c}j_\nu, \tag{41.8}$$

$$\frac{\partial H_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial H_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial H_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=0, \tag{41.9}$$

便分别地成为(41.2),(41.3),(41.4),(41.5)诸式.具体地讲,在(41.8)中令 ν 分别地为 1,2,3,便得(41.2),令 ν 为 4,便得(41.3);在(41.9)中令 $\mu\nu\lambda$ 分别为 234,314,124,便得(41.4),令 $\mu\nu\lambda$ 为 123,便得(41.5).注意(41.9)左方确是一个张量的 $\mu\nu\lambda$ 分量,因而(41.9)式是满足相对论条件的.

在此必须指出:假定$(\rho u_x,\rho u_y,\rho u_z,\mathrm{i}c\rho)$为一矢量 j_μ,即等于假定在 O 的$(\rho u_x,\rho u_y,\rho u_z,\rho)$及 O' 的$(\rho' u'_x,\rho' u'_y,\rho' u'_z,\rho')$中有一些线性关系,而这些线性关系中的系数都是实数.因此这个假定是可以允许的.同样,假定(41.7)的右方组成一个矢量实际上等于假定在 O 的$(E_x,E_y,E_z,H_x,H_y,H_z)$及 O' 的$(E'_x,E'_y,E'_z,H'_x,H'_y,H'_z)$中有一些线性关系,而这些线性关系中的系数都是实数.因此这些假定是可允许的.

事实上,假定某一个张量在 O 系统中的分量为(41.7)右方,那么在另一系统 O' 中,它的分量必然成为

$$\begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 & -\mathrm{i}b_1 \\ -a_3 & 0 & a_1 & -\mathrm{i}b_2 \\ a_2 & -a_1 & 0 & -\mathrm{i}b_3 \\ \mathrm{i}b_1 & \mathrm{i}b_2 & \mathrm{i}b_3 & 0 \end{bmatrix},$$

而式中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 都是实数,因而有可能成为

$$\begin{bmatrix} 0 & H'_z & -H'_y & -\mathrm{i}E'_x \\ +H'_z & 0 & H'_x & -\mathrm{i}E'_y \\ -H'_y & -H'_x & 0 & -\mathrm{i}E'_z \\ \mathrm{i}E'_x & \mathrm{i}E'_y & \mathrm{i}E'_z & 0 \end{bmatrix}.$$

讨论洛伦兹变换(32.10).对于这个特殊的洛伦兹变换,我们有

$$
\begin{cases}
\rho' u'_x = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}(\rho u_x - v\rho), & \rho' u'_y = \rho u_y, \\
\rho' u'_z = \rho u_z, & \rho' = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}(\rho - \rho v u_x / c^2), \\
E'_x = E_x, & H'_x = H_x, \\
E'_y = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}(E_y - \beta H_z), & H'_y = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}(H_y + \beta E_z), \\
E'_z = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}(E_z + \beta H_y), & H'_z = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}(H_z - \beta E_y).
\end{cases}
\tag{41.10}
$$

在 $\boldsymbol{v}$ 取一般方向的情形下，

$$
\begin{cases}
\rho' \boldsymbol{u}' = \rho \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \left\{ \dfrac{\rho(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})}{v^2} \left[\dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} - 1 \right] - \rho \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right\}, \\
\rho' = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} [\rho - \rho(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) / c^2], \\
\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}) \dfrac{\boldsymbol{v}}{v^2} \left[1 - \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right] + \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \left[\boldsymbol{E} + \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right], \\
\boldsymbol{H}' = (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{v}) \dfrac{\boldsymbol{v}}{v^2} \left[1 - \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right] + \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \left[\boldsymbol{H} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} \right].
\end{cases}
\tag{41.11}
$$

(2) 通过势 $\varphi, \boldsymbol{A}$ 的证明

我们在此有以下的式子：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{41.12}$$

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{41.13}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{41.14}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c} \rho \boldsymbol{u}, \tag{41.15}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -4\pi\rho, \tag{41.16}$$

$$\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{41.17}$$

像以前一样,假定$(\rho\boldsymbol{u}, \mathrm{i}c\rho)$为$j_\mu$,使(41.17)成为(41.6).假定$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$为一个矢量$A_\mu$,使(41.12)成为

$$\partial A_\mu/\partial x_\mu = 0. \tag{41.18}$$

像以前一样,假定(41.7)的右方为一个张量$H_{\mu\nu}$的各个分量.那么(41.13),(41.14)成为

$$H_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu\right] = 0. \tag{41.19}$$

事实上,当$\mu\nu$为12,23,31时,上式成为(41.13),当$\mu\nu$为14,24,34时上式成为(41.14).最后(41.15),(41.16)即是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu + \frac{4\pi}{c}j_\nu = 0. \tag{41.20}$$

以上证明了(41.12)—(41.17)适合相对论条件.

注意,正如以前所指出的一样,我们可以假定$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$为一个矢量,即在此假定中,$\boldsymbol{A}', \varphi'$不至于由于变换而变为虚数.一般讲来,对于任何张量$C_{\mu\nu\theta\rho}\cdots$,如果在某一个系统中

$$C_{\mu\nu\theta\rho\cdots\cdots} = \text{实数},\ (\text{当在 } \mu\nu\theta\rho\cdots \text{ 中有偶数个下标等于 } 4)$$
$$= \text{虚数},\ (\text{当在 } \mu\nu\theta\rho\cdots \text{ 中有奇数个下标等于 } 4)$$

那么这个性质在任何系统中也存在.此后我们所遇到的张量,常带有这个性质.这些张量称为"实张量"(действительный).

以上说明了如果$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$,$(\rho\boldsymbol{u}, \mathrm{i}c\rho)$等是矢量,$\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$等组成张量,那么(41.1)—(41.5),(41.12)—(41.17)可以写成左方是张量右方是零的式子,亦即满足相对论条件的式子.反过来,如果要求(41.1)—(41.5),(41.12)—(41.17)满足相对论条件,那么$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$,$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$等必须有以上所假定的变换性质.例如假定了自$x$系统的(41.17)可以求$x'$系统中的(41.17),便必然获得$(\rho\boldsymbol{u}, \mathrm{i}c\rho)$为矢量的结论.这一点的证明见下一段.关于$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$的证明是极类似的,不拟重复.由$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$的变换性质及在各个不同系统的(41.13),(41.14)

式,便证明了($\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$)的变换性质.

称 $\rho\boldsymbol{u}$,$\mathrm{i}c\rho$ 为($j^{(1)},j^{(2)},j^{(3)},j^{(4)}$),使(41.17)成为

$$\partial j^{(\mu)}/\partial x_\mu = 0. \tag{41.21}$$

我们讨论 $j^{(\mu)}$,$j^{(\mu)'}$之间有什么关系

$$j^{(\mu)'} = f^{(\mu)}, \quad (j^{(1)},j^{(2)},j^{(3)},j^{(4)}), \tag{41.22}$$

可以使(41.21)带来

$$\partial j^{(\mu)'}/\partial x'_\mu = 0. \tag{41.23}$$

当(41.23)成立时,

$$0 = \frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial j^{(\nu)}}\frac{\partial j^{(\nu)}}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu}. \tag{41.24}$$

因为我们假定,(41.21)的成立带来了(41.24),我们可以用拉格朗日乘子法,写下

$$\frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial j^{(\nu)}}\frac{\partial j^{(\nu)}}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu} + \lambda\frac{\partial j^{(\mu)}}{\partial x_\mu},$$

而令 $\partial j^{(\nu)}/\partial x_\rho$ 的各个系数等于零(式中 λ 为拉格朗日乘子).由此得

$$\frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial j^{(\nu)}}\alpha_{\mu\rho} + \lambda\delta_{\rho\nu} = 0.$$

乘以 $\alpha_{\theta\rho}$,得

$$\frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial j^{(\nu)}} = -\lambda\alpha_{\mu\nu}. \tag{41.25}$$

因此 λ 可能是 $j^{(\nu)}$的函数.由上式得

$$\frac{\partial^2 f^{(\mu)}}{\partial j^{(\nu)}\partial j^{(\rho)}} = -\frac{\partial\lambda}{\partial j^{(\rho)}}\alpha_{\mu\nu}.$$

将 ν 与 ρ 交换,得

$$\frac{\partial^2 f^{(\mu)}}{\partial j^{(\rho)}\partial j^{(\nu)}} = -\frac{\partial\lambda}{\partial j^{(\nu)}}\alpha_{\mu\rho}.$$

因此

$$\frac{\partial\lambda}{\partial j^{(\rho)}}\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial\lambda}{\partial j^{(\nu)}}\alpha_{\mu\rho}.$$

乘以 $\alpha_{\mu\theta}$,得

$$\frac{\partial\lambda}{\partial j^{(\rho)}}\delta_{\nu\theta} = \frac{\partial\lambda}{\partial j^{(\nu)}}\delta_{\rho\theta}.$$

取 $\rho=\theta\neq\nu$,得

$$\partial\lambda/\partial j^{(\nu)} = 0. \tag{41.26}$$

因此 λ 不为 j 等的函数. 由(41.25)及上式，得

$$f^{(\mu)} = -\lambda\alpha_{\mu\nu}j^{(\nu)} + \beta^{(\mu)},$$

式中 $\beta^{(\mu)}$ 为一些常数. 如果在一个系统中的 $j^{(\nu)}=0$ 带来另一系统中的 $j^{(\nu)'}=0$，那么 $\beta^{(\mu)}=0$. 因此我们得

$$j^{(\mu)'} = -\lambda\alpha_{\mu\nu}j^{(\nu)}.$$

由此得

$$j^{(\mu)'}j^{(\mu)'} = \lambda^2 j^{(\nu)}j^{(\nu)}. \tag{41.27}$$

如果我们要求 O,O' 系统中的对称性，即要求

$$j^{(\mu)'}j^{(\mu)'} = j^{(\nu)}j^{(\nu)},$$

得 $\lambda=-1$，即得我们所需要的证明.（$\lambda=+1$ 的情形使 ρ,ρ' 在 O,O' 系统相对速度 $\boldsymbol{v}$ 极小时取不同的符号，因而是我们所不要的情形.）

可以在此附带地指出(41.9)与(41.19)是等效的. 有了(41.19)便有(41.9)，有了(41.9)便存在着 A_μ，使(41.19)满足. (41.9)也可以写为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(H^*_{\mu\lambda}) = 0,$$

式中 H^* 乃是 H 的对偶张量，定义为

$$H^*_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta\gamma\delta}H_{\gamma\delta}.$$

§ 42　电荷的讨论

在此，我们讨论两个问题. 第一，是否对于所有的观察者，空间的总电荷都相等，亦即下式中的两个积分

$$\begin{aligned} &\int\rho(x_1,x_2,x_3,x_4)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \\ &\int\rho'(x_1',x_2',x_3',x_4')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3' \end{aligned} \tag{42.1}$$

是否相等？第二，点电荷所构成的 j_μ

$$\begin{aligned} j_i &= eu_i\delta(x_1-\xi_1(t))\delta(x_2-\xi_2(t))\delta(x_3-\xi_3(t)), \\ j_4 &= \mathrm{i}ce\delta(x_1-\xi_1(t))\delta(x_2-\xi_2(t))\delta(x_3-\xi_3(t)) \end{aligned} \tag{42.2}$$

是否满足相对论的要求?

为讨论第一点起见,我们引入四维空间的奥高定理[1]. 令 x_0 为 ct,而讨论在 x_1, x_2, x_3, x_0 的四维空间中的一个体积 V^*,为某一个面 S^* 所包围. 那时奥高定理成为

$$\int \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_0 = \int \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu \mathrm{d}S_\mu^*, \tag{42.3}$$

式中 A 为一个任意矢量场, $A_0 \equiv A_4/\mathrm{i}$. 而 $\mathrm{d}S_\mu^*$ 代表在这个空间中 S^* 的面积元,方向自体积内向外. 注意我们先讨论 x_1, x_2, x_3, x_0 空间中的奥高定理,目的是为避免虚数的体积和面积. 此时必须注意 $\mathrm{d}S_\mu^*$ 不是以前所讨论的矢量(即 $\mathrm{d}S_\mu^*$ 的变换性质与(39.3)中的 A_μ 不一样);因为在以前的讨论中,一个矢量的分量不可能在所有的系统中都是实数[2].

(42.3)的最简单的证明如下:令曲面 S 为许多部分

$$x_1 = \varphi_1(x_2, x_3, x_0), \quad x_1 = \varphi_2(x_2, x_3, x_0), \quad \cdots \tag{42.4}$$

所组成,式中 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 都是单值函数,满足

$$\varphi_1(x_2, x_3, x_0) \geqslant \varphi_2(x_2, x_3, x_0) \geqslant \varphi_3 \geqslant \cdots \tag{42.5}$$

这时

$$\int \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_0 = \int A_1 \Big|_{\varphi_1} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_0 - \int A_1 \Big|_{\varphi_2} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_0 + \int A_1 \Big|_{\varphi_3} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_0 - \cdots,$$

亦即是

$$\int A_1 \mathrm{d}S_1^*. \tag{42.6}$$

---

[1] 这定理应称高斯-奥斯特洛格拉得斯基(Остроградокий)定理,在此简称奥高定理.

[2] 在原则上,我们也可以令 $\mathrm{d}S_\mu^*$ 为一矢量,如果我们定义(x, y, z, ct)为一个矢量. 但在本书中,我们令$(x, y, z, \mathrm{i}ct)$为一矢量,目的是使 x_μ 变至 x'_μ 的变换为一个正交变换,容易处理.

用同样的方法处理(42.3)左方其他项,相加,便得(42.3).

为使面积元成一像$(x,y,z,\mathrm{i}ct)$的矢量起见,我们引入$\mathrm{d}S_\mu$,定义为

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}S_j = (\mathrm{d}S_j^*)\mathrm{i} \quad (j=1,2,3), \\ &\mathrm{d}S_4 = \mathrm{d}S_0. \end{aligned} \tag{42.7}$$

可以证明:这样的$\mathrm{d}S_\mu$在洛伦兹变换(39.2)下服从(39.3),因而构成一个矢量.用这样的$\mathrm{d}S_\mu$后,得

$$\int \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 = \int \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu \mathrm{d}S_\mu.$$

亦即

$$\int (\partial A_\mu / \partial x_\mu) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 = \int A_\mu \mathrm{d}S_\mu. \tag{42.8}$$

现在补入(42.8)的另一个证明.引入曲面坐标u_1,u_2,u_3,w,使

$$x_\mu = x_\mu(u_1,u_2,u_3,w), \tag{42.9}$$

使包围体积的曲面为$w=w_0$,而使体积中的点满足

$$0 < w < w_0.$$

令

$$N_1 = \frac{D(x_2,x_3,x_4)}{D(u_1,u_2,u_3)}, \quad N_2 = -\frac{D(x_3,x_4,x_1)}{D(u_1,u_2,u_3)},$$

$$N_3 = \frac{D(x_4,x_1,x_2)}{D(u_1,u_2,u_3)}, \quad N_4 = -\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(u_1,u_2,u_3)};$$

那么得

$$\mathrm{d}S_\mu = N_\mu \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3.$$

(42.8)右方成为

$$\begin{aligned} \int A_\mu N_\mu \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 &= \int \frac{\partial}{\partial w}(A_\mu N_\mu) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \mathrm{d}w \\ &= \int \left(A_\mu \frac{\partial N_\mu}{\partial w} + N_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial w} \right) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{42.10}$$

(42.8)的左方等于

$$\int \left\{ \sum_i \frac{\partial A_\mu}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x_\mu} \right\} \frac{D(x_1,x_2,x_3,x_4)}{D(u_1,u_2,u_3,w)} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \mathrm{d}w. \tag{42.11}$$

比较(42.10)及(42.11)中只含有 A_1 的一项.在(42.10)中,被积分的项是

$$A_1(\partial N_1/\partial w) + N_1(\partial A_1/\partial w). \tag{42.12}$$

在(42.11)中,被积分的项是

$$\left[\sum_{u_i}\left(\frac{\partial A_1}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial A_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]D. \quad \left(D \equiv \frac{D(x_1,x_2,x_3,x_4)}{D(u_1,u_2,u_3,w)}\right) \tag{42.13}$$

在

$$\sum_i \frac{\partial x_\mu}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial x_\mu}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_1} = \delta_{\mu 1}$$

的两边乘以 N_μ,对 μ 取和,即获得了

$$D(\partial \omega/\partial x_1) = N_1. \tag{42.14}$$

将(w,u_1,u_2,u_3)换为(u_1,u_2,u_3,w)或(u_2,u_3,w,u_1)或(u_3,w,u_1,u_2),即获得了

$$\begin{cases} D\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\dfrac{D(x_2,x_3,x_4)}{D(u_2,u_3,w)}, \\ D\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = \dfrac{D(x_2,x_3,x_4)}{D(u_3,w,u_1)}, \\ D\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\dfrac{D(x_2,x_3,x_4)}{D(w,u_1,u_2)}. \end{cases} \tag{42.15}$$

以(42.14),(42.15)的值代入(42.13),再对方括号中第一项应用分部积分法,得

$$A_1\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{D(x_2,x_3,x_4)}{D(u_2,u_3,w)} - \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{D(x_2,x_3,x_4)}{D(u_3,w,u_1)} + \frac{\partial}{\partial u_3}\frac{D(x_2,x_3,x_4)}{D(w,u_1,u_2)}\right\} + \frac{\partial A_1}{\partial w}N_1.$$

这可以算出与(42.12)完全相等.以上便完成了所需的证明.

严格讲来,(42.8)的左方是一个赝标量,因为体积 $dx_1dx_2dx_3dx_4$ 是一个赝标量(见§39).将 dS_μ 写为 $N_\mu du_1du_2du_3$,而又将 N_μ 表为 $D\partial w/\partial x_\mu$(见(42.14)式),便不难看出 dS_μ 也是一个赝矢量.为说明这一点,令我们对于不同的系统 x,x'取同样的曲线坐标,那时 $du_1du_2du_3$ 为不变量,D 为赝标量,$\partial w/\partial x_\mu$ 为矢量,因此 $N_\mu du_1du_2du_3$ 为赝矢量.

利用(42.8)及(41.17),我们便很容易证明总电荷对于所有的观察者是一样的.以 j_μ 代替(42.8)的 A_μ,而令包围体积 V 的面为 $x_4=$常数,$x_4'=$常数,及在三维空间中无穷远处的面.由于(41.17),左方等于零.右方包含三个面积分,一个在 $x_4=$常数面

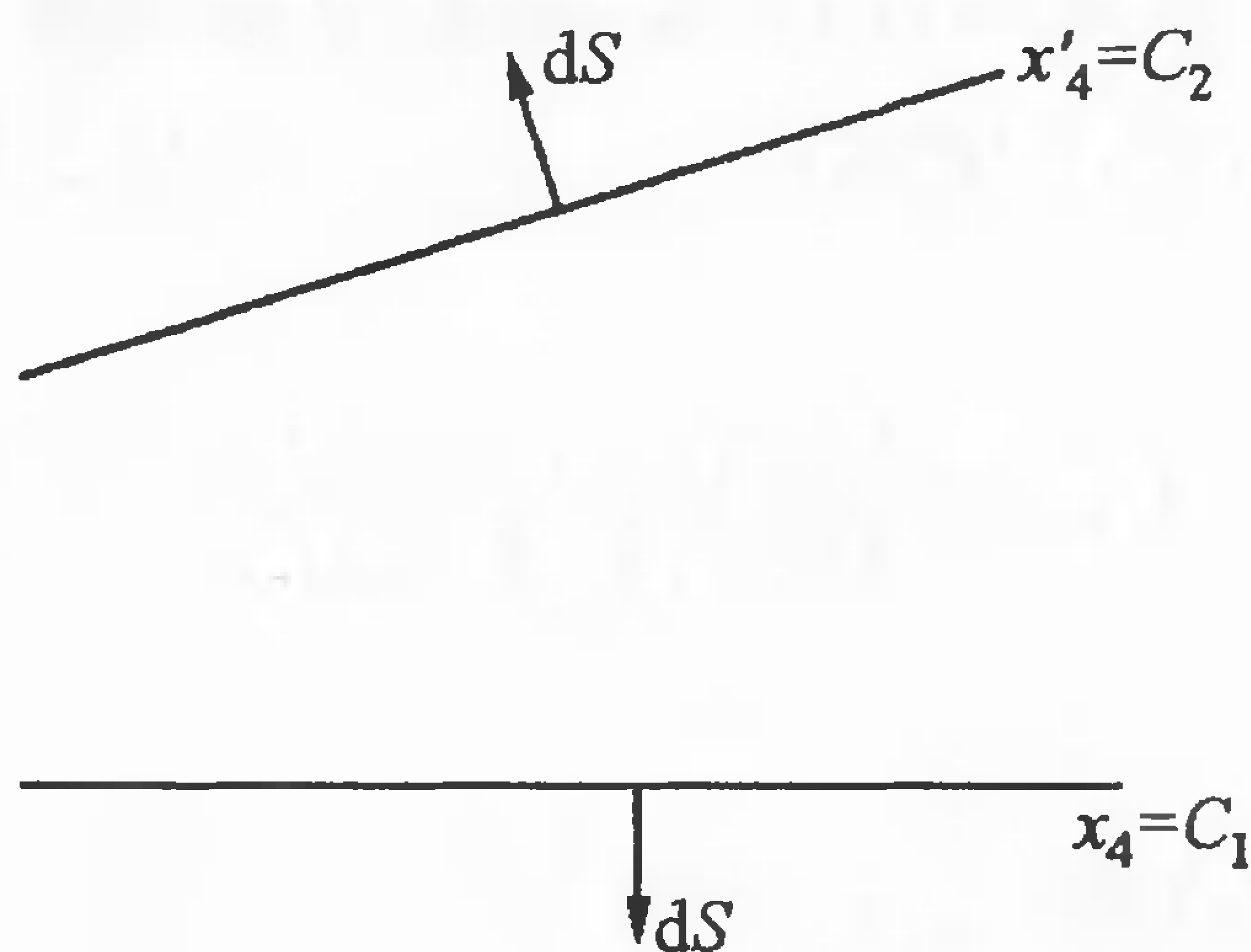


图 33

上，一个在 x'_4 = 常数面上，最后一个在三维空间的无穷远处，该处的 j 可以假定等于零. 令以上两个面的情形正如图 33 中所画出的. 那么在 x_4 = 常数面上的面积分为

$$-\int ic\rho dx_1 dx_2 dx_3, \quad (42.16)$$

而在 x'_4 = 常数面上的面积分为

$$\int j_\mu dS_\mu = \int j'_\mu dS'_\mu = \int ic\rho' dx'_1 dx'_2 dx'_3. \quad (42.17)$$

(42.16)和(42.17)相差一个符号，由于 dS 在这第一个面上与时间轴成钝角，而在第二个面上成锐角. 因(42.16)与(42.17)的和等于零，得

$$\int \rho(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \int \rho'(x'_1, x'_2, x'_3, t') dx'_1 dx'_2 dx'_3. \quad (42.18)$$

以上证明，不论 t, t' 取什么值，上式总是成立的.

如果将 x'_4 = 常数的面也换为 x_4 = 常数的面，使包围体积的面为 $x_4=C_1$ 及 $x_4=C_2$ 两个面及在无穷远处的面，以上的理论便告诉我们总电荷对时间不变，正如我们所熟知的.

在通常电学书籍中，我们用以下的方法来证明一个物体的总电荷对于所有的各个观察者都是相同的. 假定物体有体积而其中各部分的速度相同，令 O^0 为一个观察者，与物体一起运动，令 O 为另一个观察者，看到物体以速度 u 运动. O^0 通常称为"静止系统"(система покоя). 利用斐兹杰惹收缩的理论，我们知 O 及 O^0 所观察到物体的体积 $\delta V, \delta V^0$ 之间有以下的关系：

$$\delta V = \delta V^0 (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\beta = u/c). \quad (42.19)$$

对于 O^0 而言，j_μ 是

$$(0, 0, 0, ic\rho^0).$$

对于 O 而言，j_μ 可以自上值通过一个洛伦兹变换而求得；它等于

$$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(\rho^0 u_1, \rho^0 u_2, \rho^0 u_3, \mathrm{i}c\rho^0).$$

因此对于 O 而言，电荷密度是 $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\rho^0$，总电荷是

$$\begin{aligned}\rho\delta V &= \rho^0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\delta V \\ &= \rho^0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\delta V^0 = \rho^0\delta V^0,\end{aligned}$$

因而与 O 的选择无关，因而是一个不变量，或标量．

这个证明似乎有一个缺点，即是必须假定物体各部分的速度相同．事实上，这不是严重的缺点，因为我们可以将物体分为许多小块，使每一小块中的各部分的速度几乎相同．根据以上的讨论，对于每一小块而言，总电荷对于所有的观察者是一样的；因此对于整个物体，总电荷对于所有的观察者是一样的．

在这里我们附带地证明了

$$\rho(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} = \rho^0 = \text{标量} \quad (\text{因 } \rho^0 \text{ 与 } O \text{ 的选择无关}).$$

这个式子也可以用下法证明．已知 $(\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \mathrm{i}c\rho)$ 及

$$\dot{\xi}_\mu = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1, u_2, u_3, \mathrm{i}c)$$

都是矢量，又已知

$$j_1/\dot{\xi}_1 = j_2/\dot{\xi}_2 = j_3/\dot{\xi}_3 = j_4/\dot{\xi}_4,$$

那么上式的共同值必然是一个标量，亦即 $\rho(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ 是一个标量．

现在我们来讨论第二点，即点电荷 j_μ 的式(42.2)是否满足相对论要求，亦即如果 j_μ 在某一个系统中取(42.2)的形式，经过变换后它是否保持(42.2)的形式？或如果让它在不同系统中取(42.2)的形式，那么它能否满足(39.3)？

首先让我们证明

$$\delta(x_1-\xi_1(s))\delta(x_2-\xi_2(s))\delta(x_3-\xi_3(s))\delta(x_0-\xi_0(s))$$
$$(x_0 = x_4/\mathrm{i}, \xi_0 = \xi_4/\mathrm{i}) \tag{42.20}$$

是形式不变的标量（注意在此，ξ_μ 认为是固有时 s 的函数）．首先

我们看到

$$\delta(x_1' - \xi_1'(s))\delta(x_2' - \xi_2'(s))\delta(x_3' - \xi_3'(s))\delta(x_0' - \xi_0'(s)) \tag{42.21}$$

乘到一个 x 的函数 F 上，也使得乘积等于零，除开 $x_\mu' = \xi_\mu'(s)$ 的一点外，亦即除开 $x_\mu = \xi_\mu(s)$ 的一点外．因此(42.21)即是(42.20)乘上一个 $\xi_\mu(s)$ 的函数，称这个量为 K．因

$$\begin{aligned}1 &= \int \delta(x_1' - \xi_1'(s))\cdots \mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'\mathrm{d}x_0' \\ &= \int K\delta(x_1 - \xi_1(s))\cdots \mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'\mathrm{d}x_0' \\ &= \int K\delta(x_1 - \xi_1(s))\cdots \frac{D(x_1',x_2',x_3',x_0')}{D(x_1,x_2,x_3,x_0)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_0 \\ &= \int K\delta(x_1 - \xi_1(s))\cdots \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_0 = K\end{aligned}$$

(如果只讨论正常洛伦兹变换)，我们证明了 $K=1$，亦即证明了(42.20)，(42.21)相等，亦即证明(42.20)是形式不变量．

(42.2)中的 j_μ 可以写为

$$ce\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}s}\delta(x_1 - \xi_1(s))\delta(x_2 - \xi_2(s))\cdots\delta(x_0 - \xi_0(s))\mathrm{d}s. \tag{42.22}$$

为证实此点，只消对 s 作出积分．讨论 $j_\mu(x_1,x_2,x_3,t)$，令相当于时刻 t 的固有时为 s^*，那么(42.2)用固有时 s 作为 ξ 的独立变数后，应成为

$$\begin{cases} eu_i\delta(x_1 - \xi_1(s^*))\delta(x_2 - \xi_2(s^*))\delta(x_3 - \xi_3(s^*)), \\ \mathrm{i}ce\delta(x_1 - \xi_1(s^*))\delta(x_2 - \xi_2(s^*))\delta(x_3 - \xi_3(s^*)). \end{cases} \tag{42.23}$$

另一方面，利用

$$\begin{aligned}&\int F(s)\delta(x_0 - \xi_0(s))\mathrm{d}s \\ &\qquad = \int F(s)\frac{1}{(\mathrm{d}\xi_0/\mathrm{d}s)}\delta[\xi_0(s) - x_0]\left(\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

$$=\int F(s)\frac{1}{\mathrm{d}\xi_0/\mathrm{d}s}\delta[\xi_0(s)-x_0]\mathrm{d}\xi_0=\left[F(s)\frac{1}{\mathrm{d}\xi_0/\mathrm{d}s}\right]_{\xi_0(s)=x_0}$$

$$=[F(s)/(\mathrm{d}\xi_0/\mathrm{d}s)]_{s=s^*},$$

便可以作出(42.22)的积分. 如此便不难证明(42.22)中的 j_i, j_4 即是(42.23)式.

将(42.2)写为(42.22)后,便不难看出它是合乎相对论要求的. s 是不变量, $\mathrm{d}\xi_\mu/\mathrm{d}s$ 是矢量,四个 δ 函数的乘积是不变量,因此(42.22)是矢量. 这即是说：如果在各个系统中 j_μ 都取(42.22)的形式,那么 j_μ, j'_μ 等服从(39.3).

§43　积分的矢量、张量性质

在上节(§42)我们已经看到：虽然 $\mathrm{i}c\rho$ 本身是一个矢量的第四个分量,但 $\int\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是一个不变量. 现在我们讨论在什么情形下,某些积分能够成为一个张量的分量.

在这里,一般的定理是：如果张量 $B_{\mu\nu\cdots\rho\theta}$ 适合

$$\partial B_{\mu\nu\cdots\rho\theta}/\partial x_\theta=0, \tag{43.1}$$

那么

$$\int B_{\mu\nu\cdots\rho4}(x_1,x_2,x_3,x_0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{43.2}$$

是一个张量的 $\mu\nu\cdots\rho$ 分量. 意即是：不论 t, t' 取什么值,

$$\int B'_{\mu\nu\cdots\rho4}(x'_1,x'_2,x'_3,x'_0)\mathrm{d}x'_1\mathrm{d}x'_2\mathrm{d}x'_3$$

$$=\alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}\cdots\alpha_{\rho\gamma}\int B_{\alpha\beta\cdots\gamma4}(x_1,x_2,x_3,x_0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3. \tag{43.3}$$

在以下的证明中,让 B 只有三个下标 $\mu\rho\theta$.

令 A_μ, C_μ 为两个已知的常矢量(所谓常矢量,即不与 x 有关的矢量). 令 D_θ 为一矢量,定义为

$$D_\theta=A_\mu C_\rho B_{\mu\rho\theta}. \tag{43.4}$$

显然地，D_θ 满足

$$\partial D_\theta/\partial x_\theta = 0. \tag{43.5}$$

引用奥高定理，得

$$\int_V \partial D_\theta/\partial x_\theta \mathrm{d}V = \int D_\theta \mathrm{d}S_\theta = 0. \tag{43.6}$$

令包围体积 V 的面依然为 $x_4=$常数面，$x_4'=$常数面，及在三维空间无穷远处的面，重复上节中的讨论，便获得

$$\int D_4(x_1,x_2,x_3,x_0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

$$= \int D_4'(x_1',x_2',x_3',x_0')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'; \tag{43.7}$$

亦即

$$\int A_\mu C_\rho B_{\mu\rho 4}(x_1,x_2,x_3,x_0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

$$= \int A_\mu' C_\rho' B_{\mu\rho 4}'(x_1',x_2',x_3',x_0')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'. \tag{43.8}$$

因为 A_μ，C_ρ（虽然是常矢量）是任意的，

$$\int B_{\mu\rho 4}(x_1,x_2,x_3,x_0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{43.9}$$

必然是一个张量的 $\mu\rho$ 分量. 事实上如果上式不是一个张量的 $\mu\rho$ 分量，(43.8)不能对于任意的 A，C 都满足.

以上的理论同时也证明了如果(43.1)不满足，(43.2)的值与所选择的 x_0 的值有关，同时(43.3)对于一般的 x_0，x_0' 是不能成立的.

(43.3)两方的两个面积分中的面，在事实上是两个不同的面，包含了不同的时空点. 由于这个情形，我们必须援用奥高定理. 如果讨论

$$\int B'_{\mu\nu\cdots\rho\theta}\mathrm{d}S_\theta', \quad \int B_{\mu\nu\cdots\rho\theta}\mathrm{d}S_\theta, \tag{43.10}$$

而令积分面包含同样的时空点（即取同一个时空面作为积分面），那么(43.10)中的积分显然地服从

$$\int B'_{\mu\nu\cdots\rho\theta}\mathrm{d}S'_{\theta}=\alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}\cdots\alpha_{\rho\gamma}\int B_{\alpha\beta\cdots\gamma\theta}\mathrm{d}S_{\theta},\tag{43.11}$$

因而成为某一个张量的 $\mu\nu\cdots\rho$ 分量. (43.10)中所讨论的问题与(43.3)中所讨论的问题是不同的两回事. 我们以后会遇到像(43.10)中的积分.

我们通常所遇到的像(43.2)等式,是全部三维空间的积分,但是显然地,以上的讨论也可以应用到对一部分空间积分的(43.2)式. 假定在

$$\psi(x_1,x_2,x_3,x_0)=0\tag{43.12}$$

面上, $B_{\mu\nu\cdots\rho\theta}$等于零. 令(43.12)曲面为图 34 中的 $ACEFHGKLM$. 令 x_0=常数 k 面交此曲面于曲线 Γ 上,令 x'_0=常数 k'面交此曲面于曲线 Γ'上. 令 Γ 所包围的面为 V,Γ'所包围的面为V'; V 与 V'对 O 及 O'而言乃是三维空间的体积. 假定(43.1)式在曲面中各点都成立,应用奥高定理,不难证明在

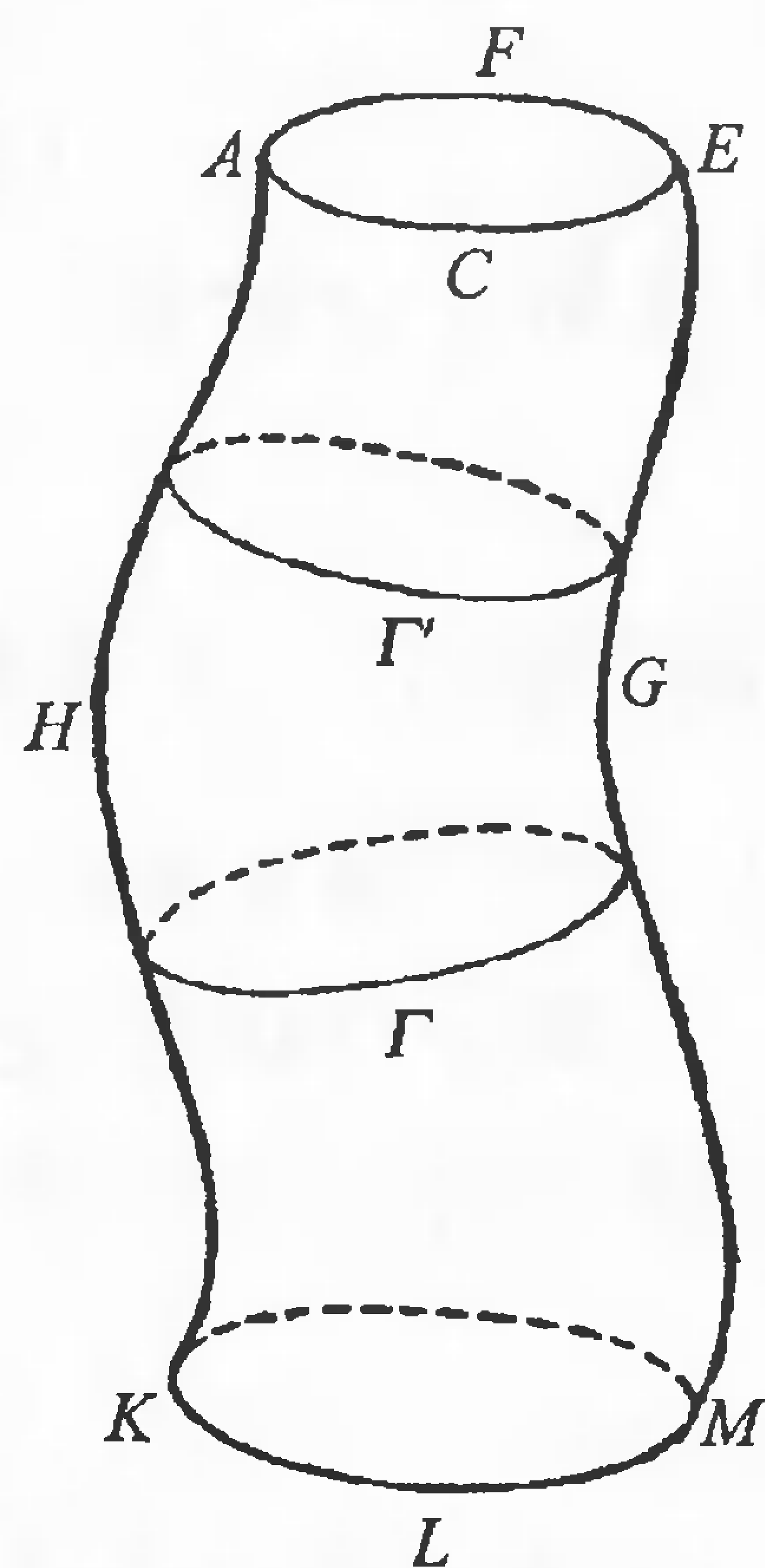


图 34

$$\int_V B_{\mu\nu\cdots\rho4}(x_1,x_2,x_3,k)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$$

$$\int_{V'} B'_{\mu\nu\cdots\rho4}(x'_1,x'_2,x'_3,k')\mathrm{d}x'_1\mathrm{d}x'_2\mathrm{d}x'_3$$

中存在着关系,正如一个张量 $C_{\mu\nu\cdots\rho}$在两个系统中的分量.

显然地,在 $\psi(x_1,x_2,x_3,x_0)=0$ 面上 B 等于零的要求,也可以换为在这个面上

$$B_{\mu\nu\cdots\rho\theta}\mathrm{d}S_{\theta}=0\tag{43.13}$$

的要求.

如果 B 代表电磁场或某一个场,那么"在 $\psi=0$ 面上 B 等于零"即等于说在 $\psi=0$ 面中有一些场,与 $\psi=0$ 面外的场分开. 在这个情形下,我们说在 $\psi=0$ 面中有一个波包(волновой пакет).

§44 电磁场的能量-动量张量.洛伦兹力

在此节中我们讨论洛伦兹力

$$\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{u}/c)\times\boldsymbol{H} \tag{44.1}$$

在洛伦兹变换下的变换性质.首先讨论一个质点,时空坐标为$\xi_\mu(s)$.显然地

$$c^{-1}H_{\nu\mu}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\,\dot{\xi}_\mu \tag{44.2}$$

是一个矢量,而它的 1,2,3 分量正是

$$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\{\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{u}/c)\times\boldsymbol{H}\}, \tag{44.3}$$

它的第 4 分量是

$$\mathrm{i}c^{-1}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u})(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{44.4}$$

由此可见,一个单位点电荷上所受的洛伦兹力的三个分量,乃是$(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$乘上某一个四维矢量的 1,2,3 分量.

如果电荷不集中于一点而有一个密度 ρ,那么洛伦兹力在 O 系统中的各个分量分别为 $\nu=1,2,3$ 的

$$c^{-1}\int H_{\nu\mu}(x)j_\mu(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \tag{44.5}$$

在 O' 系统中的各个分量为 $\nu=1,2,3$ 的

$$c^{-1}\int H'_{\nu\mu}(x')j'_\mu(x')\mathrm{d}x'_1\mathrm{d}x'_2\mathrm{d}x'_3. \tag{44.6}$$

(44.5),(44.6)的积分区域是在时空间中的两个不同面,因此求它们中的关系,必须通过 $H_{\nu\mu}$,j_μ 的运动方程,及类似奥高定理的讨论.一般地讲,(44.5)是 t 的函数,(44.6)是 t' 的函数,因此它们间不可能存在一个像(39.3)的关系,因此它们不构成一个矢量.

对于一个点电荷而言,我们已说明$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$乘上洛伦兹力的三个分量是一个四维矢量的 1,2,3 分量.不难证明,对于一个点电荷,$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$乘上(44.5)即是(44.2)乘上总电荷.(为证明这一

点，只消以点电荷的 j_μ 代入(44.5)作出积分即行.)因此$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$乘上(44.5)构成一个矢量.

让我们直接地计算点电荷所构成的(44.5)的变换性质. 为方便起见，称(44.5)为 $K_{(\nu)}$. j_μ 在此由(42.2)决定. 先讨论"静止系统"所观察到的量，亦即讨论一个与点电荷一起运动的观察者 O^0 所观察到的量. 同以前一样，将这些量上加一个上标"0". 显然地，

$$t^0 = s, \quad \boldsymbol{u}^0 = 0.$$

以上面的 $\boldsymbol{u}^0$ 代入(42.2)，再以(42.2)的 j_μ 代入(44.5)，作出积分，得

$$K^0_{(\nu)} = \mathrm{i}eH^0_{\nu 4}(\xi^0_1(s), \xi^0_2(s), \cdots). \tag{44.7}$$

假定对于某一个观察者 O，点电荷以速度$(u,0,0)$运动. 用同样步骤，算出

$$K_{(\nu)} = e(\beta H_{\nu 1} + \mathrm{i}H_{\nu 4}). \tag{44.8}$$

因此

$$K_{(\nu)} = e(\beta\alpha_{\nu\mu}\alpha_{1\rho}H^0_{\mu\rho} + \mathrm{i}\alpha_{\nu\mu}\alpha_{4\rho}H^0_{\mu\rho}).$$

式中 α_ν 代表自 x^0 变换至 x 的系数. 因 O^0 看到 O 以速度$(-u,0,0)$运动，得

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_{44} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, & \alpha_{14} = -\alpha_{41} = -\mathrm{i}\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1, & \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \cdots = 0, \end{cases} \tag{44.9}$$

由此算出

$$\begin{cases} K_{(1)} = K^0_{(1)}, & K_{(2)} = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}K^0_{(2)}, \\ K_{(3)} = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}K^0_{(3)}, & K_{(4)} = \mathrm{i}\beta K^0_{(1)}; \end{cases} \tag{44.10}$$

这说明了 $K_{(\nu)}$ 的变换性质，也说明了 $K_{(\nu)}$ 不是矢量. 另一方面，令 $L_\nu = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}K_{(\nu)}$，得

$$\begin{cases} L^0_\nu = K^0_{(\nu)}, & \\ L_1 = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}L^0_1, & L_2 = L^0_2, \\ L_3 = L^0_3, & L_4 = \mathrm{i}\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}L^0_1, \end{cases} \tag{44.11}$$

说明了 L_ν 可能是一个矢量.

对于点电荷，用相对论语言去讨论洛伦兹力是没有困难的；因为我们有矢量(44.2)，它的头三个分量除了$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$的倍数外即

是洛伦兹力. 对于电荷不集中的情形，我们无法自一般性的理论写出一个矢量，使它的头三个分量与洛伦兹力有一个简单的关系. 因此在这个情形下，用相对论语言去讨论整个洛伦兹力，是有困难的.

这便是§27中“电子的自作用力等于零”的一句话不一定能满足相对论条件的原因. 在§27中，我们曾假定电子各部分的收缩率由电子中心速度决定；这样的理论本身不符合相对论条件，因为相对论要求电子各部分依照它本身的速率而收缩. 但不论收缩率是否由电子中心速率或由各部分的速率决定，我们可以算出电子的自作用力(在个别情形下)，而证明“自作用力等于零”(即§27的(27.4)式)不符合于相对论.

让我们在此证明有一个张量 $T_{\nu\mu}$，适合

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu},$$

$$\partial T_{\nu\mu}/\partial x_\mu = c^{-1} H_{\nu\mu} j_\mu. \tag{44.12}$$

由于(44.12)右方的头三个分量是洛伦兹力密度，我们用 f_ν 来代表(44.12)右方. $T_{\nu\mu}$的式子为

$$\frac{1}{4\pi} H_{\nu\rho} H_{\rho\mu} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\nu\mu} H_{\rho\theta} H_{\rho\theta}. \tag{44.13}$$

证明如下：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{1}{4\pi} H_{\nu\rho} H_{\rho\mu} + \frac{1}{16\pi}\delta_{\nu\mu} H_{\rho\theta} H_{\rho\theta}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial H_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} H_{\rho\mu} + H_{\nu\rho}\frac{\partial H_{\rho\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} H_{\rho\theta}\frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial x_\nu}\right\}. \tag{44.14}$$

由于 $H_{\rho\mu}$的反对称性，上式右方花括号中第一项可以写为

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial H_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} H_{\rho\mu} - \frac{\partial H_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} H_{\mu\rho}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial H_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} H_{\rho\mu} - \frac{\partial H_{\nu\mu}}{\partial x_\rho} H_{\rho\mu}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial H_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} H_{\rho\mu} + \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} H_{\rho\mu}\right\}.$$

(第一个等号是将 $\mu\rho$ 改写为 $\rho\mu$ 而获得的,第二个等号是由 $H_{\nu\mu}=-H_{\mu\nu}$而获得的.)由于(41.9),可证(44.14)花括号中第一、第三两项的和等于零.利用(41.8),得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}T_{\nu\mu}=\frac{1}{4\pi}H_{\nu\rho}\frac{4\pi}{c}j_\rho=\frac{1}{c}H_{\nu\mu}j_\mu,$$

即是我们所欲证明的.

将 $T_{\nu\mu}$各分量写出,与§3中的 $T_{ij}\,(i,j=1,2,3)$, $\boldsymbol{g},u,\boldsymbol{Y}$ 等比较,可见 $T_{\mu\nu}$即是

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{31} & -\mathrm{i}cg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{32} & -\mathrm{i}cg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -\mathrm{i}cg_3 \\ -\frac{\mathrm{i}}{c}Y_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}Y_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}Y_3 & u_{EH} \end{bmatrix}, \tag{44.15}$$

式中 $T_{ij}\,(i,j=1,2,3)$是§3中的(3.13),(g_1,g_2,g_3)是动量密度$(1/4\pi c)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$,$(Y_1,Y_2,Y_3)$是乌莫夫矢量$(c/4\pi)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$,$u_{EH}$是电磁场能量密度$(1/8\pi)(E^2+H^2)$(在§3中我们以 u 代表电磁场能量密度).表面上看来,似乎(44.15)不是对称的,但由于 $\boldsymbol{g}=c^{-2}\boldsymbol{Y}$,它实际上是对称的.事实上,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}H_{\mu\rho}H_{\rho\nu}+\frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu}H_{\rho\theta}H_{\rho\theta} \\ &= \frac{1}{4\pi}H_{\rho\nu}H_{\mu\rho}+\frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu}H_{\rho\theta}H_{\rho\theta} \\ &= \frac{1}{4\pi}(-H_{\nu\rho})(-H_{\rho\mu})+\frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu}H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}=T_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

将 $T_{\nu\mu}$写为(44.15),便可以看出(44.12)代表能量、动量守恒定理(§3).例如讨论 $\nu=1$ 的(44.12).将左右两方对空间(三维空间)积分,得

$$\int\mathrm{d}V\left\{\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}+\frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\partial(-\mathrm{i}cg_1)}{\partial t}\right\}=\int f_1\mathrm{d}V,$$

$$(\mathrm{d}V=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3)$$

亦即

$$-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g_1\mathrm{d}V+\int(\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S})_1=\int f_1\mathrm{d}V, \qquad (44.16)$$

式中$(\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S})_1$代表$(\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S})$的 x 分量.(44.16)显然是(3.12)的第一个分量,代表沿 x 方向的动量守恒.如果讨论 $\nu=4$ 的(44.12),我们将左右两方对空间(三维空间)积分,得

$$\int\mathrm{d}V\left\{-\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}-\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial Y_2}{\partial x_2}-\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial Y_3}{\partial x_3}+\frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\partial u_{EH}}{\partial t}\right\}=\int f_4\mathrm{d}V$$

$$=\int c^{-1}H_{4\mu}j_\mu\mathrm{d}V=\mathrm{i}c^{-1}\int\rho(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}V,$$

亦即是

$$-\int\boldsymbol{Y}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u_{EH}\mathrm{d}V=\int\rho(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}V, \qquad (44.17)$$

亦即是(3.4)式,代表能量守恒的式子.因此(44.12)可以认为是动量、能量守恒的微分形式,而§3 中的(3.4),(3.12)代表动量、能量守恒的积分形式.

这一节的讨论说明三维空间中的张量 T_{ij}及矢量 $\boldsymbol{g},\boldsymbol{Y}$,标量 u 合组成一个四维空间的张量 $T_{\nu\mu}$(44.15);它满足(44.12),代表着动量、能量的守恒.

§45 几个特殊问题中动量、能量能否构成一个矢量的问题

在这一节中我们讨论在几个特殊问题中所遇到的动量、能量,看它能否构成一个矢量.

(1) 一个电子的电磁场的动量、能量

一个洛伦兹电子的电磁场的动量、能量是

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}=\dfrac{4}{3}(U_0/c^2)\boldsymbol{u}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}+O(\dot{u}),\\[2ex] U=U_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{3}\beta^2\right)+O(\dot{u}),\end{cases} \qquad (45.1)$$

(见(14.9),(14.10)),因而$(\boldsymbol{G},\mathrm{i}U/c)$不构成一个矢量.一个阿伯拉汉姆电子的动量、能量是

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}=\dfrac{1}{2}U_0\dfrac{\boldsymbol{u}}{|u|}\left\{\dfrac{c^2+u^2}{cu^2}\ln\dfrac{c+u}{c-u}-\dfrac{2}{u}\right\}+O(\dot{u}),\\ U=U_0\left\{\dfrac{c}{u}\ln\dfrac{c+u}{c-u}-1\right\}+O(\dot{u}),\end{cases}\tag{45.2}$$

(见(14.19),(14.20)),因而$(\boldsymbol{G},\mathrm{i}U/c)$也不构成矢量.

(2) 两个点电荷系统的作用动量,作用能量

如果称两个电荷为$e^{(1)},e^{(2)}$,那么作用动量,作用能量是动量、能量中含有$e^{(1)}e^{(2)}$的一项.

在§19中,我们已算出如果一个电荷不运动,作用能为$e^{(1)}e^{(2)}/r$;(x,y,z)及r代表两个电荷的距离(见(13.21)).又算出如果两个电荷的速度相等而相反时,$\boldsymbol{v}^{(1)}=-\boldsymbol{v}^{(2)}$,作用能为

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{\{x^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)\}^{1/2}}\quad(v=|\boldsymbol{v}^{(1)}|).\tag{45.3}$$

现在假定$e^{(1)}=e^{(2)}$,假定O为一个观察者,看到两个电荷以速度$\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}=-\boldsymbol{v}^{(1)}$运动着,那么它所观察到的作用动量,作用能量分别为零及(45.3).令O'为另一个观察者,与第一个电荷一起运动.如果作用动量、能量$(\boldsymbol{G},\mathrm{i}U/c)$确构成一个矢量,那么$O'$所观察的能量可以由$O$所观察到的动量、能量经过一个转换而得到.亦即

$$(\mathrm{i}U'/c)=\sum_i\alpha_{4i}C_i+\alpha_{44}(\mathrm{i}U/c)=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{i}U/c).\tag{45.4}$$

利用x,y,z与$t^{(2)}$的关系,可以将(45.4)中的U'表为$t^{(2)}$的函数.

我们已经算出的U'是$e^{(1)}e^{(2)}/r'$,利用$x^{(1)},y^{(1)},z^{(1)},x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}$与$t^{(2)}$的关系及洛伦兹变换,也可以表为$t^{(2)}$的函数.可以验证这两个$t^{(2)}$的函数恰好相等.这似乎指出:作用动量、能量可以构成一个矢量.但考虑到一般情形,便知它不能构成一个矢量.理由是极简单的,O系统的作用动量、能量是四维空间中$x_0=k$面上的一个积分,值与k有关,O'系统的作用动量、能量是四维空间中$x_0'=k'$面上的一个积分,值与k'有关,这两个面是不同的面.因此,在O,O'系统的作用动量、能量间,不可能有一个线性关系,如果我们限定这个关系式中的系数与k,k'无关.因此作用动量、能量不构成一个矢量.

(3) 对于一个平面的电磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos 2\pi\nu[t - (n_x x + n_y y + n_z z)/c],$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \cos 2\pi\nu[t - (n_x x + n_y y + n_z z)/c], \tag{45.5}$$

我们已证明了

$$(n_x\nu, n_y\nu, n_z\nu, \mathrm{i}\nu) \tag{45.6}$$

构成一个矢量(见(34.13),(34.14)).一般地讲,如果有一个电磁波包(即电磁场集中于一个区域中的情形),而它的电磁场适合 $j_\mu=0$ 的麦克斯韦方程,那么因为 $\partial T_{\nu\mu}/\partial x_\mu=0$,

$$\frac{\mathrm{i}}{c}\int T_{\mu 4}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{45.7}$$

便构成一个矢量(见§43的讨论),亦即

$$\left(\int g_1 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,\ \int g_2,\ \int g_3,\ \mathrm{i}/c\int u_{EH}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\right)$$

构成一个矢量,亦即

$$(G_1, G_2, G_3, \mathrm{i}U/c) \tag{45.8}$$

构成一个矢量.根据§43中最末一段的讨论,(45.7)中的积分区域不一定是全部三维空间,而可以是三维空间的一部分.

严格地讲,(45.8)是属于一个波包的,而(45.6)是属于一个平面波的,亦即属于一个伸延至无穷远的电磁场的,因而(45.6),(45.8)中没有关系.但事实上我们可以讨论一个波包,其中绝大部分区域的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 是一个平面波(45.5).对于这样一个波包,可以通过直接计算,证明对于观察者 O,我们几乎有

$$\frac{G_1}{n_x\nu} = \frac{G_2}{n_y\nu} = \frac{G_3}{n_z\nu} = \frac{\mathrm{i}U/c}{\mathrm{i}\nu}. \tag{45.9}$$

称上式的值为 K.同样,对于观察者 O',得

$$\frac{G_1'}{n_x'\nu'} = \frac{G_2'}{n_y'\nu'} = \frac{G_3'}{n_z'\nu'} = \frac{\mathrm{i}U'/c}{\mathrm{i}\nu'} = K'. \tag{45.10}$$

由(45.6),(45.8)的矢量性质及(45.9),(45.10)式,不难证明

$$K = K', \tag{45.11}$$

因此 K 是一个标量;因此(45.6)与(45.8)相差只是一个标量倍数.

(45.8)的矢量通常写为 G_μ.至于(45.6)的矢量,我们将写它为 ν_μ.

(4) 最后我们讨论一个电子每秒中的放射(§21).能量,动量的放射分

别为

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\dfrac{e^2}{c^3}\dfrac{1}{(1-\beta^2)^3}\left\{\dot{u}^2-\dfrac{1}{c^2}[\boldsymbol{u}\times\dot{\boldsymbol{u}}]^2\right\},\\ \dfrac{2}{3}\dfrac{e^2}{c^5}\dfrac{\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^3}\left\{\dot{u}^2-\dfrac{1}{c^2}[\boldsymbol{u}\times\dot{\boldsymbol{u}}]^2\right\},\end{cases} \tag{45.12}$$

(见(21.5),(21.7)).与(40.11),(40.7)比较,可见

$$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(\text{动量放射},(\mathrm{i}/c)\ \text{能量放射}) \tag{45.13}$$

乃是一个矢量

$$\frac{2}{3}(e^2/c^5)\,\ddot{\xi}_\mu\,\ddot{\xi}_\mu\,\dot{\xi}_\nu, \tag{45.14}$$

我们在此直接由(21.2)及(21.6)证明(45.13)是一个矢量.

讨论四维空间中一个曲面 $S^{(4)}$,定义为

$$\begin{cases}x_1=\xi_1(s)+R\cos\theta, & x_3=\xi_3(s)+R\sin\theta\sin\varphi,\\ x_2=\xi_2(s)+R\sin\theta\cos\varphi, & x_0=\xi_0(s)+R,\end{cases} \tag{45.15}$$

式中 R 为一个取大值的常数,s 代表电子的固有时,而 s,θ,φ 是曲面的参量.这样的曲面满足

$$(x_i-\xi_i(s))(x_i-\xi_i(s))-(x_0-\xi_0(s))^2=0, \tag{45.16}$$

因而面上各点是电子在固有时 s 所射出的电磁波所能达到的;事实上由(45.15),(45.16)可以看出这个曲面是电子在固有时 s 所射出的电磁波经过 R/c 时间后所构成的波前.在(45.15)式中的 x,ξ 上加上"$'$"号,我们获得四维空间中另一个曲面 $S^{(4)\prime}$.当 R 为一个极大数时,夹在 $S^{(4)}$,$S^{(4)\prime}$中间各点上的 $T_{\mu\nu}$适合

$$\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu=0.$$

因此应用奥高定理,可以证明

$$\int_{S^{(4)}}T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu,\quad \int_{S^{(4)\prime}}T'_{\mu\nu}\mathrm{d}S'_\nu \tag{45.17}$$

的变换性质,正如一个矢量的分量.亦即可以证明 $\int T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu$ 构成一个矢量.极易证明

$$\begin{cases}N_1=D(x_2,x_3,x_4)/D(s,\theta,\varphi)=(\partial\xi_4/\partial s)\cos\theta R^2\sin\theta,\\ N_2=-D(x_3,x_4,x_1)/D(s,\theta,\varphi)=(\partial\xi_4/\partial s)\sin\theta\cos\varphi R^2\sin\theta,\\ N_3=D(x_4,x_1,x_2)/D(s,\theta,\varphi)=(\partial\xi_4/\partial s)\sin\theta\sin\varphi R^2\sin\theta,\\ N_4=-D(x_1,x_2,x_3)/D(s,\theta,\varphi)=-\sum\gamma_i(\partial\xi_i/\partial s)R^2\sin\theta,\end{cases} \tag{45.18}$$

式中 γ_i 代表三维空间中沿 $x_i-\xi_i$ 的单位矢量,等于

$$(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi),$$

因此

$$\int T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu = \int\left(\frac{\partial\xi_4}{\partial s}T_{\mu i}\gamma_i - T_{\mu 4}\frac{\partial\xi_i}{\partial s}\gamma_i\right)R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}s.$$

因此当 R 取大值时,

$$\begin{aligned}\int T_{4\nu}\mathrm{d}S_\nu &= \int\left\{\frac{\mathrm{i}c}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left[-\frac{\mathrm{i}}{8\pi}(E^2+H^2)\right]\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right\}R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}s\\&= \int\frac{c\,\mathrm{d}s}{(1-\beta^2)^{1/2}}\int\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\left[1-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{c}\right]R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{45.19}$$

同样,可证明

$$\int T_{i\nu}\mathrm{d}S_\nu = \int\frac{-c\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(1-\beta^2)^{1/2}}\int\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_i\left[1-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{c}\right]R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{45.20}$$

(45.19),(45.20)左方为一矢量,因此右方也是一矢量.因 s 为不变量,(45.19),(45.20)右方对 s 的导数也是一矢量.将(45.19),(45.20)右方对 s 微商,再乘以 i/c,即获得所需要证明的结果.

§46 电子所产生的电磁场的相对论形式

电子所产生的 j_μ,见于(45.22)式,是符合于相对论要求的.电子所产生的 $\boldsymbol{A},\varphi$ 见§16的(16.17),(16.12).用 $\boldsymbol{u}^*$ 代表电子在推迟时刻的速度,用 $\boldsymbol{R}^*$ 代表自在推迟时刻的电子至 (x,y,z) 的矢量, $\varphi,\boldsymbol{A}$ 成为

$$\begin{aligned}\varphi &= e\left\{R^* - \frac{1}{c}(\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{R}^*)\right\}^{-1},\\\boldsymbol{A} &= \frac{e}{c}\boldsymbol{u}^*\left\{R^* - \frac{1}{c}(\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{R}^*)\right\}^{-1}.\end{aligned} \tag{46.1}$$

这样的 $\boldsymbol{A},\mathrm{i}\varphi$ 可以表为一个矢量,证明如下.令 s^* 为与推迟时刻相当的固有时,又令

$$B_\mu^* = x_\mu - \xi_\mu(s^*), \tag{46.2}$$

得

$$B_0^* > 0, \quad B_\mu^* B_\mu^* = 0. \tag{46.3}$$

因此

$$B_0^* = (B_i^* B_i^*)^{1/2}. \tag{46.4}$$

显然地，(B_1^*, B_2^*, B_3^*)即是 $\boldsymbol{R}^*$，而由于上式，B_0^* 即是 R^*. 因此，

$$B_\mu^* \dot{\xi}_\mu(s^*) = -\frac{c}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left(R^* - \frac{1}{c}\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{R}^*\right), \tag{46.5}$$

因此$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$可以写为

$$-e\frac{\dot{\xi}_\mu(s^*)}{B_\nu^* \dot{\xi}_\nu(s^*)}. \tag{46.6}$$

这便是我们所欲证明的. 为简化符号起见，我们将 B_ν 改写为 R_ν.

当 $\dot{g}(s) > 0$ 时，我们有以下的关系：

$$\int f(s)\delta[g(s)]\mathrm{d}s = \int \frac{f(s)}{\dot{g}(s)}\delta[g(s)]\mathrm{d}g(s) = \frac{f(s)}{\dot{g}(s)},$$

式中右方的 s 乃是 $g(s)=0$ 的根. 利用上式，我们可以将(46.6)改写为

$$2e\int \dot{\xi}_\mu(s)\delta(R_\rho R_\rho)\mathrm{d}s \quad (R_\rho = x_\rho - \xi_\rho(s)), \tag{46.7}$$

而式中 s 的积分区域只包含推迟时刻 s^*，而不包含超前时刻. 因$(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$可以写为 A_μ，得

$$A_\mu = 2e\int \dot{\xi}_\mu(s)\delta(R_\rho R_\rho)\mathrm{d}s. \tag{46.8}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} &= 4e\int \dot{\xi}_\mu(s)\delta'(R_\rho R_\rho)(x_\nu - \xi_\nu(s))\mathrm{d}s \\ &= -2e\int \dot{\xi}_\mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta(R_\rho R_\rho)\frac{x_\nu - \xi_\nu(s)}{R_\theta \dot{\xi}_\theta(s)}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= 2e\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{\dot{\xi}_\mu(x_\nu - \xi_\nu(s))}{R_\theta\,\dot{\xi}_\theta(s)}\right\}\delta(R_\rho R_\rho)\mathrm{d}s.$$

因此

$$H_{\mu\nu} = 2e\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\dot{\xi}_\nu(x_\mu - \xi_\mu(s)) - \dot{\xi}_\mu(x_\nu - \xi_\nu(s))}{R_\theta\,\dot{\xi}_\theta(s)}\right]\delta(R_\rho R_\rho)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{-e}{(R_\theta\,\dot{\xi}_\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\dot{\xi}_\nu(x_\mu - \xi_\mu(s)) - \dot{\xi}_\mu(x_\nu - \xi_\nu(s))}{R_\theta\,\dot{\xi}_\theta(s)}\right]_{s=s^*}$$

$$= \left\{\frac{e}{(R_\theta\,\dot{\xi}_\theta)^2}(R_\nu\,\ddot{\xi}_\mu - R_\mu\,\ddot{\xi}_\nu)\right.$$

$$\left. - \frac{e(c^2 + R_\rho\,\ddot{\xi}_\rho)}{(R_\theta\,\dot{\xi}_\theta)^3}(R_\nu\,\dot{\xi}_\mu - R_\mu\,\dot{\xi}_\nu)\right\}_{s=s^*}. \qquad (46.9)$$

这一个式子也可以直接算出. 自 $R_\mu^* R_\mu^* = 0$,对 x_ν 取微分,得

$$(x_\mu - \xi_\mu^*)\left(\delta_{\mu\nu} - \dot{\xi}_\mu^*\frac{\partial s^*}{\partial x_\nu}\right) = 0,$$

亦即

$$x_\nu - \xi_\nu^* - (R_\mu^*\,\dot{\xi}_\mu^*)(\partial s^*/\partial x_\nu) = 0,$$

亦即

$$\partial s^*/\partial x_\nu = R_\nu^*/(R_\mu^*\,\dot{\xi}_\mu^*). \qquad (46.10)$$

利用上式,对(46.6)微商,得

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -\frac{e}{(R_\rho\,\dot{\xi}_\rho)^2}\left\{(R_\rho\,\dot{\xi}_\rho)\,\ddot{\xi}_\mu\frac{\partial s^*}{\partial x_\nu}\right.$$

$$\left. - \dot{\xi}_\mu\left[R_\theta\,\ddot{\xi}_\theta\frac{\partial s^*}{\partial x_\nu} + \dot{\xi}_\theta\left(\delta_{\theta\nu} - \dot{\xi}_\theta\frac{\partial s^*}{\partial x_\nu}\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{e}{(R_\rho\,\dot{\xi}_\rho)^2}\left[\ddot{\xi}_\mu R_\nu - \dot{\xi}_\mu R_\theta\,\ddot{\xi}_\theta\frac{R_\nu}{R_\rho\,\dot{\xi}_\rho} - \dot{\xi}_\mu\,\dot{\xi}_\nu + \dot{\xi}_\mu\,\dot{\xi}_\theta\,\dot{\xi}_\theta\frac{R_\nu}{R_\rho\,\dot{\xi}_\rho}\right].$$

(在上式中将 ξ,R 的 $*$ 符号省略.)因此

$$H_{\mu\nu}=\frac{e}{(R_\rho\dot{\xi}_\rho)^2}[\ddot{\xi}_\mu R_\nu-\ddot{\xi}_\nu R_\mu]$$

$$-\frac{e(c^2+R_\theta\ddot{\xi}_\theta)}{(R_\rho\dot{\xi}_\rho)^3}[R_\nu\dot{\xi}_\mu-R_\mu\dot{\xi}_\nu],\quad(46.11)$$

正与(46.9)相同.这个形式显然是符合相对论的要求的.

§47　质点的相对论力学

原来的牛顿力学中的运动方程是合乎相对论的,但是它的合乎相对论是对于伽利略变换而言的.对于洛伦兹变换,它不再符合相对论的要求.

让我们写下在洛伦兹变换下符合相对论的运动方程,而同时要求在 $v\ll c$ 时近似于牛顿运动方程.显然地,这样的运动方程必然是以下的形式:

$$m^0(\mathrm{d}^2\xi_\mu/\mathrm{d}s^2)=F_\mu,\quad(47.1)$$

式中 m^0 为一个不变量(标量),而 F_μ 是一个矢量.(47.1)包含了四个式子,而寻常的运动方程只包含三个式子,由它及起始条件我们能计算 ξ_1,ξ_2,ξ_3 如何为 t 的函数.因此(47.1)中四个式子中应该只有三个是独立的.

事实上,(47.1)的左方有一个关系(40.12)

$$m^0\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\mu=0,\quad(47.2)$$

因此如果(47.1)是可解的,F_μ 必然适合

$$F_\mu\dot{\xi}_\mu=0.\quad(47.3)$$

只有当(47.3)成立时,(47.1)才是可解的;同时,当(47.3)成立时,(47.1)中也只包含了三个独立的方程,正同我们所希望的一样.因此我们要求在以后的理论中,始终有(47.3)式.

(47.1)的头三个式子可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{m^0}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\right\}=(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}F_i \quad (i=1,2,3), \tag{47.4}$$

与牛顿力学的运动方程的主要不同乃是以

$$m^0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{d}\xi_i/\mathrm{d}t) \tag{47.5}$$

代替了以前的动量. 将(47.5)中的动量写成寻常动量的形式 $m\boldsymbol{u}$ 便获得了以下的关系：

$$m=m^0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{47.6}$$

由(47.6)式可见质量 m 随速度而变化；当 u 趋近于 c 时，质量趋于无穷大.

讨论静止系统所观察到的质量. 所谓静止系统，即是与质点一起运动的观察者，对于他而言，$\beta=0$，因此

$$m=m^0. \tag{47.7}$$

亦即 m^0 为静止系统中观察质量而得的值. 因此，m^0 称为“静质量”(масса покоя).

由(47.4)，也可以看出 $(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}F_i$ 相当于寻常的力. 由(47.4)可以看出当 β 趋近于 1 时，沿速度方向的力不易产生大的加速度，而与速度方向垂直的力，比较地容易产生较大的加速度. 这一点详细讨论如下：

将(47.4)左方花括号中的项称为 $\boldsymbol{G}$，得

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{u}f(u^2), \tag{47.8}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{u}}\,f(u^2)+2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})f'(u^2).$$

将 $\mathrm{d}\boldsymbol{G}/\mathrm{d}t$ 写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{long}}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{tran}},$$

式中第一项代表沿 $\boldsymbol{u}$ 方向的 $\mathrm{d}\boldsymbol{G}/\mathrm{d}t$，第二项代表与 $\boldsymbol{u}$ 方向垂直的

$\mathrm{d}\boldsymbol{G}/\mathrm{d}t$,得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{long}} = \dot{\boldsymbol{u}}_{\text{long}} f(u^2) + 2u^2\,\dot{\boldsymbol{u}}_{\text{long}} f'(u^2) = \dot{\boldsymbol{u}}_{\text{long}} \frac{\mathrm{d}|G|}{\mathrm{d}u},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{tran}} = \dot{\boldsymbol{u}}_{\text{tran}} f(u^2) = \dot{\boldsymbol{u}}_{\text{tran}} \frac{|G|}{u}.$$

以(47.5)代 $\boldsymbol{G}$,得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{long}} &= \dot{\boldsymbol{u}}_{\text{long}} \frac{m^0}{(1-\beta^2)^{3/2}},\\ \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{tran}} &= \dot{\boldsymbol{u}}_{\text{tran}} \frac{m^0}{(1-\beta^2)^{1/2}}.\end{aligned} \tag{47.9}$$

因此将 $(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}F_i$ 写为寻常的力 $\boldsymbol{F}^{(3)}$,分它为

$$\boldsymbol{F}^{(3)}_{\text{long}} + \boldsymbol{F}^{(3)}_{\text{tran}},$$

便获得

$$\begin{cases} m^0(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}(\dot{\boldsymbol{u}})_{\text{long}} = \boldsymbol{F}^{(3)}_{\text{long}},\\ m^0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(\dot{\boldsymbol{u}})_{\text{tran}} = \boldsymbol{F}^{(3)}_{\text{tran}},\end{cases} \tag{47.10}$$

证明了当 $\beta\approx 1$ 时沿 $\boldsymbol{u}$ 方向的 $\boldsymbol{F}$ 所产生的加速度,比同样大的而与 $\boldsymbol{u}$ 垂直的力所产生的加速度小.这样,使 $\boldsymbol{u}$ 的绝对值趋近于 c 更为困难.通常我们称(47.10)左方 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 的系数

$$m^0(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}},\quad m^0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

分别为纵质量与横质量.当 $\beta\approx 1$ 时,纵质量可以比横质量大出许多.

现在转回来讨论(47.3)式.由此可得

$$F_4 = c^{-1}\mathrm{i}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}) \quad (\boldsymbol{F}\equiv(F_1,F_2,F_3)). \tag{47.11}$$

因此(47.1)的第四式乃是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\mathrm{i}c}{(1-\beta^2)^{1/2}} = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}c^{-1}\mathrm{i}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}),$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}=(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}^{(3)}). \tag{47.12}$$

上式右方是寻常外力 $\boldsymbol{F}^{(3)}$ 所作的功，因此质点的能量 U 除开一个附加的常数外，应该是

$$m_0c^2/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

因为附加的常数的选择不产生物理上的后果，我们令它为零，得

$$U=m_0c^2/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{47.13}$$

当 β 取小值时，上式成为

$$U=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0u^2+O(\beta^4), \tag{47.14}$$

亦即是一个常数 m_0c^2 与寻常的动能 $\frac{1}{2}m_0u^2$ 的和. m_0c^2 通常称为“静能”.

由以上的讨论，可见(47.1)中的四个式子，三个代表运动方程，一个代表能量守恒，将(47.1)写为

$$\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{m_0\frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}s}\right\}=F_\mu, \tag{47.15}$$

花括号中的矢量正是

$$(G_1,G_2,G_3,\mathrm{i}U/c). \tag{47.16}$$

当我们称上面的矢量为 G_μ 时，得

$$\mathrm{d}G_\mu/\mathrm{d}s=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}G_\mu/\mathrm{d}t=F_\mu. \tag{47.17}$$

如果质点是电子，如果我们要把电子所产生的电磁场的 $\boldsymbol{G}$,U 归并到电子原有的 $\boldsymbol{G}$,U 上，而又同时要求适合相对论的运动方程，那么我们的初步希望，当然是要求电子的电磁场的($\boldsymbol{G}$,iU/c)构成一个矢量. 但洛伦兹电子、阿伯拉汉姆电子的($\boldsymbol{G}$,iU/c)都不构成一个矢量，使这个希望落空. 这些问题将在第三部中再谈. 这里我们只指出一点，即如果 $\boldsymbol{F}_i^{(3)}$ 是洛伦兹力(暂不讨论这里的电磁场是否由外界产生或由电子本身产生)，那么我们可以令 F_ν 为电荷 e

乘上

$$c^{-1}H_{\nu\mu}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\,\dot{\xi}_\mu. \tag{47.18}$$

这样的 F_ν 显然适合(47.3). 事实上,

$$\begin{aligned}
e^{-1}\dot{\xi}_\nu F_\nu &= c^{-1}\dot{\xi}_\nu H_{\nu\mu}\dot{\xi}_\mu \\
&= \frac{1}{2}c^{-1}\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu(H_{\nu\mu}-H_{\mu\nu}) \quad (\text{因 } H_{\nu\mu}=-H_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}c^{-1}\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu H_{\nu\mu}-\frac{1}{2}c^{-1}\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu H_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}c^{-1}\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu H_{\nu\mu}-\frac{1}{2}c^{-1}\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu H_{\nu\mu}
\end{aligned}$$

(将第二项的 $\mu\nu$ 对调),

因此等于零. (此后这些类似的计算不再写出.) 用这个 F_μ 代入(47.15),(47.15)成为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} &= e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{u}}{c}\times\boldsymbol{H}\right), \\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}).
\end{aligned} \tag{47.19}$$

最后一式即是我们所熟悉的代表能量守恒的式子.

在此可以附带地指出: 由于相对论对于 F_μ 的要求(即 F_μ 必须为一矢量),由于(47.3)的要求,又由于在 u 取零值时 F_i 必须为 eE_i, (47.18)几乎成为惟一可选择的 F_μ,因此(47.19)的右方几乎是惟一可选择的 $\boldsymbol{F}^{(3)}$. 因此有许多作者认为洛伦兹力的假定,可以认为是由于相对论的要求而来的. 这样的看法虽然不算错误,但过于强调了相对论在理论中的地位. 更正确的看法是: 洛伦兹力是实验所证实的; 由于质点所受力为洛伦兹力,使 F_μ 的(47.18)式满足(47.3),因而使质点的运动方程有可能适合相对论条件. 最后可以指出,如果我们已知的 F_μ 不适合(47.3),那么将运动方程取为(47.15)时, m_0 必须认为是 t 的函数. 我们不讨论这样的理论.

现在回来讨论一般情形下的运动方程(47.1),(47.4). 让我们指出,自 G_μ 的定义, $\boldsymbol{G}$, U 与 $\boldsymbol{u}$ 的关系等式,可以求得以下的关系:

$$\begin{cases} G_\mu G_\mu = (m^0)^2 c^2, \\ U^2 = [G^2 + (m^0)^2 c^2] c^2, \quad U = c\{G^2 + (m^0)^2 c^2\}^{\frac{1}{2}}, \\ \boldsymbol{u} = c^2 \boldsymbol{G}/U = (\partial U/\partial \boldsymbol{G}), \\ \boldsymbol{G} = (U/c^2)\boldsymbol{u}, \\ U = mc^2. \end{cases} \tag{47.20}$$

其中最末一式是最值得注意的.

必须在此指出,用相对论去研究两个或多个质点的运动,便多多少少地遇到了困难,姑且不去讨论两个质点中的力的本质(因为这可能包含了“场”的问题,处理较为复杂),而去讨论两个质点的碰撞的唯象(феноменологическая)理论.令1,2代表两个质点,那么在碰撞过程中,

$$G_\mu^{(1)} + G_\mu^{(2)} = 常数\, C_\mu \tag{47.21}$$

代表能量与动量的守恒.单就这一个式子而言,理论是没有困难的.写出运动方程:

$$\begin{cases} m^{0(1)} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}\xi_i^{(1)}}{\mathrm{d}s^{(1)}} = (1 - \beta^{(1)2})^{\frac{1}{2}} F_i^{(1)}, \\ m^{0(2)} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}\xi_i^{(2)}}{\mathrm{d}s^{(2)}} = (1 - \beta^{(2)2})^{\frac{1}{2}} F_i^{(2)}, \end{cases} \tag{47.22}$$

那么由于(47.21),我们要求

$$(1 - \beta^{(1)2})^{\frac{1}{2}} F_i^{(1)} + (1 - \beta^{(2)2})^{\frac{1}{2}} F_i^{(2)} = 0. \tag{47.23}$$

这显然是不符合相对论要求的.另一方面,如果假定

$$F_\mu^{(1)} + F_\mu^{(2)} = 0, \tag{47.24}$$

那么我们不能获得(47.21).此外由于

$$\dot{\xi}_\mu^{(1)} F_\mu^{(1)} = \dot{\xi}_\mu^{(2)} F_\mu^{(2)} = 0, \tag{47.25}$$

我们在假定(47.24)后得

$$\dot{\xi}_\mu^{(1)} F_\mu^{(1)} = \dot{\xi}_\mu^{(2)} F_\mu^{(1)} = 0. \tag{47.26}$$

在上式中消去 $F_4^{(1)}$,得

$$(\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}) \cdot \boldsymbol{F}^{(1)} = 0.$$

这个式子是难以想像的.以上的讨论说明了即使我们讨论两个质点的碰撞,我们也不能援用寻常的运动方程(47.22),而必须引入场的观念,将质点与场

的运动方程一起考虑.

最后我们讨论(47.20)式,这个讨论是重要的,因为由这里曾产生了“唯能论”的唯心思想.这个式子直至现在为止是对于一个质点而言的.对于一群质点,它也成立(在某个意义下).这一点的证明如下.令 $G_\mu^{(1)}$,$G_\mu^{(2)}$,…为各个质点的 G_μ,那么 $\sum\limits_i G_\mu^{(i)}$ 显然是一个矢量. $G_\mu^{(1)}$,…等是“将来”类时的,因而 $\sum\limits_i G_\mu^{(i)}$ 也是“将来”类时的. 因此存在着一个观察者 O^0,使对他而言

$$\sum G_1^{(i)} = \sum G_2^{(i)} = \sum G_3^{(i)} = 0, \quad \sum G_4^{(i)} = \mathrm{i}K/c, \tag{47.27}$$

式中 K 为一个大于零的数.我们称这个 O^0 为静止系统,而定义质点组的静止质量 M^0 为

$$K/c^2.$$

如果另一个观察者看到 O^0 以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动,那么对于 O 而言

$$\sum G_\mu^{(i)} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(M^0u_1, M^0u_2, M^0u_3, \mathrm{i}cM^0).$$

(上式由洛伦兹变换得来.)因此,它所观察的质量 M 为 $M^0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$,能量 U 为 $cG_4/\mathrm{i}=M^0c^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$,因此质量能量也适合 $U=Mc^2$.最后,对于光波而言,我们自平面波的讨论,知

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int (E^2+H^2)\mathrm{d}V = \dfrac{1}{4\pi}\int E^2\mathrm{d}V, \\ |\boldsymbol{G}| = \left|\dfrac{1}{4\pi c}\displaystyle\int (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V\right| = \dfrac{1}{4\pi c}\int E^2\mathrm{d}V. \end{cases} \tag{47.28}$$

另一方面,又知质量 m 的定义为

$$m \equiv |\boldsymbol{G}|/u = |\boldsymbol{G}|/c = \frac{1}{4\pi c^2}\int E^2\mathrm{d}V,$$

因此 $U=mc^2$ 对于平面电磁波也成立.在量子论中,我们知频率为 ν 的光量子的能量为 $h\nu$,动量为 $h\nu/c$,因此质量为(动量)/(速度) $=(h\nu/c)/c=h\nu/c^2$,因此 $U=mc^2$ 也成立.由以上可见 $U=mc^2$ 乃

是一个一般性的式子.

由这个式子,可见在任何过程中,某一个系统的 U,m 的变化 ΔU,Δm 适合

$$\Delta U=(\Delta m)c^2, \tag{47.29}$$

亦即能量有了增加时 m 也增加,m 有增加时 U 也增加. (47.20) 及(47.29)的意义是: m 与 U 基本上只是一个量,它们的差别只是一个常数倍.当能量守恒时,质量也守恒.

唯能论者把(47.29)曲解,认为这意味着可以用能量来创造质量,用质量来创造能量,进而认为可以用能量来创造物质,或可以将物质消灭而化为能量.这两部分都是错误的.首先在封闭系统中我们有能量的守恒,因而有质量的守恒;因此如果系统中有两部分 A,B,A 的能量的增加即是 B 的能量的减少,同时除了一常数倍 c^2 外,A 的能量的增加即是 A 的质量的增加,B 的能量的减少即是 B 的质量的减少.当一个正电子和一个负电子合而变成两个光子时或两个光子变为一个正电子及一个负电子时,整个系统的总能量、总质量都没有变化.但唯能论者以为电子变为光子即是质量变为能量的过程,忘却了电子、光子都有能量、质量,忘却了电子变为光子乃是由物质的一种形式变为另一种形式.其次,即使可以自能量创造质量(或使质量消灭),我们也不能说自某些非物质性的东西创造物质(或说使物质消灭).这是因为物质是标示客观的实在的一种哲学范畴①,它的惟一的、不可改变的特性乃是作为存在于我们意识以外的客观的实在的特性,而能量、质量都是物质的可变的(就认识论而言)属性,而我们决不能说创造了一个属性便是创造了物质.事实上在光子变为电子对的实验中,静止质量是增加了,但光子及电子对的作为客观的实在的特性,丝毫没有改变.光子是原来的物质的形式,由这个形式产生了"电子对"的形式;变化只改变了物质的形式,没有改变作为客观的实在的特性,也没有创

---

① 列宁:《唯物论与经验批判论》,第 292 页,中文本,人民出版社出版.

造物质.

光的静止质量等于零,可以由(47.28)及(47.20)第一式看出.事实上,自这两个式子,可见

$$(m^0)^2c^2 = G_\mu G_\mu = G^2 - (U/c)^2 = 0.$$

可以证明,光子的 $\boldsymbol{G}, U$ 等式与质点的 $\boldsymbol{G}, U$ 并没有什么基本上的不同处.事实上,在质点的 $\boldsymbol{G}, U$ 式中,令 $|\boldsymbol{u}| = c - \delta$, $m_0 = h\nu\delta^{\frac{1}{2}}/2^{\frac{1}{2}}c^{\frac{5}{2}}$,再令 $\delta \to 0$,得

$$|\boldsymbol{G}| = \left|\frac{m_0\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right| = \frac{h\nu\delta^{1/2}c^{-5/2}2^{-1/2}c}{(2\delta/c)^{1/2}} = \frac{h\nu}{c},$$

$$U = \frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} = h\nu.$$

§48　连续介质的运动方程

根据牛顿力学,我们曾建立了连续介质的运动方程,例如流体的运动方程.这样的运动方程是

$$\nabla \cdot \rho\boldsymbol{u} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \tag{48.1}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right\} = \boldsymbol{f}, \tag{48.2}$$

式中 ρ 代表各处的质量密度,$\boldsymbol{u}$ 代表各处质点的速度,$\boldsymbol{f}$ 代表各处的力密度.对于各向同性而没有黏滞性的液体,$\boldsymbol{f}$ 可以证明为 $-\nabla p$,p 在此处代表压力.除了(48.1),(48.2)外,我们再补入一个关于 ρ 的式子,例如

$$\rho = \text{常数} \quad \text{(对于不可压缩的流体)},$$

或

$$f(\rho, p) = 0,$$

代表着 ρ 与 p 中的一个关系.通过上式及(48.1),(48.2)及适当的起始条件、边界条件,我们便可求出流体的运动.

(48.2)可以改写为

$$\rho\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{f}, \tag{48.3}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ 代表随着质点运动而对时间的微商.这个微商的定义是:如果某

一个质点在 t 时速度是 $\boldsymbol{u}$，在 $t+\Delta t$ 时速度是 $\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u}$，那么(48.3)中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ 即是

$$\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta\boldsymbol{u}/\Delta t).$$

不难证明

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},$$

详情参阅关于流体力学的任何书籍①.

(48.3)可以改写为

$$\mathrm{d}(\rho\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t-\boldsymbol{u}(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t)=\boldsymbol{f}.$$

因(48.1)，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho\\&=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho=-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u},\end{aligned}$$

因此(48.3)可以写为

$$\mathrm{d}(\rho\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t+\rho\boldsymbol{u}\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}. \tag{48.4}$$

我们在此建立与(48.1)，(48.4)相似的但合乎相对论要求的运动方程. 首先让我们假定静质量是守恒的，亦即假定

$$\nabla\cdot(\rho^0\boldsymbol{u})+(\partial\rho^0/\partial t)=0, \tag{48.5}$$

式中 ρ^0 为静质量的密度(在此应指出：虽然静质量是标量，它的密度不一定是标量). (48.5)即是(48.1)在相对论中所应取的形式. 假定

$$(\rho^0u_1,\rho^0u_2,\rho^0u_3,\mathrm{i}c\rho^0) \tag{48.6}$$

为一个矢量 j_μ^0，得

$$\partial j_\mu^0/\partial x_\mu=0. \tag{48.7}$$

在§33中，我们已证明

$$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\{u_1,u_2,u_3,\mathrm{i}c\} \tag{48.8}$$

是一个矢量. 称这个矢量为 u_μ，得

$$\frac{u_1}{j_1^0}=\frac{u_2}{j_2^0}=\frac{u_3}{j_3^0}=\frac{u_4}{j_4^0},$$

因此上值的共同值必然是一个标量，亦即

① 例如见 Л.Д. Ландау 与 Е.М. Лифшиц:《连续介质力学》，或较易的书如 G. Joos:《理论物理》第九章.

$$\rho^0(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \equiv \rho^{00} \tag{48.9}$$

为一个标量(事实上 ρ^{00}乃是静止系统所量得的密度).

令 δV 为流体中一小块体积,那么体积 δV 中的静质量为 $\rho^0\delta V$. 称 F_μ 为此体积中的质点所受的"四力",那么这些质点的运动方程应为

$$\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^0\delta V u_\mu) = F_\mu, \tag{48.10}$$

亦即

$$\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left\{\delta V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^0 u_\mu) + \rho^0 u_\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V\right\} = F_\mu. \tag{48.11}$$

因 δV 在一秒中的变化为

$$\int \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}V = (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta V,$$

得

$$\mathrm{d}\delta V/\mathrm{d}t = (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta V. \tag{48.12}$$

因此(48.11)成为

$$\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^0 u_\mu) + (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\rho^0 u_\mu\right\} = (F_\mu/\delta V). \tag{48.13}$$

这个方程即是(48.4)在相对论中所应取的形式,它与(48.4)是极相似的.

(48.10)的形式是合乎相对论的,但(48.13)不是明显地合乎相对论的. 我们可以将它改为一个明显地合乎相对论的式子. (48.13)花括号的第一项可以化为

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\rho^0 u_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\frac{\rho^{00}}{(1-\beta^2)^{1/2}}u_\mu \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\rho^{00}u_\mu + \rho^{00}u_\mu\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\rho^{00}u_\mu \\
&\quad + \rho^{00}u_\mu\frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}\left(-\frac{1}{c^2}\right)u_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)u_i,
\end{aligned} \tag{48.14}$$

又可以算出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \frac{1}{c^2}\frac{u_i}{(1-\beta^2)^{3/2}}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_i \\
&\quad - \frac{1}{c^2}\frac{u_i}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{\partial u_i}{\partial t}.
\end{aligned}$$

我们将(48.14)代替(48.13)花括号中第一项,又利用上式,获得运动方程

$$\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\rho^{00}u_\mu+\rho^{00}u_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\nu$$
$$=F_\mu(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}/\delta V, \tag{48.15}$$

亦即

$$u_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\rho^{00}u_\mu+\rho^{00}u_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\nu=F_\mu(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}/\delta V,$$

亦即

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho^{00}u_\mu u_\nu)=F_\mu(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}/\delta V. \tag{48.16}$$

自(42.19),我们知 $\delta V/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ 乃是静止系统(对于 δV 中质点不运动的系统)所测量到的体积 δV^0,乃是一个标量.因此上式右方是一个矢量 f_μ.因此得

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho^{00}u_\mu u_\nu)=f_\mu. \tag{48.17}$$

(48.13)表为(48.17)后,它的相对论性便显然了.注意 f_1,f_2,f_3 也就是寻常三维空间的力 $\boldsymbol{F}^{(3)}$ 的密度;因为 $F_i(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ 即是寻常的力 $\boldsymbol{F}^{(3)}$.

(48.17)中的 $(-\rho^{00}u_\mu v_\nu)$ 通常称为动量-能量张量(кинетический тензор энергии),以 $\theta_{\mu\nu}$ 代表.用了这个符号,我们得

$$\partial\theta_{\nu\mu}/\partial x_\mu=-f_\mu. \tag{48.18}$$

不难证明,θ_{44} 即是能量密度.这是因为

$$\theta_{44}=\rho^{00}c^2/(1-\beta^2)=\rho^0c^2/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{48.19}$$

不难证明 $(\theta_{14},\theta_{24},\theta_{34})$ 是 $(-\mathrm{i}c)$ 乘上动量密度 $\boldsymbol{g}$.事实上 $(\theta_{14},\theta_{24},\theta_{34})$ 等于

$$-\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\rho^{00}c^2}{(1-\beta^2)}\boldsymbol{u}=-\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\rho^0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\boldsymbol{u}=-\mathrm{i}c\left(\frac{\rho^0\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right). \tag{48.20}$$

也不难证明 $(\theta_{41},\theta_{42},\theta_{43})$ 是 $(-\mathrm{i}/c)$ 乘上能量流密度.事实上,$(\theta_{41},\theta_{42},\theta_{43})$ 等于

$$-\mathrm{i}c\frac{\rho^0\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}=-\frac{\mathrm{i}}{c}\left(\frac{\rho^0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right)\boldsymbol{u}, \tag{48.21}$$

等于 $(-\mathrm{i}/c)$ 乘上能量密度再乘上速度 $\boldsymbol{u}$.这些情形正与§44中的 $T_{\mu\nu}$ 的分量一样.显然地,将(48.18)写出

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\theta_{ij} - \frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{i}cg_i = -f_i, \tag{48.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\theta_{4j} + \frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\partial}{\partial t}\theta_{44} = -f_4, \tag{48.23}$$

将(48.22)对三维空间中某体积积分,便得到动量守恒定律,将(48.23)对三维空间中某体积积分,便得到能量守恒定律.因此我们可以将(48.18)认为是动量、能量守恒定理的微分形式.

注意(48.18)与(44.12)有一个符号上的不同.(44.12)是

$$\partial T_{\nu\mu}/\partial x_\mu = f_\nu = c^{-1}H_{\nu\mu}j_\mu. \tag{48.24}$$

但上式与(48.18)都代表动量、能量的守恒.理由是:在(48.18)中 f_ν 是 $\theta_{\mu\nu}$的原主——即以 $\theta_{\mu\nu}$为动量-能量张量的物质——所受的力,而在(48.24)中,f_ν 是 $T_{\mu\nu}$的原主——即以 $T_{\mu\nu}$为动量-能量张量的物质(即电磁场)——所施于其他物质的力.如果在(48.18)中,我们假定全部物质所受的力是洛伦兹力,得

$$\partial\theta_{\nu\mu}/\partial x_\mu = -c^{-1}H_{\nu\mu}j_\mu. \tag{48.25}$$

将(48.24),(48.25)相加,得

$$\partial(T_{\nu\mu} + \theta_{\nu\mu})/\partial x_\mu = 0, \tag{48.26}$$

代表物体及电磁场的总能量及总动量的守恒.

注意 j_μ 乃是 $\rho^{00}u_\mu$(参阅(48.6),(48.9)式),因此,(48.7)可以写为

$$\partial(\rho^{00}u_\mu)/\partial x_\mu = 0. \tag{48.27}$$

因此(48.17)可以写为

$$\rho^{00}u_\nu(\partial u_\mu/\partial x_\nu) = f_\mu, \tag{48.28}$$

与(48.2)相似.

无论对于质点而言,或对于连续介质而言,角动量的合乎相对论的讨论是一个比较困难的问题,在此不宜讨论.理由是这样的:如果对于一个质点,我们引入张量

$$M_{\mu\nu} = x_\mu G_\nu - x_\nu G_\mu, \tag{48.29}$$

我们诚然得了一个部分分量成为寻常的角动量的张量,但这样的张量有几个分量明显地包含了 t,因此它们对于描写质点的状况而言不是一个适当的变数.

因为相对论力学不是本书的主要目的,我们在此不拟再讨论关于相对论力学的问题.

第八章　拉格朗日方程及哈密顿原理

§49　点电荷及电磁场的拉格朗日方程

在牛顿力学中,质点及质点组的运动方程可以写为拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \tag{49.1}$$

式中 L 代表质点或质点组的拉格朗日函数,$q_1,q_2,\cdots$代表各个自由度,$\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots$代表$(\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}t)$,$(\mathrm{d}q_2/\mathrm{d}t)$,…等等.

我们熟知,在 $t_1,t_2,q_1(t_1),q_2(t_1),\cdots,q_1(t_2),q_2(t_2),\cdots$固定的情形下,满足(49.1)的 $q_1(t),q_2(t),\cdots$使

$$S\equiv\int_{t_1}^{t_2}L(q_1,q_2,\cdots,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots)\mathrm{d}t \tag{49.2}$$

取最小值.反过来,在以上许多量固定的情形下使(49.2)取极大或极小值的 $q(t)$,必须满足(49.1)式.

在这一节中,我们证明电磁场的运动方程——即麦克斯韦方程——及点电荷的运动方程

$$m\mathrm{d}^2\xi_\nu/\mathrm{d}s^2=ec^{-1}H_{\nu\mu}(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)\dot{\xi}_\mu \tag{49.3}$$

也使得某一个类似(49.2)的式子取最小值,因而也满足一个类似(49.1)的式子.

为简化符号起见,我们已将(49.3)中原应出现的 m^0 改写为 m,同时也只讨论一个点电荷.将理论推广到几个点电荷是极容易的,此处不拟写出.

相当于(49.2)的式子 S(在此共分三项 S_1,S_2,S_3)等于 S_1+S_2

$+S_3$. S_1 只含有质点的坐标和速度，S_3 只与电磁场有关，S_2 为既与 ξ 等有关而又与电磁场有关的一项. 我们令

$$S_1 = -mc^2\int \mathrm{d}s = -mc\int(-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s. \tag{49.4}$$

令 τ 为点电荷的时间坐标，即 $\tau=\xi_4/\mathrm{i}c$，得

$$S_1 = -mc^2\int[1-(u/c)^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau \approx \int\left[-mc^2+\frac{1}{2}mu^2\right]\mathrm{d}\tau.$$

在上式右方中取去无关紧要的 $-mc^2$ 后，即是在(49.2)中出现的

$$\int\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t.$$

我们令 S_2 为

$$\frac{e}{c}\int\dot{\xi}_\mu A_\mu(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\mathrm{d}s, \tag{49.5}$$

式中 A_μ 在$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$处取值，而 ξ_μ, $\dot{\xi}_\mu$ 等是固有时 s 的函数. 对于点电荷，j_μ 见(42.22)式. 引入

$$\delta^{(4)}(x-\xi)=\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)\delta(t-\tau)$$

(注意 τ 为点电荷的时间坐标)，得

$$j_\mu = e\int(\mathrm{d}\xi_\mu/\mathrm{d}s)\delta^{(4)}(x-\xi)\mathrm{d}s,$$

便不难证明

$$\frac{1}{c}\int j_\mu A_\mu(x_1,x_2,x_3,t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t \tag{49.6}$$

便是(49.5)式. 对于电荷的分布是连续的情形，我们用(49.6)作为 S_2 的定义. 如果令 d^4V 为 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$，(49.6)成为

$$(c^2\mathrm{i})^{-1}\int j_\mu A_\mu \mathrm{d}^4V. \tag{49.7}$$

至于 S_3，我们有两个可能的选择，一个是

$$\begin{aligned}S_3' &= \int -\frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t\\ &= \int\frac{1}{8\pi}(E^2-H^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{49.8}$$

另一个是

$$S_3'' = -\int \frac{1}{8\pi} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}t. \tag{49.9}$$

我们在下面将证明求以上的 S 的最大最小，可以获得所需要的运动方程. 为方便起见，我们称 S_1 式中被积分项为质点的拉格朗日量，以 L^m 代表，称 S_2 式(49.6)中被积分项为作用拉格朗日量，以 L^I 代表，称 S_3'，S_3'' 式中被积分项为电磁场拉格朗日量，以 L'^{EH}，L''^{EH}代表.

值得指出 L^m，L^I，L'^{EH}，L''^{EH}，S_1，S_2，S_3'，S_3'' 等都是不变量. 这保证了讨论 S 的变化而获得的微分方程是适合相对论条件的. 反过来，为了保证后一点，我们选择 S_1，S_2，S_3 等时，必须使它们为不变量. 这大大地限制了可以选择的形式. 事实上，由 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 所组成的不变量，基本上只有

$$-\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad \left(\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta}\right)^2 = (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H})^2 \tag{49.10}$$

两个及它们的函数. $\left(\text{注意}\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta}\text{是赝标量.}\right)$因此如果要求 S_3 只含有 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 而不含有 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 的高于二次的乘积，(49.8)是惟一的选择(除开一个常数倍外). 此外，值得指出，虽然(49.6)及(49.9)都含有 A，前者是规范不变量，而后者只对于满足洛伦兹条件的 A 才是规范不变量. 事实上，

$$\begin{aligned} \int j_\mu [A_\mu + (\partial\psi/\partial x_\mu)] \mathrm{d}^4 V &= \int j_\mu A_\mu \mathrm{d}^4 V + \int j_\mu \psi \mathrm{d}_\mu S \\ &\quad - \int (\partial j_\mu/\partial x_\mu) \psi \mathrm{d}^4 V = \int j_\mu A_\mu \mathrm{d}^4 V. \end{aligned} \tag{49.11}$$

让我们先讨论 S 对于 ξ 的变化. 为此，我们只讨论 $S_1 + S_2$ 的变化. 很显然地，如果令 S_1 等于(49.4)最右方的式子，那么因为 $\dot{\xi}_\mu$ 等不是独立的，在变化时必须注意到 $\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -c^2$ 的条件而应用拉格朗日乘子法. 为避免这一点，我们引入另外一个变数 σ，作为点电荷的世界线的参量，将世界线表为

$$\xi_1 = \xi_1(\sigma),\ \xi_2 = \xi_2(\sigma),\ \cdots,\ \xi_4 = \xi_4(\sigma). \tag{49.12}$$

注意在讨论 ξ 的变化时，这个 σ 与 s, t 间没有确定的关系. 这样，$d\xi_\mu/d\sigma$ 中便没有必须满足的条件. 引入 ξ'_μ, ξ''_μ 代表 $d\xi_\mu/d\sigma$，$d^2\xi_\mu/d\sigma^2$，将 S_1+S_2 改写为

$$-mc\int(-\xi'_\mu\xi'_\mu)^{\frac{1}{2}}d\sigma + (e/c)\int\xi'_\mu A_\mu d\sigma, \tag{49.13}$$

将上式中被积分项称为 L'，我们算出

$$\frac{\partial L'}{\partial\xi'_\mu} = \frac{mc\xi'_\mu}{(-\xi'_\rho\xi'_\rho)^{1/2}} + \frac{e}{c}A_\mu,$$

$$\frac{\partial L'}{\partial\xi_\mu} = \frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial\xi_\mu}\xi'_\nu.$$

因此拉格朗日方程

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{\partial L'}{\partial\xi'_\mu}\right\} - \frac{\partial L'}{\partial\xi_\mu} = 0$$

成为

$$\frac{mc\xi''_\mu}{(-\xi'_\rho\xi'_\rho)^{1/2}} + \frac{mc\xi'_\mu(\xi'_\theta\xi'_\theta)}{(-\xi'_\rho\xi'_\rho)^{3/2}} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\xi'_\nu - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial\xi_\mu}\xi'_\nu = 0. \tag{49.14}$$

现在用下式右方代替 ξ'_μ, ξ''_μ：

$$\xi'_\mu = \dot{\xi}_\mu(ds/d\sigma),$$

$$\xi''_\mu = \ddot{\xi}_\mu(ds/d\sigma)^2 + \dot{\xi}_\mu(d^2s/d\sigma^2),$$

再利用

$$\dot{\xi}_\rho\dot{\xi}_\rho = -c^2,\quad \dot{\xi}_\rho\ddot{\xi}_\rho = 0,$$

便获得了所需的

$$m\ddot{\xi}_\mu - (e/c)H_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu = 0. \tag{49.15}$$

现在讨论 $S_2+S'_3$ 亦即

$$\frac{1}{c}\int j_\mu A_\mu dx_1dx_2dx_3dt - (16\pi)^{-1}\int H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}dx_1dx_2dx_3dt \tag{49.16}$$

对 A_μ 取变化而获得的式子. 注意在上式中 $H_{\mu\nu}$定义为 $\partial A_\nu/\partial x_\mu-\partial A_\mu/\partial x_\nu$,因此上式取

$$\int \Psi(A_\mu,\partial A_\mu/\partial x_\rho)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \tag{49.17}$$

的形式,而我们讨论它对于 A 的变化. 当 A_μ 有变化而变为 $A_\mu+\delta A_\mu$ 时,$\partial A_\nu/\partial x_\rho$ 变为

$$\partial A_\nu/\partial x_\rho+\partial(\delta A_\nu)/\partial x_\rho,$$

因此(49.17)的变化为

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A_\mu}\delta A_\mu+\frac{\partial\Psi}{\partial(\partial A_\nu/\partial x_\rho)}\frac{\partial\delta A_\nu}{\partial x_\rho}\right)\\ &=\int \mathrm{d}^{(4)}V\left[\frac{\partial\Psi}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_\rho)}\right]\delta A_\mu\\ &\quad+\int \mathrm{d}S_\rho\frac{\partial\Psi}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_\rho)}\delta A_\mu,\end{aligned}$$

因此在"A_μ 在 V 的边界上不变"的条件下使(49.17)为最大(或最小)的 A_μ 必须满足

$$\frac{\partial\Psi}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_\rho)}=0. \tag{49.18}$$

因此我们获得

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{4\pi}{c}j_\mu. \tag{49.19}$$

如果令 $H_x,H_y,H_z,-\mathrm{i}E_x,-\mathrm{i}E_y,-\mathrm{i}E_z$ 为张量 $H_{\mu\nu}\equiv\partial A_\nu/\partial x_\mu-\partial A_\mu/\partial x_\nu$ 的 23,31,12,14,24,34 分量,麦克斯韦方程中的

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-c^{-1}\partial\boldsymbol{H}/\partial t$$

已经满足. 当(49.19)满足时,麦克斯韦方程组中另外两个方程——即含有 ρ 及 $\boldsymbol{j}$ 的方程——也得到了满足. 在此可以附带地指出在这个讨论中,A_μ 不必满足洛伦兹的规范

$$\partial A_\mu/\partial x_\mu=0.$$

最后讨论 S_2+S_3'' 对 A_μ 取最大或最小的情形,S_2+S_3'' 为

$$\frac{1}{c}\int j_\mu A_\mu\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t-\frac{1}{8\pi}\int\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t; \tag{49.20}$$

用同样方法,算出

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = -\frac{4\pi j_\mu}{c}. \tag{49.21}$$

这里我们依旧令 $H_x, H_y, H_z, -\mathrm{i}E_x, -\mathrm{i}E_y, -\mathrm{i}E_z$ 为张量 $H_{\mu\nu} \equiv \partial A_\nu/\partial x_\mu - \partial A_\mu/\partial x_\nu$ 的 23,31,12,14,24,34 分量,使麦克斯韦方程组中两个不含有 ρ, j 的方程获得满足.为使得含有 ρ, j 的两个方程获得满足起见,我们只需引入适当的起始条件,理由如下:j_μ 见(49.6)前的一个式子,它满足 $\partial j_\mu/\partial x_\mu = 0$,因此自(49.21)得

$$\partial^3 A_\mu/\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\nu = -(4\pi/c)\partial j_\mu/\partial x_\mu = 0,$$

亦即

$$\Box(\partial A_\mu/\partial x_\mu) = 0. \tag{49.22}$$

如果令在 $t=0$ 时刻,在任何地点

$$\partial A_\mu/\partial x_\mu = 0, \tag{49.23}$$

$$\partial(\partial A_\mu/\partial x_\mu)/\partial t = 0, \tag{49.24}$$

那么由(49.22)知在任何时刻任何处,(49.23)也满足(因此在任何时刻任何处(49.24)也满足).由此便获得了

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right) = -\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu, \tag{49.25}$$

亦即是所需的麦克斯韦方程.

所以在这个变分法中,我们要求起始条件(49.23),(49.24).只有在这个起始条件下,使 $S_2 + S_3''$ 最大或最小的 A_μ 能使得与此相应的 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 满足麦克斯韦方程.(49.24)可以改为

$$\begin{aligned} 0 = \partial^2 A_\mu/\partial x_\mu \partial x_4 &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_\mu}\right\} + \frac{\partial^2 A_4}{\partial x_\mu^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} H_{4\mu} - \frac{4\pi}{c} j_4, \end{aligned} \tag{49.26}$$

亦即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

因此起始条件也可写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + c^{-1}(\partial\varphi/\partial t) = 0, \tag{49.27}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{49.28}$$

至于此处求得的微分方程中的 A_μ，究竟使 S 为最大还是最小，可以极容易地解决. 事实上，如果(49.2)简化为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dot{q}_1)\mathrm{d}t, \tag{49.29}$$

而又如果

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1} > 0, \tag{49.30}$$

那么满足(49.1)的 $q_1(t)$ 使 S 为极小. 如果上式中的“$>$”改为“$<$”，那么满足(49.1)的 $q_1(t)$ 使 S 为极大. (49.30)称为勒让德(Legendre)条件. 因此在一个质点的运动情形下，质点的真正运动使(49.29)为最小. 我们可以用导出勒让德条件的方法，来讨论在此 $S_1+S_2+S_3$ 的最大或最小. 如果不要求数学上的严格，可以证明以上所导出关于 ξ_μ, A_μ 的微分方程，使 $S_1+S_2+S_3$ 为最小.

§50 能量张量

如果讨论的对象都是场(即没有质点)，而又如果它们的分量满足类似(49.18)的式子，那末我们便立刻可以寻到一个张量 $T_{\mu\nu}$，适合 $\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu = 0$. 将各种不同的场分量写为 $B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots$，(49.18)成为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial B^{(\mu)}} - \frac{\partial}{\partial x_\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial(\partial B^{(\mu)}/\partial x_\rho)} = 0. \tag{50.1}$$

将 $B_\rho^{(\mu)}$ 代表 $\partial B^{(\mu)}/\partial x_\rho$，将

$$\frac{\partial \Psi}{\partial B_\nu^{(\alpha)}} B_\mu^{(\alpha)} - \delta_{\mu\nu}\Psi \tag{50.2}$$

定义为 $T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}$，我们利用(50.1)，立即证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}} &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial B_\nu^{(\alpha)}}\right) B_\mu^{(\alpha)} + \frac{\partial \Psi}{\partial B_\nu^{(\alpha)}} \frac{\partial B^{(\alpha)}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial B^{(\alpha)}} B_\mu^{(\alpha)} + \frac{\partial \Psi}{\partial B_\nu^{(\alpha)}} \frac{\partial B^{(\alpha)}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Psi}{\partial B^{(\alpha)}} B_\mu^{(\alpha)} - \frac{\partial \Psi}{\partial B_\nu^{(\alpha)}} \frac{\partial B^{(\alpha)}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{50.3}$$

(右方第一项的改变是利用(50.1)的结果.)此外,如果对于洛伦兹变换而言,Ψ 是一个不变量,那么我们可以找到一个三级张量 $M_{\mu\nu\rho}$,满足①

$$M_{\mu\nu\rho}=-M_{\nu\mu\rho},\tag{50.4}$$

$$\partial M_{\mu\nu\rho}/\partial x_\rho=0.\tag{50.5}$$

事实上,如果在一个极小的洛伦兹变换

$$x_\mu\to x'_\mu=x_\mu+l_{\mu\nu}x_\nu\quad(l_{\mu\nu}=-l_{\nu\mu})$$

中,$B^{(\alpha)}$变为

$$B^{(\alpha)\prime}=B^{(\alpha)}+l_{\mu\nu}(S_{\mu\nu}B)^{(\alpha)},\tag{50.6}$$

那么 $M_{\mu\nu\rho}$等于

$$\Psi x_\nu\delta_{\mu\rho}+\frac{\partial\Psi}{\partial B_\rho^{(\alpha)}}\{(S_{\mu\nu}B)^{(\alpha)}-x_\nu B_\mu^{(\alpha)}\}-[\mu,\nu],\tag{50.7}$$

式中张量$[\mu,\nu]$代表这符号前的各项将 ν,μ 对调后的和. $T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}$,$M_{\mu\nu\rho}$在某个意义上可以称为能量张量及角动量张量.

在我们这里,讨论对象是 A_μ 及 ξ_μ,而 ξ_μ 不是一个场.因此我们不能令不同的 $B^{(\alpha)}$代表 A_μ,ξ_μ 而直接应用以上的讨论.让我们先讨论没有质点的情形,那时 $B^{(\alpha)}$即是 A_μ.应用上面的式子,令 Ψ 为$-(1/16\pi)H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}$,获得

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}H_{\nu\lambda}+\frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu}H_{\rho\theta}H_{\rho\theta},\tag{50.8}$$

$$M_{\mu\nu\rho}=x_\mu T_{\nu\rho}^{\mathrm{can}}-x_\nu T_{\mu\rho}^{\mathrm{can}}+\frac{1}{4\pi}(A_\mu H_{\rho\nu}-A_\nu H_{\rho\mu}).\tag{50.9}$$

以上的 $T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}$的式子有两个缺点;第一,它不是对称的,第二,它不是一个规范不变量.第一个缺点是不严重的,因为我们可以引入一个新张量 $T_{\mu\nu}^{\mathrm{sy}}$,定义为

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{sy}}=2T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}+\frac{1}{2}x_\rho\frac{\partial}{\partial x_\rho}T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}-\frac{1}{2}x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\rho}T_{\rho\nu}^{\mathrm{can}}+[\mu,\nu]②\tag{50.10}$$

而这个新张量满足

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{sy}}=T_{\nu\mu}^{\mathrm{sy}},\tag{50.11}$$

$$\partial T_{\mu\nu}^{\mathrm{sy}}/\partial x_\nu=\partial T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}/\partial x_\nu=0.\tag{50.12}$$

这一点可以直接由定义证实.因此,(50.8)的主要缺点是它在规范变化下有

---

① 参阅 T. S. Chang(张宗燧), *Proc. Camb. Phil. Soc.* **44**(1948)76. 该处的 M 是此处的 M 的一半.

② 见注①所指的文献.

所变化. 用上页注①所提起的文献中的方法,我们可以另获得一个新张量$T_{\mu\nu}$,满足$T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$及

$$\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu = 0.$$

这个新张量等于

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}} + \frac{\partial}{\partial x_\rho}\{-F_{\mu\nu\rho} - F_{\rho\mu\nu} + F_{\nu\rho\mu}\}, \tag{50.13}$$

式中$F_{\mu\nu\rho}$代表

$$\frac{1}{2}M_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}(x_\mu T_{\nu\rho}^{\mathrm{can}} - x_\nu T_{\mu\rho}^{\mathrm{can}}), \tag{50.14}$$

不难算出这个新张量$T_{\mu\nu}$等于

$$-\frac{1}{4\pi}H_{\mu\rho}H_{\nu\rho}+\frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu}H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}①. \tag{50.15}$$

这即是(44.13)中的张量. 这个张量是一个规范不变量,以后这个张量用T^{EH}代表.

最值得指出的便是:如果令

$$\Psi = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\theta},$$

那么(50.8),(50.9)都有了改变,但用上页注①所指文献中的方法而获得的$T_{\mu\nu}$也是(50.15),与上面的结果完全相同.

以上是没有点电荷的情形,现在引入点电荷,首先必须获得相当于(50.3)及(50.5)的两个式子. (50.3)及(50.5)两个式子事实上是由于在某一

---

① (50.9),(50.15)的具体计算过程如下. 首先,因为A_α是矢量,得

$$l_{\mu\nu}(S_{\mu\nu}A)^\alpha = l_{\alpha\beta}A_\beta,$$

由此得

$$(S_{\mu\nu}A)^\alpha = \frac{1}{2}\delta_{\mu\alpha}A_\nu - \frac{1}{2}\delta_{\nu\alpha}A_\mu.$$

因此

$$M_{\mu\nu\rho} = x_\mu T_{\nu\rho}^{\mathrm{can}} - x_\nu T_{\mu\rho}^{\mathrm{can}} + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu\rho}}A_\nu - \frac{\partial L}{\partial A_{\nu\rho}}A_\mu\right) - [\mu,\nu]\right\},$$

由此得(50.9)式. 由$F_{\mu\nu\rho}$的定义,知

$$F_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{8\pi}(A_\mu H_{\rho\nu} - A_\nu H_{\rho\mu}).$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}\{-F_{\mu\nu\rho} - F_{\rho\mu\nu} + F_{\nu\rho\mu}\} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}H_{\nu\rho} + \frac{1}{4\pi}A_\mu\frac{\partial}{\partial x_\rho}H_{\nu\rho}.$$

因$\partial H_{\nu\rho}/\partial x_\rho=0$,上式右方成为$(4\pi)^{-1}(\partial A_\mu/\partial x_\rho)H_{\nu\rho}$,因此(50.13)成为(50.15).

个体积上的积分

$$\int \Psi(x_1 x_2 x_3 x_4)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$$

对于坐标系统的原点的移动及对于坐标轴的转动不变化而获得的①. 因此，我们在此考虑

$$-mc\int(-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s+\frac{e}{c}\int\dot{\xi}_\mu A_\mu(\xi)\mathrm{d}s$$
$$+\left(-\frac{1}{16\pi}\right)\int H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t \qquad (50.16)$$

对于坐标系统的原点的移动及对于坐标轴的转动而产生的变化. 因为这个变化必须等于零，我们便获得了相当于(50.3)及(50.5)的两个式子.(我们在此先令 L^{EH} 为 $-(1/16\pi)H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}$，以后再讨论 L^{EH} 为 $-(1/8\pi)(\partial A_\rho/\partial x_\theta)(\partial A_\rho/\partial x_\theta)$ 的情形.)

必须指出，(50.16)中第三个积分是四维空间中某一部分体积的积分，不是全部空间，而第二个积分写为

$$\frac{1}{c}\int j_\mu A_\mu\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t$$

时，它的积分区域应该与第三个积分的积分区域相同. 因此如果令 s_1, s_2 代表质点世界线与体积边界相交处的固有时，(50.16)的第二个积分的积分极限应该是 s_1, s_2. 又因(50.16)的第一、第二个积分的积分极限应该相同，第一个积分的积分极限也是 s_1, s_2. 积分区域及积分极限的相同，对于(50.16)在原点移动情形下的不变性，是没有关系的，但对于下面式子(例如(50.17))的有效，是有影响的.

当(50.16)中的原点有所移动，而它自己的值不变，我们获得

$$\frac{1}{\mathrm{i}c}\int T^{\mathrm{can}}_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[m\dot{\xi}_\mu+\frac{e}{c}A_\mu\right]\mathrm{d}s=0. \qquad (50.17)$$

这个式子不拟在此导出；读者可以参阅 305 页所指文献，用了这文献中的方法可以导出上式. 因为上式中第二项(即 $\mathrm{d}(m\dot{\xi}_\mu)/\mathrm{d}s$ 一项)是规范不变量，所以第一、第三两项的和一定是规范不变量. 第三项可以写为

---

① 参阅 305 页注①所指文献，或 H. J. Bhabha, *Proc. Indian Acad. Sci.* **A21** (1945)241. 这个方法是一般性的，由此可以获得两个守恒的式子，由此获得能量及角动量张量的式子.

$$-\int_{s_1}^{s_2}\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu(\xi)}{\partial\xi_\nu}\dot{\xi}_\nu\mathrm{d}s=-\frac{1}{c}\int\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}j_\nu\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{c}\int\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_{\nu\rho}(x)}{\partial x_\rho}\frac{\mathrm{d}^{(4)}V}{\mathrm{i}c}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}H_{\nu\rho}\right]-\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\rho\partial x_\nu}H_{\nu\rho}\right\}\frac{\mathrm{d}^{(4)}V}{\mathrm{i}c}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathrm{i}c}\int\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}H_{\nu\rho}\mathrm{d}S_\rho,$$

因此

$$\frac{1}{\mathrm{i}c}\int\left(T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}H_{\rho\nu}\right)\mathrm{d}S_\nu-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(m\dot{\xi}_\mu)\mathrm{d}s=0. \tag{50.18}$$

上式中第一个积分中的被积分项正是 $T_{\mu\nu}^{EH}$，正是(50.15)式. 以上说明了将 $T_{\mu\nu}^{\mathrm{can}}$ 及其他含有 A 的项合并，非但使混合的量成为规范不变量，同时也获得了对称的张量.(50.18)可以写为微分的形式. 左方第一项可以变为

$$\frac{1}{\mathrm{i}c}\int(\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu)\mathrm{d}^{(4)}V,$$

第二项可以写为

$$-\int(m\ddot{\xi}_\mu)\mathrm{d}s=-\int(e/c)H_{\mu\nu}(\xi)\dot{\xi}_\nu\mathrm{d}s$$

$$=-\frac{1}{c}\int H_{\mu\nu}(x)j_\nu(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{c}\int H_{\mu\nu}(x)j_\nu(x)\mathrm{d}^{(4)}V/\mathrm{i}c,$$

因此(50.18)可以写为

$$\partial T_{\mu\nu}^{EH}/\partial x_\nu=\frac{1}{c}H_{\mu\nu}j_\nu, \tag{50.19}$$

正与§44中的结果相同.

当(50.16)中的坐标轴的方向有所转动，那么由于(50.16)的不变，我们获得

$$\frac{1}{\mathrm{i}c}\int M_{\mu\nu\rho}\mathrm{d}S_\rho-\int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{m(\xi_\mu\dot{\xi}_\nu-\xi_\nu\dot{\xi}_\mu)+\frac{e}{c}(\xi_\mu A_\nu-\xi_\nu A_\mu)\right\}=0. \tag{50.20}$$

这个式子也不拟在此导出. 我们将最末一项加以整理，得

$$-\frac{e}{c}\int\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\xi_\mu A_\nu-\xi_\nu A_\mu)$$

$$= -\frac{e}{c}\int \mathrm{d}s\left\{\frac{\partial A_\nu(\xi)}{\partial \xi_\rho}\dot{\xi}_\rho\xi_\mu - \frac{\partial A_\mu(\xi)}{\partial \xi_\rho}\dot{\xi}_\rho\xi_\nu + A_\nu\dot{\xi}_\mu - A_\mu\dot{\xi}_\nu\right\}$$

$$= -\frac{1}{c}\int \frac{\mathrm{d}^{(4)}V}{\mathrm{i}c}\left\{\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho}j_\rho x_\mu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}j_\rho x_\nu + A_\nu j_\mu - A_\mu j_\nu\right\}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{c}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}^{(4)}V}{\mathrm{i}c}\left\{\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho}\frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial x_\theta}x_\mu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}\frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial x_\theta}x_\nu + A_\nu\frac{\partial H_{\mu\theta}}{\partial x_\theta} - A_\mu\frac{\partial H_{\nu\theta}}{\partial x_\theta}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}^{(4)}V}{\mathrm{i}c}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\theta}\left[\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho}H_{\rho\theta}x_\mu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}H_{\rho\theta}x_\nu + A_\nu H_{\mu\theta} - A_\mu H_{\nu\theta}\right] + \cdots\right\},$$

而上式中未写出的项等于

$$-\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\theta \partial x_\rho}H_{\rho\theta}x_\mu - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho}H_{\rho\mu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\theta}H_{\mu\theta} - [\mu,\nu] = 0.$$

因此(50.20)中最末一项等于

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathrm{i}c}\int \mathrm{d}S_\theta\left\{\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho}H_{\rho\theta}x_\mu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}H_{\rho\theta}x_\nu + A_\nu H_{\mu\theta} - A_\mu H_{\nu\theta}\right\};$$

与第一项合并,得

$$\frac{1}{\mathrm{i}c}\int [x_\mu T^{EH}_{\nu\rho} - x_\nu T^{EH}_{\mu\rho}]\mathrm{d}S_\rho - \int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}m(\xi_\mu\dot{\xi}_\nu - \xi_\nu\dot{\xi}_\mu) = 0. \qquad (50.21)$$

(50.21)中的张量

$$x_\mu T^{EH}_{\nu\rho} - x_\nu T^{EH}_{\mu\rho}$$

的某些分量正是§3的角动量密度等等.由(50.20)式,作出 $\xi_\mu\dot{\xi}_\nu - \xi_\nu\dot{\xi}_\mu$ 对 s 的微分,以 $(e/c)H_{\mu\nu}(\xi)\dot{\xi}_\nu$ 代替 $m\ddot{\xi}_\mu$,再以 j 代替 $\dot{\xi}$(同时将对 s 的积分改为对空间体积的积分),便获得了

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}[x_\mu T^{EH}_{\nu\rho} - x_\nu T^{EH}_{\mu\rho}] = \frac{1}{c}(x_\mu H_{\nu\rho}j_\rho - x_\nu H_{\mu\rho}j_\rho). \qquad (50.22)$$

这个式子也可以直接由(50.19)而获得.

以上证明在表示角动量守恒的式子(50.20)中,如果我们将含有 A 的项合并,便获得了一个规范不变量,作为新的角动量张量,而这个张量正是我们以前的理论中所讨论到的.

最后可以指出,自(50.18)可以直接算出

$$\partial(T_{\mu\nu}^{EH}+\theta_{\mu\nu})/\partial x_\nu=0. \tag{50.23}$$

计算如下. $\theta_{\mu\nu}$的定义为$-\rho^{00}u_\mu u_\nu$(§48),因此对于一个质点,

$$\int\theta_{\mu\nu}\mathrm{d}V\mathrm{d}t=-\int\rho^{00}u_\mu u_\nu\mathrm{d}V\mathrm{d}t=-\int\rho^{00}u_\mu u_\nu\mathrm{d}V^0\mathrm{d}s=-m\int\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu\mathrm{d}s.$$

又考虑到 $\theta_{\mu\nu}$只在质点所在处不等于零的事实,我们便获得

$$\theta_{\mu\nu}=-m\int\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu(s)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)\mathrm{d}s. \tag{50.24}$$

因此

$$\begin{aligned}\partial\theta_{\mu\nu}/\partial x_\nu&=-m\int\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}[\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)]\mathrm{d}s\\&=m\int\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}[\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)]\mathrm{d}s\\&=m\int\dot{\xi}_\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)]\mathrm{d}s\\&=-m\int\ddot{\xi}_\mu\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{50.25}$$

另一方面,自(50.18),我们得

$$\begin{aligned}0=(\mathrm{i}c)^{-1}\int T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu-\int_{s_1}^{s_2}m\ddot{\xi}_\mu\mathrm{d}s=\int\Big\{(\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu)\\-\int m\ddot{\xi}_\mu\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)\mathrm{d}s\Big\}(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t).\end{aligned} \tag{50.26}$$

由(50.25),(50.26),我们获得了(50.23)式.

在导出(50.17),(50.20)时,我们曾以$-(1/16\pi)H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}$作为电磁场的拉格朗日量.不难证明,如果我们用$-(1/8\pi)(\partial A_\rho/\partial x_\theta)(\partial A_\rho/\partial x_\theta)$作为拉格朗日量,我们的最后结果——指(50.18),(50.21)——是完全与前相同的.换句话说,我们也得到规范不变的张量,而它们具有所需要的对称性,又与以前最早的理论(§3)中所讨论的一样.

§51 质点运动的正则方程

在这一节中,我们讨论质点运动的正则方程.首先,让质点固有时 s 为独立变数;这样我们才能令正则方程明显地取适合相对论的形式.

根据寻常力学中的方法，我们自拉格朗日函数 $L(q,\dot{q})$ 引入广义动量

$$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i, \tag{51.1}$$

再引入哈密顿函数

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - L = H(p,q). \tag{51.2}$$

在这里如果我们机械地运用以上的办法，选择 L 为

$$-mc\{-\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho\}^{\frac{1}{2}} + (e/c)A_\rho(\xi)\dot{\xi}_\rho, \tag{51.3}$$

那么由于上式为 $\dot{\xi}_\rho$ 的齐次一次的函数，H 恒等为零，因而无法获得正则方程. 即使我们任意地引入质点世界线的一个参量 σ，引入 $\xi'_\rho \equiv \mathrm{d}\xi_\rho/\mathrm{d}\sigma$ 而将(51.3)换为

$$-mc\{-\xi'_\rho \xi'_\rho\}^{\frac{1}{2}} + (e/c)A_\rho(\xi)\xi'_\rho,$$

同样的困难依然存在着. 因此引入这样一个参量 σ，没有什么好处.

如果将(51.3)换为

$$\frac{1}{2}m\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho + (e/c)A_\rho \dot{\xi}_\rho, \tag{51.4}$$

我们可以运用以上所述的力学中所运用的方法. 但我们不这样做. 首先，我们必须注意到(51.3)，(51.4)中的 $\dot{\xi}_\rho$ 不是独立地变化的，而必须满足 $\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho = -c^2$，因此(51.3)，(51.4)实际上是相同的. 当 $\dot{\xi}_\rho$ 必须满足某些条件时，以上所述的力学方法必须加以改变，这个改变了的方法见下面. 其次，在一般情形下，(51.4)不如(51.3)，因为如果我们愿意引入 σ 而将 $\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho = -c^2$ 的条件取消，那么相当于(51.4)的 S 为

$$\int \left\{ \frac{1}{2}m\xi'_\rho \xi'_\rho + (e/c)A_\rho \xi'_\rho \right\} \mathrm{d}\sigma,$$

而它的数值与 σ 的选择有关，因而是不可能被采用的.

让我们讨论在 $\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho = -c^2$ 条件下，(51.3)，(51.4)对 s 的积分

取最大或最小时的 ξ，亦即是在这条件下，$(e/c)A_\rho\dot{\xi}_\rho$ 对 s 的积分取最大或最小时的 ξ. 以 $(e/c)A_\rho\dot{\xi}_\rho$ 为拉格朗日 L，用拉格朗日乘子法，我们获得

$$\int\left\{\delta[(e/c)A_\rho\dot{\xi}_\rho]+\frac{1}{2}\eta(s)\delta(\dot{\xi}_\rho\dot{\xi}_\rho)\right\}\mathrm{d}s=0,$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\eta(s)\dot{\xi}_\rho+\frac{e}{c}A_\rho(\xi)\right\}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu(\xi)}{\partial\xi_\rho}\dot{\xi}_\nu=0; \tag{51.5}$$

式中 η 为拉格朗日乘子，可以为 s 的函数. (51.5)会同 $\dot{\xi}_\rho\dot{\xi}_\rho=-c^2$ 乃是我们的全部方程；由它们可以决定 η 及 ξ. 不难看出，η 必然是一个常数(即与 s 无关). 事实上，(51.5)即是

$$\eta\ddot{\xi}_\rho+\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s}\dot{\xi}_\rho+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\rho(\xi)}{\partial\xi_\nu}\dot{\xi}_\nu-\frac{\partial A_\nu(\xi)}{\partial\xi_\rho}\dot{\xi}_\nu\right)=0. \tag{51.6}$$

乘以 $\dot{\xi}_\rho$，即得

$$-c^2(\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s)=0, \tag{51.7}$$

因此 η 是一个常数. 令 η 为 m，(51.6)即是我们所需的运动方程(49.15). 因此我们的运动方程(49.15)中的 $\xi(s)$ 使 $(e/c)A_\rho\dot{\xi}_\rho$ 对 s 的积分取最大或最小.

可以将(51.5)及 $\dot{\xi}_\rho$ 所适合的条件 $\dot{\xi}_\rho\dot{\xi}_\rho=-c^2$ 写为正则方程的形式. 这个方法的一般理论见作者所著的一篇论文①，不拟在此讨论. 我们只在此应用这个理论. 我们的 H 的定义应该是

$$H=p_\mu\dot{\xi}_\mu-L=p_\mu\dot{\xi}_\mu-(e/c)\dot{\xi}_\mu A_\mu, \tag{51.8}$$

而式中的 $\dot{\xi}_\mu$ 是 p_μ,ξ 的函数；它们及某一个函数 η 由下列五式

$$p_\mu=\partial L/\partial\dot{\xi}_\mu+\frac{1}{2}\eta\partial(\dot{\xi}_\rho\dot{\xi}_\rho)/\partial\dot{\xi}_\mu=(e/c)A_\mu+\eta\dot{\xi}_\mu, \tag{51.9}$$

① T. S. Chang(张宗燧), *Proc. Camb. Phil. Soc.* **43**(1947)196, 或 *Proc. Roy. Soc.* **A183**(1945)316.

$$\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho = -c^2 \tag{51.10}$$

一齐决定(注意这五个式子恰好决定了 $\eta, \dot{\xi}_\rho$ 如何为 $p_\mu, A_\mu(\xi)$ 的函数). 由(51.9),(51.10),我们获得

$$\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) = \eta^2 \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -\eta^2 c^2,$$

因此

$$\eta = c^{-1}\left\{-\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\dot{\xi}_\mu = \frac{1}{\eta}\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) = \frac{c(p_\mu - (e/c)A_\mu)}{\{-[p_\rho - (e/c)A_\rho][p_\rho - (e/c)A_\rho]\}^{\frac{1}{2}}}.$$

以此代入(51.8)右方,得

$$H = -c\{-[p_\rho - (e/c)A_\rho][p_\rho - (e/c)A_\rho]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{51.11}$$

不难验证用这样的 H 所构成的

$$\frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} \tag{51.12}$$

乃是运动方程. 事实上,由上式,得

$$\frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}s} = c\frac{[p_\mu - (e/c)A_\mu]}{\{-[p_\rho - (e/c)A_\rho][p_\rho - (e/c)A_\rho]\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{51.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{c[p_\theta - (e/c)A_\theta]}{\{-[p_\rho - (e/c)A_\rho][p_\rho - (e/c)A_\rho]\}^{1/2}}\frac{e}{c}\frac{\partial A_\theta(\xi)}{\partial \xi_\mu}. \tag{51.14}$$

由(51.13),(51.14)得

$$\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -c^2, \tag{51.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}\frac{\partial A_\theta(\xi)}{\partial \xi_\mu}\dot{\xi}_\theta. \tag{51.16}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p_\rho - \frac{e}{c}A_\rho\right)\left(p_\rho - \frac{e}{c}A_\rho\right)$$

$$= 2\left(p_\rho - \frac{e}{c}A_\rho\right)\left[\frac{\mathrm{d}p_\rho}{\mathrm{d}s} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\rho}{\partial \xi_\theta}\dot{\xi}_\theta\right]$$

$$= 2\left(p_\rho - \frac{e}{c}A_\rho\right)\left[\frac{\partial A_\theta}{\partial \xi_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \xi_\theta}\right]\frac{e}{c}\dot{\xi}_\theta$$

$$= \frac{2e}{c}\left(p_\rho - \frac{e}{c}A_\rho\right)\left(p_\theta - \frac{e}{c}A_\theta\right)\left[\frac{\partial A_\theta}{\partial \xi_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \xi_\theta}\right]\frac{1}{\{\cdots\}^{1/2}} = 0,$$

式中

$$\{\cdots\} = [p_\rho - (e/c)A_\rho][p_\rho - (e/c)A_\rho],$$

故它是一个常数. 令之为$-m^2c^2$,(51.13)成为

$$m\dot{\xi}_\mu = p_\mu - (e/c)A_\mu. \tag{51.17}$$

由上式及(51.16)得

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_\mu &= \dot{p}_\mu - (e/c)(\partial A_\mu/\partial \xi_\nu)\dot{\xi}_\nu \\ &= (e/c)(\partial A_\nu/\partial \xi_\mu)\dot{\xi}_\nu - (e/c)(\partial A_\mu/\partial \xi_\nu)\dot{\xi}_\nu \\ &= (e/c)H_{\mu\nu}(\xi)\dot{\xi}_\nu, \end{aligned} \tag{51.18}$$

即是我们以前的运动方程.(不妨在此附带地指出,如果令 H 等于$(1/2m)(p_\rho - eA_\rho/c)(p_\rho - eA_\rho/c)$,也能达到以上的目的,即证明(51.12)为运动方程.)

(51.11)中的 H,是对于独立变数 s 的哈密顿函数,此后我们用 H^s 来代表它. 显然地,我们也希望讨论对于时间变数 τ 的哈密顿方程

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (i = 1,2,3). \tag{51.19}$$

(51.19)可以由(51.12)而获得,经过如下.

在

$$[p_\rho - (e/c)A_\rho][p_\rho - (e/c)A_\rho] = -m^2c^2 \tag{51.20}$$

中求 p_4,获得 p_4 为 $p_1,p_2,p_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau$ 的函数(注意 $\xi_4 = \mathrm{i}c\tau$). 称这个函数为

$$(\mathrm{i}/c)H(p_1,p_2,p_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau), \tag{51.21}$$

那么由于

$$H^s(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,p_1,p_2,p_3,(\mathrm{i}H/c)) + mc^2 = 0, \quad (51.22)$$

我们得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{c}\dfrac{\partial H}{\partial \xi_k} = -\dfrac{\partial H^s/\partial \xi_k}{\partial H^s/\partial p_4}, \\ \dfrac{\mathrm{i}}{c}\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = -\dfrac{\partial H^s/\partial p_k}{\partial H^s/\partial p_4}. \end{cases} \quad (51.23)$$

由此便得我们所需的结果：

$$\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{i}c\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}\xi_4} = \mathrm{i}c\frac{\mathrm{d}\xi_k/\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi_4/\mathrm{d}s} = \mathrm{i}c\frac{\partial H^s/\partial p_k}{\partial H^s/\partial p_4} = \mathrm{i}c\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}\right)\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{i}c\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}\xi_4} = \mathrm{i}c\frac{\mathrm{d}p_k/\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi_4/\mathrm{d}s} = \mathrm{i}c\frac{-(\partial H^s/\partial \xi_k)}{\partial H^s/\partial p_4}$$

$$= -\mathrm{i}c\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}\right)\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_k} \quad (k = 1,2,3).$$

用以上的方法求出

$$H(\xi_i,p_i,\tau) = e\varphi + c\{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{\frac{1}{2}}. \quad (51.24)$$

利用(51.17)，不难算出 H 的值等于

$$e\varphi + mc^2/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (51.25)$$

因此 H 不等于质点的能量 $mc^2/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$，而等于它加上 $e\varphi$. 我们在下一节中将证明如果讨论电磁场及质点的总哈密顿量，那么它等于两者的能量的和. 换句话说，如果分别地讨论质点的哈密顿量或电磁场的哈密顿量，那么它们都不等于质点及电磁场的能量；只有讨论它们的总哈密顿量时，我们才获得总能量.

这里的结果(51.19)，(51.24)也可以用下法获得. 即在一开始时我们令质点的时间坐标 τ(或 t)为独立变数，而只讨论 S_1+S_2 对于三个函数 $\xi_1(\tau)$，$\xi_2(\tau)$，$\xi_3(\tau)$的变化. 那时将 ξ_i' 代表 $\mathrm{d}\xi_i/\mathrm{d}\tau$，将 S_1+S_2 改写为

$$-mc\int\{-\xi_i'\xi_i' + c^2\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau + \frac{e}{c}\int(A_i\xi_i' - c\varphi)\mathrm{d}\tau. \quad (51.26)$$

这样,我们便可以运用力学中所用的方法,结果便是(51.19)及(51.24)式.这样的理论在形式上破坏了相对论的形式.但当我们将质点与电磁场一齐讨论时,这个理论比较更方便些.详情见下一节.

§52 电磁场及质点运动的正则方程

现在讨论电磁场及质点的运动方程一齐写为正则方程的情形.在此我们讨论质点的坐标 ξ_1,ξ_2,ξ_3 如何为 t 的函数,同时讨论对于一个固定的 μ 及固定的 (x_1,x_2,x_3),$A_\mu(x_1,x_2,x_3,t)$ 如何为 t 的函数.因此在 $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ 式中,$\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{x}$ 的地位相当于参量或"记号";它们用来说明在许许多多函数 $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ 中我们究竟讨论哪一个,因此它的地位正同 $\xi_i(t)$ 的 i 一样.用这样的精神来讨论,t 成为惟一的独立变数.

我们将 S 写为

$$\int \bar{L}\mathrm{d}t, \tag{52.1}$$

称式中 $\bar{L}$ 为总拉格朗日量.它等于

$$-mc(c^2-\xi_i'\xi_i')^{1/2}+(e/c)[A_i(\boldsymbol{\xi},t)\xi_i'-c\varphi(\boldsymbol{\xi},t)]+\int L^{EH}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.$$

$$(\xi_i'=\mathrm{d}\xi_i/\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3) \tag{52.2}$$

首先讨论 L^{EH}是 L'^{EH}的情形,亦即 $L^{EH}=-(1/16\pi)(\partial A_\rho/\partial x_\theta-\partial A_\theta/\partial x_\rho)(\partial A_\rho/\partial x_\theta-\partial A_\theta/\partial x_\rho)$的情形.

在此应用寻常力学的方法时遇到一些小的困难,即在寻常力学中变数是有限个,而在这里,$A_\mu(\boldsymbol{x})$有"无限"个.这个困难不是严重的,我们可以在开始时限制 x_1,x_2,x_3 等都分别地成为某一个数 a 乘上一个整数 n,而同时限制$|n|$不超过某一个整数 N.在如此限制后而获得的式子中,我们令 a 趋近于零,N 趋于无穷大,所获得的结果即是我们所需要的.我们在此只写出计算的结果而把

计算过程省略.

质点的动量 $\boldsymbol{p}_i$ 的定义是

$$\boldsymbol{p}_i=\frac{\partial\bar{L}}{\partial\xi_i'}=\frac{mc\xi_i'}{(c^2-\xi_j'\xi_j')^{1/2}}+\frac{e}{c}A_i(\boldsymbol{\xi},t), \tag{52.3}$$

$A_\mu(\boldsymbol{x})$的动量是

$$P_\mu(x_1x_2x_3)=\frac{\partial(L^I+L'^{EH})}{\partial(\partial A_\mu/\partial t)}=\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial t}-\mathrm{i}c\frac{\partial A_4}{\partial x_\mu}\right). \tag{52.4}$$

总哈密顿量

$$H^{\text{total}}=p_i\xi_i'+\int P_\mu(\partial A_\mu/\partial t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}-\bar{L}. \tag{52.5}$$

由(52.3),

$$\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2=\frac{m^2c^2\xi_j'\xi_j'}{c^2-\xi_j'\xi_j'},$$

由此得

$$\xi_j'\xi_j'=\frac{c^2[\boldsymbol{p}-(e/c)\boldsymbol{A}]^2}{m^2c^2+[\boldsymbol{p}-(e/c)\boldsymbol{A}]^2}.$$

(52.5)中的一部分

$$p_i\xi_i'-\frac{e}{c}A_i\xi_i'+mc(c^2-\xi_j'\xi_j')^{1/2}$$

可以化为

$$\begin{aligned}\frac{mc\xi_i'\xi_i'}{(c^2-\xi_j'\xi_j')^{1/2}}+mc(c^2-\xi_j'\xi_j')^{1/2}&=\frac{mc^3}{(c^2-\xi_j'\xi_j')^{1/2}}\\&=c\{m^2c^2+[\boldsymbol{p}-(e/c)\boldsymbol{A}]^2\}^{1/2},\end{aligned} \tag{52.6}$$

即是(51.24)中第二项.(52.5)中其他部分为

$$e\varphi+\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial t}-\mathrm{i}c\frac{\partial A_4}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= e\varphi + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \mathrm{i}c\,\frac{\partial A_4}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\right.\\
&\quad + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial A_\mu}{\partial x_i}\\
&\quad \left. - \frac{1}{8\pi c^2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \mathrm{i}c\,\frac{\partial A_4}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\right\}\\
&= e\varphi(\xi) + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{2\pi c^2 P_k P_k + \mathrm{i}cP_k\,\frac{\partial A_4}{\partial x_k}\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right\}.
\end{aligned}
\tag{52.7}
$$

ξ_i，p_i 的正则方程带来了运动方程(49.15)，证明已见上节，在此不再重复. $A_\mu(\boldsymbol{x})$，$P_\mu(\boldsymbol{x})$的正则方程取以下的形式：

$$
\frac{\mathrm{d}A_\mu(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H^*}{\partial P_\mu}, \tag{52.8}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}P_\mu(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = -\left\{\frac{\partial H^*}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial H^*}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_i)}\right\}; \tag{52.9}
$$

式中 H^* 代表总哈密顿量密度，在此等于

$$
\begin{aligned}
&[c\{m^2c^2+(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{\frac{1}{2}}+e\varphi]\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)\\
&\quad +2\pi c^2P_kP_k+\mathrm{i}cP_k\,\frac{\partial A_4}{\partial x_k}+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right).
\end{aligned}
\tag{52.10}
$$

它与总哈密顿量 H^{total}的关系是

$$
\int H^*\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = H^{\text{total}}.
$$

(52.8)，(52.9)不拟在此导出，它们的由来可以粗糙地解释如下.

(52.8)，(52.9)的导出，大体情形如下. 在计算开始时我们将 x_1, x_2, x_3 限制为 n_1a, n_2a, n_3a；n_1, n_2, n_3 在此代表整数，而 a 代表某一个长度. 将拉格朗日量 L 写为

$$
\sum_{n_1,n_2,n_3} a^3 L(n_1, n_2, n_3)
$$

$\left(\sum a^3\ \text{相当于} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\right)$，用寻常力学中的方法引入动量，哈密顿量，正则方程；然后令 a 趋近于零. 在 a 未趋近于零前，我们对于某一套 n 而言，有以下的式

子：

$$\frac{\mathrm{d}A_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H^{\text{total}}}{\partial P_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)},\tag{52.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H^{\text{total}}}{\partial A_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)},\tag{52.12}$$

式中(n_1^0,n_2^0,n_3^0)代表这一套n. 注意这里的$P_\mu(\cdots)$是(52.4)中的P_μ乘上a^3(因为L在此应写为$a^3\sum\limits_{n_1,n_2,n_3}L(n_1,n_2,n_3)$),而这里的$H^{\text{total}}$与以前的$H^{\text{total}}$(即(52.5))相等. 因此用(52.4)中的$P_\mu$,得

$$\frac{\mathrm{d}A_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{a^3}\frac{\partial H^{\text{total}}}{\partial P_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)},\tag{52.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a^3}\frac{\partial H^{\text{total}}}{\partial A_\mu(n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a)}.\tag{52.14}$$

(52.13)的右方是

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\{&H^{\text{total}}[A(n),P_\mu(n_1n_2n_3)+\varepsilon\delta_{n_1n_1^0}\delta_{n_2n_2^0}\delta_{n_3n_3^0}]\\&-H^{\text{total}}[A(n),P_\mu(n)]\}.\end{aligned}\tag{52.15}$$

因此当a趋近于零而n_1^0a,n_2^0a,n_3^0a趋近于x_1^0,x_2^0,x_3^0时,(52.15)应换为

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\{&H^{\text{total}}[A(x),P_\mu(x_1,x_2,x_3)+a^3\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)]\\&-H^{\text{total}}[A(\boldsymbol{x}),P_\mu(\boldsymbol{x})]\},\end{aligned}\tag{52.16}$$

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)=\delta(x_1-x_1^0)\delta(x_2-x_2^0)\delta(x_3-x_3^0).$$

(52.16)式中花括号中第二项代表由$A_\mu(\boldsymbol{x}),P_\mu(\boldsymbol{x})$而构成的$H^{\text{total}}$,而第一项代表将$P_\mu(\boldsymbol{x})$换为$P_\mu(\boldsymbol{x})+a^3\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$而获得的$H^{\text{total}}$. 所以用$a^3\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$而不用$\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$的理由是：$\varepsilon\delta_{n_1n_1^0}\delta_{n_2n_2^0}\delta_{n_3n_3^0}$与$a^3\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$几乎是$\boldsymbol{x}$的同样的函数;事实上,将性质相同的算子$a^3\sum\limits_{n_1,n_2,n_3}$及$\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$分别作用于它们上,我们获得同样的值$\varepsilon a^3$. 不难证明,(52.16)即是

$$\frac{1}{a^3}\int\frac{\partial H^*}{\partial P_\mu}a^3\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\left(\frac{\partial H^*}{\partial P_\mu}\right)_{x=x^0}.$$

同样,(52.14)的右方应换为

$$-\frac{1}{a^3}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\{H^{\text{total}}[A_\mu(\boldsymbol{x})+a^3\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0),P_\mu(\boldsymbol{x})]$$

$$-H^{\text{total}}[A_\mu(\boldsymbol{x}),P_\mu(\boldsymbol{x})]\}.$$

这一项等于

$$-\frac{1}{a^3\varepsilon}\int\left\{\frac{\partial H^*}{\partial A_\mu}a^3\varepsilon\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)+\frac{\partial H^*}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_i)}a^3\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

$$=-\int\left\{\frac{\partial H^*}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H^*}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_i)}\right\}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

$$=-\left(\frac{\partial H^*}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H^*}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_i)}\right)_{x=x^0}.$$

这样我们便粗糙地解释了(52.8),(52.9)右方的来源.通常我们将这两个右方写为

$$\delta H^{\text{total}}/\delta P_\mu(\boldsymbol{x}),\quad \delta H^{\text{total}}/\delta A_\mu(\boldsymbol{x});\tag{52.17}$$

而称它们为哈密顿导数①或泛函导数.

主要问题是验证(52.8),(52.9)确是麦克斯韦方程(虽然自一般性理论我们已确知它们必然是使 S 取最小值的方程,因而是麦克斯韦方程),及证明 H^{total} 确是总能量.这两点的讨论都没有困难.先讨论第二点.

H^{total} 等于(52.6)加上(52.7).(52.6)等于

$$mc^3/\{c^2-\xi'_j\xi'_j\}^{1/2}=mc^2/(1-\beta^2)^{1/2},$$

等于质点的能量.(52.7)的 $e\varphi(\xi)$ 项可以写为

$$-\mathrm{i}\int\rho A_4\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=-\mathrm{i}\int\frac{1}{4\pi}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})A_4\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{4\pi c}\int\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_j}{\partial t}-\mathrm{i}c\frac{\partial A_4}{\partial x_j}\right]A_4\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{4\pi c}\int\left(\frac{\partial A_j}{\partial t}-\mathrm{i}c\frac{\partial A_4}{\partial x_j}\right)\frac{\partial A_4}{\partial x_j}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x},\tag{52.18}$$

与(52.7)左方第二项相加,成为

$$\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{4\pi c^3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial t}-\mathrm{i}c\frac{\partial A_4}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial A_j}{\partial t}-\mathrm{i}c\frac{\partial A_4}{\partial x_j}\right)+\frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}\right\}$$

---

① W. Heisenberg und W. Pauli, *Zeits. f. Physik* **56** (1929) 1. 在这里有(52.8),(52.9)式的证明.

$$= \int d^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{4\pi}E^2 + \frac{1}{8\pi}(H^2 - E^2)\right\} = \int d^3\boldsymbol{x}\,\frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2),$$

(52.19)

因而证明了(52.6)加上(52.7)等于电磁场及质点的总能. 可以附带地在此指出,(52.6)与(52.7)的第一项可以合写为

$$c(m^2c^2 + p^2)^{1/2} + (e\varphi - e\xi_j' A_j/c) + O(A^2).$$

总哈密顿量成为上式与(52.7)的第二项的和. 上式第一项,第二第三两项的和,(52.7)的第二项分别称为自由质点哈密顿量,作用哈密顿量及电磁场哈密顿量. 注意当我们忽略 $O(A^2)$时,作用哈密顿量,除开一个"-1"的倍数外,即是作用拉格朗日量 L^I 所构成的

$$\int L^I d^3\boldsymbol{x} = (1/c)\int A_\mu j_\mu d^3\boldsymbol{x} = (e/c)(\xi_j' A_j - c\varphi).$$

其次讨论 A_μ, P_μ 的正则方程. 注意在此,由定义得 $P_4=0$. 在此情形下,A_4 的正则方程不再存在,而 P_4 的正则方程依然有效,但式中的 P_4 以零代替. 为证明这一点,不妨讨论力学中的类似情形. 假定 q 共有 f 个,即 $q_1, q_2, \cdots, q_f$,而 $L(q, \dot{q})$ 不含有 $\dot{q}_f$ 的情形. 运动方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, f-1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_f} = 0.$$

令

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, f-1),$$

再令

$$H = \sum_1^{f-1} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}),$$

便得了

$$dH = \sum_1^{f-1} \dot{q}_i dp_i - \sum_1^{f} (\partial L/\partial q_i) dq_i.$$

由此获得

$$\dot{q}_i = (\partial H/\partial p_i) \quad (i = 1, \cdots, f-1),$$

$$\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\partial \dot{q}_i}\right) = + \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, f-1),$$

$$O = \frac{\partial L}{\partial q_f} = - \frac{\partial H}{\partial q_f}.$$

因此

$$\dot{q}_f = \partial H/\partial p_f$$

的式子不再存在,而

$$\dot{p}_f = - \partial H/\partial q_f$$

依然存在,但式中的 p_f 以零来代替. 因此正则方程一部分为 A_i 的正则方程,一部分为 P_μ 的正则方程,但在 P_4 的正则方程中,我们必须用零来代替 P_4. 显然地,A_i 的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = 4\pi c^2 P_i + \mathrm{i}c \frac{\partial A_4}{\partial x_i}, \tag{52.20}$$

P_i 的微分方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right) \\ &\quad + \frac{e}{c} \frac{c[p_i - eA_i/c]}{\{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{1/2}} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right) + \frac{e}{c} \xi_i' \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}).\end{aligned} \tag{52.21}$$

原来应含有 P_4 而现在令 P_4 等于零的微分方程为

$$0 = \mathrm{i}c\partial P_k/\partial x_k + \mathrm{i}e\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}). \tag{52.22}$$

引入 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 为 $\partial A_\nu/\partial x_\mu - \partial A_\mu/\partial x_\nu$ 的各分量,便不难证明

$$E_k = - 4\pi c P_k, \tag{52.23}$$

而(52.21),(52.22)分别代表含有 j_μ 的麦克斯韦方程. 因此正则方程完完全全地与麦克斯韦方程等效.

P_4 等于零的事实使这个理论的量子化产生了困难. 为避免这个困难起见,我们取电磁场的拉格朗日量为

$$L''^{EH} = -(1/8\pi)(\partial A_\nu/\partial x_\mu)(\partial A_\nu/\partial x_\mu).$$

这样选择后，质点的 p_i 同前，但 P_μ 改为

$$P_\mu = (4\pi c^2)^{-1}(\partial A_\mu/\partial t). \tag{52.24}$$

总哈密顿量

$$p_i\xi_i' + \int P_\mu(\partial A_\mu/\partial t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} - \overline{L}$$

依然可以分为两部分，其中一部分依然是

$$c\{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{1/2},$$

另一部分则改为

$$e\varphi(\xi) + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_j}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\right\}$$

$$= e\varphi(\xi) + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{8\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_j}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_j} + 2\pi c^2 P_\mu P_\mu\right\}. \tag{52.25}$$

在§9中，我们已提起电磁场的能量等于(9.25)，亦即是上式右方.现在补充(9.25)的证明如下：

$$\frac{1}{8\pi}\int(E^2 + H^2)\mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi}\int\Big\{(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$+ [-1/c(\partial\boldsymbol{A}/\partial t) - \nabla\varphi]^2\Big\}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\{\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + 1/c^2(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)^2 + (\nabla\varphi)^2$$

$$+ (2/c)(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)\cdot\nabla\varphi\}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int[-\boldsymbol{A}\cdot\nabla^2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + 1/c^2(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)^2$$

$$+ (\nabla\varphi)^2 - 2/c(\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}/\partial t)\varphi]\mathrm{d}V.$$

用分部积分法将积分中第一项改为 $(\partial A_i/\partial x_j)(\partial A_i/\partial x_j)$，第二项改为

$$-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})^2 = -c^{-2}(\partial\varphi/\partial t)^2$$

(利用洛伦兹条件)，将第五项改为

$$(2/c^2)\varphi(\partial^2\varphi/\partial t^2) = -2(\nabla\varphi)^2 + 2(\nabla\varphi)^2 + (2/c^2)\varphi(\partial^2\varphi/\partial t^2)$$

$$= -2(\nabla\varphi)^2 + 2\varphi(-\nabla^2\varphi + c^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2)$$
$$= -2(\nabla\varphi)^2 + 8\pi\rho\varphi,$$

再相加,即获得(9.25)的证明,亦即证明了(52.25)左方与

$$\frac{1}{8\pi}\int d^3\boldsymbol{x}(E^2 + H^2) \tag{52.26}$$

相等.很显然地,相等的条件是洛伦兹条件的成立.由一例即可看出在此处洛伦兹条件的重要性,即在 A_μ 变为 $A_\mu+(\partial\psi/\partial x_\mu)$ 的情形下,(52.26)是一个不变量,而(52.25)的左方是有了变化的(如果$\Box\psi\neq 0$),因此它们在洛伦兹条件不成立时不可能相等.洛伦兹条件的始终满足事实上只要求起始条件(49.27),(49.28)的成立(因为我们有了适当的运动方程).

质点的正则方程与前完全相同,不必重复讨论.电磁场的正则方程是

$$\frac{dA_\mu}{dt} = 4\pi c^2 P_\mu, \tag{52.27}$$

$$\frac{dP_k}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k + \frac{e(p_k - eA_k/c)}{\{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{1/2}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}),$$

$$\frac{dP_4}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}A_4 + ie\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi});$$

亦即

$$\frac{dP_\mu}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}A_\mu + \frac{e}{c}\xi'_\mu\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}). \tag{52.28}$$

不难由此证明

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu = -4\pi e\xi'_\mu\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) = -4\pi j_\mu. \tag{52.29}$$

因此引入 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 为 $\partial A_\mu/\partial x_\nu - \partial A_\nu/\partial x_\mu$ 的各个分量,再引入起始条件(49.27),(49.28),$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 便完完全全地适合麦克斯韦方程.

以上说明了电磁场及质点的运动方程可以写为正则方程的形式,同时使总哈密顿函数等于电磁场及质点的总能量. 这样将理

论量子化——即将理论改为相应的量子学说——便有了可能. 在这里有两套正则方程，相当于两个不同的电磁场的拉格朗日量，第一套的缺点是 $P_4 \equiv 0$，第二套的缺点是必须引入适当的起始条件.

§53　连续介质的拉格朗日运动方程

连续介质运动方程，已在§48中讨论过. 运动方程乃是两个(48.27)，(48.28). 现在以 ρ_m 代表该处曾讨论的静质量密度 ρ^0，以 ρ_m^0 代表静止系统的静质量密度 ρ^{00}，再以 ρ_e 代表电荷密度，以 ρ_e^0 代表静止系统的电荷密度，最后以 f_μ 代表洛伦兹力密度，得

$$\partial(\rho_m^0 u_\mu)/\partial x_\mu = 0, \tag{53.1}$$

$$\rho_m^0 u_\nu(\partial u_\mu/\partial x_\nu) = c^{-1}\rho_e^0 H_{\mu\nu}u_\nu. \tag{53.2}$$

我们在此的问题乃在建立一个拉格朗日函数，及证明当我们在这个拉格朗日函数上应用变分法时我们便获得了上式.

应用变分法时，一个质点的 S 函数是

$$-mc\int(-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu)^{1/2}\mathrm{d}s + (e/c)\int\dot{\xi}_\mu A_\mu(\xi)\mathrm{d}s, \tag{53.3}$$

因此要推广到连续介质，我们只消将 me 分别地换为对于质点体积的积分

$$\int\rho_m^0\mathrm{d}V^0,\quad \int\rho_e^0\mathrm{d}V^0, \tag{53.4}$$

而再将积分区域扩大，使它包含全部连续介质. 在上式中 $\mathrm{d}V^0$ 代表静止系统中所量到的体积，因此

$$\mathrm{d}V^0\mathrm{d}s = \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,$$

因此对于连续介质而言，函数 S 等于

$$-\int\rho_m^0 c^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + (1/c)\int\rho_e^0 u_\mu A_\mu\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t. \tag{53.5}$$

这个式子也可以如下地获得. 根据(52.1)及(52.2)，一个质点的 S 是

$$\int\mathrm{d}t\{-mc(c^2-\xi_i'\xi_i')^{1/2} + (e/c)A_\mu\xi_\mu'\}. \tag{53.6}$$

(ξ_μ' 代表 $\mathrm{d}\xi_\mu/\mathrm{d}t$，不是一个矢量.) 将(53.6)中的 m,e 分别换为(53.4)中的二项，以 $\mathrm{d}V/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ 代替 $\mathrm{d}V^0$，再以 $\dot{\xi}_\mu$ 或 u_μ 代替 $\xi_\mu'(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$，(53.6)也变成

了(53.5).

为简单起见,假定 ρ_m^0/ρ_e^0 为一个不变的常数 κ(这即是假定只有一种物质),使得静质量的守恒与电荷的守恒成为一件事.

我们现在讨论 A_μ, u_μ, ρ_m^0 须适合什么方程,方能使(53.5)加上电磁场的 S(即以前的 S_3),成为最小.取 S_3 为

$$-\frac{1}{16\pi}\int(\partial A_\rho/\partial x_\theta-\partial A_\theta/\partial x_\rho)(\partial A_\rho/\partial x_\theta-\partial A_\theta/\partial x_\rho)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,$$

从而讨论(53.5)加上式对 A_μ 的变分,便获得了所需的

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)+\frac{\rho_e^0}{c}u_\nu=0.$$

在讨论对于 u_μ, ρ_m^0 的变化时,必须记得 u_μ, ρ_m^0 不是独立的,而满足条件

$$u_\mu u_\mu=-c^2, \tag{53.7}$$

$$\partial(\rho_m^0 u_\mu)/\partial x_\mu=0. \tag{53.8}$$

根据拉格朗日乘子法,我们引入乘子 η_1, η_2,写下(53.5)的变化加上

$$\int\{\eta_1\delta(u_\mu u_\mu+c^2)+\eta_2\delta[\partial(\rho_m^0 u_\mu)/\partial x_\mu]\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,$$

而再把 $\delta u_\mu, \delta\rho_m^0$ 的系数写为零.(53.5)的变化加上了上式等于

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\Big\{&-\delta\rho_m^0 c^2+\frac{1}{c}\rho_e^0 A_\mu\delta u_\mu+\frac{1}{c}A_\mu u_\mu\delta\rho_e^0\\&+2\eta_1 u_\mu\delta u_\mu+\eta_2\rho_e^0\delta(\partial u_\mu/\partial x_\mu)+\eta_2\delta\rho_e^0(\partial u_\mu/\partial x_\mu)\\&+\eta_2\delta(\partial\rho_e^0/\partial x_\mu)u_\mu+\eta_2(\partial\rho_e^0/\partial x_\mu)\delta u_\mu\Big\}.\end{aligned}$$

将上式花括号中的第五项、第七项分别地改为

$$-[\partial(\eta_2\rho_e^0)/\partial x_\mu]\delta u_\mu,\quad[-\partial(\eta_2 u_\mu)/\partial x_\mu]\delta\rho_e^0,$$

又同时令 $\rho_m^0=\kappa\rho_e^0, \delta\rho_m^0=\kappa\delta\rho_e^0$($\kappa$ 为一常数),便获得了

$$-\kappa c^2+\frac{1}{c}A_\mu u_\mu-\frac{\partial\eta_2}{\partial x_\mu}u_\mu=0, \tag{53.9}$$

$$\frac{1}{c}\rho_e^0 A_\mu+2\eta_1 u_\mu-\frac{\partial\eta_2}{\partial x_\mu}\rho_e^0=0. \tag{53.10}$$

现在便可以自(53.7),(53.8),(53.9),(53.10)诸式中求出(53.2).

事实上,在(53.9)上乘以 ρ_e^0,在(53.10)上乘以 u_μ,相减,得

$$-\kappa\rho_e^0 c^2+2\eta c^2=0,$$

由此得

$$\eta=\frac{1}{2}\kappa\rho_e^0=\frac{1}{2}\rho_m^0. \tag{53.11}$$

以此代入(53.10)，除以 ρ_e^0，得

$$\kappa u_\mu = - c^{-1} A_\mu + (\partial \eta_2 / \partial x_\mu), \tag{53.12}$$

两方乘以

$$\rho_e^0 u_\nu (\partial / \partial x_\nu),$$

便获得了

$$\begin{aligned}\rho_m^0 u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} &= \rho_e^0 \left\{ - \frac{1}{c} u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu + u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_\mu} \right\} \\ &= \rho_e^0 \left\{ - \frac{1}{c} u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(u_\nu \frac{\partial \eta_2}{\partial x_\nu} \right) - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \right\}.\end{aligned}$$

以(53.9)，(53.10)中的 $\partial \eta_2 / \partial x_\nu$ 分别地代替上式中第一个及第二个 $\partial \eta_2 / \partial x_\nu$，得

$$\begin{aligned}\rho_m^0 u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} &= \rho_e^0 \left\{ - \frac{1}{c} u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(- \kappa c^2 + \frac{1}{c} A_\nu u_\nu \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \left[\frac{1}{c} A_\nu - \kappa u_\nu \right] \right\} \\ &= \rho_e^0 c^{-1} u_\nu (\partial A_\nu / \partial x_\mu - \partial A_\mu / \partial x_\nu).\end{aligned} \tag{53.13}$$

上式即是我们所需的(53.2)式.

连续介质运动方程，也可以采取正则方程的形式，这一点不拟在此讨论.

§54　A_μ 的傅里叶系数的微分方程

让我们引入 A_μ，j_μ 的傅里叶系数，而研究它们所适合的微分方程，看它们能否适合正则方程.

在此让我们只讨论 L^{EH} 为 L''^{EH} 的情形. 该时电磁场的运动方程是(49.21)式. 由傅里叶积分的理论，我们知

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho) \mathrm{e}^{\alpha(\rho - x)\mathrm{i}} \mathrm{d}\rho; \tag{54.1}$$

因此，我们得

$$A_\mu(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}A_{\mu k}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}^{①}\quad(\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}=\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3),\tag{54.2}$$

$$A_{\mu k}(t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}A_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.\tag{54.3}$$

同样，

$$\begin{cases}j_\mu(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\displaystyle\int j_{\mu k}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k},\\ j_{\mu k}(t)=\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\displaystyle\int j_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.\end{cases}\tag{54.4}$$

注意 $A_{\mu k}, j_{\mu k}$的下标 $\boldsymbol{k}$ 不代表 A, j 的矢量性质，而只是说明它们为 $\boldsymbol{k}$ 的函数. 在我们的问题中，

$$j_\mu(\boldsymbol{x},t)=e\xi'_\mu\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\quad(\xi'_\mu=\mathrm{d}\xi_\mu/\mathrm{d}t),$$

因此

$$j_{\mu k}=(2\pi)^{-3/2}e\xi'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}.\tag{54.5}$$

以(54. 1)，(54. 4)第一式代入(49. 21)式，在两方乘以 $\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x})$，对 $\boldsymbol{x}$ 作积分，利用

---

① 注意我们用含有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$而不含有 $\sin kx, \cos kx$ 字样的(54. 1). 事实上，后者是

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\rho)\cos\alpha(\rho-x)\mathrm{d}\rho.$$

因此直接将这式推广至三个变数时，我们得

$$A_\mu(x,t)=\frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\{A_{\mu k}^{ccc}\cos k_1x_1\cos k_2x_2\cos k_3x_3+A_{\mu k}^{ccs}\cos k_1x_1\cos k_2x_2\sin k_3x_3$$
$$+A_{\mu k}^{css}\cos k_1x_1\sin k_2x_2\sin k_3x_3+\cdots\}\mathrm{d}^3k,$$

式中花括号中共包含八项. 这样的计算过于麻烦. 用(54. 1)时，只消将(54. 1)了解为

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\rho)\mathrm{e}^{\alpha(\rho-x)\mathrm{i}}\mathrm{d}\rho,$$

便没有错误.(参阅 В. И. Смирнов 著《高等数学教程》，卷二 § 159，§ 160.)得了(54. 2)后，可以用 $\cos\boldsymbol{kx}+\mathrm{i}\sin\boldsymbol{kx}$ 来代替 $\exp\mathrm{i}\boldsymbol{kx}$. 公式便不再复杂了. 又标量乘积 $A\cdot B$ 此后改写为 AB，省去了中间的点乘号.

$$\int \exp i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}'')\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}''),$$

便获得了

$$-k^2A_{\mu k}(t)-c^{-2}\ddot{A}_{\mu k}=-(4\pi/c)j_{\mu k}(t). \tag{54.6}$$

$$(\ddot{A}=\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}t^2)$$

这便是 $A_{\mu k}$的运动方程.

不难直接寻出一个哈密顿函数,含有 $A_{\mu k}$及 $A_{\mu k}$的动量 P,使它们的正则方程在消去 P 后成为(54.6)式.为清楚起见,我们不这样做.我们首先将(54.1),(54.4)代入 S_2+S_3'',利用(54.6)以上的式子,得

$$\int \mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{-8\pi A_{\mu k}A_{\mu,-k}k^2+(8\pi c^2)^{-1}\dot{A}_{\mu k}\dot{A}_{\mu,-k}$$
$$+(e/c)A_{\mu k}j_{\mu,-k}\}. \tag{54.7}$$

称上式被积分项为 L_k,我们定义 $A_{\mu k}$的动量 $P_{\mu k}$为

$$\partial L_k/\partial\dot{A}_{\mu k}. \tag{54.8}$$

这里有一个小小的问题,即由于 A_μ 的分量 A_1,A_2,A_3 是实数,A_4 是虚数,那么自关系(54.3),得

$$A_{ik}=(A_{i,-k})^*,\quad A_{4k}=-(A_{4,-k})^*; \tag{54.9}$$

式中 b^* 代表 b 的共轭复数.因此 $A_{\mu k}$等似乎不是完全独立的,而使我们求(54.8)时产生了困难.为解决这个困难起见,让我们暂且假定不存在(54.9)关系.在获得运动方程(54.6)后,让我们引入起始条件

$$A_{ik}=(A_{i,-k})^*,\quad A_{4k}=-(A_{4,-k})^*,$$
$$\dot{A}_{ik}=(\dot{A}_{i,-k})^*,\quad \dot{A}_{4k}=-(\dot{A}_{4,-k})^*; \tag{54.10}$$

那么由于(54.5)及运动方程,不难证明 $A_{\mu k}$等在任何时刻都满足(54.9).这样的处理方法可以使我们在定义 $P_{\mu k}$时将 $A_{\mu k}$等认为都是独立的.

因此,

$$P_{\mu k}=(4\pi c^2)^{-1}\dot{A}_{\mu,-k} \tag{54.11}$$

引入质点而讨论总的哈密顿函数. 显然地,它等于

$$p_i\xi_i'+\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}P_{\mu k}\dot{A}_{\mu k}+mc(c^2-\xi_i'\xi_i')^{1/2}-\int L_k\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}.$$

利用 p_i 与 ξ_i' 中的关系及(54.11),上式可以化为

$$c\{m^2c^2+(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{1/2}-\mathrm{i}e\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}A_{4k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}[2\pi c^2P_{\mu k}P_{\mu,-k}+(8\pi)^{-1}A_{\mu k}A_{\mu,-k}k^2]. \tag{54.12}$$

质点的正则方程与前相同,不必重复讨论. 电磁场的正则方程是

$$\mathrm{d}A_{\mu k}/\mathrm{d}t=\delta H^{\text{total}}/\delta P_{\mu k}, \tag{54.13}$$

$$\mathrm{d}P_{\mu k}/\mathrm{d}t=-\delta H^{\text{total}}/\delta A_{\mu k}. \tag{54.14}$$

让我们证明它们在消去 P 后成为(54.6)式. 将 H^{total}写为$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}H^*$,(54.13)成为

$$\dot{A}_{\mu k}=\partial H^*/\partial P_{\mu k}=4\pi c^2P_{\mu,-k}. \tag{54.15}$$

这是极显然的. 困难是在求(54.14)的右方. 根据定义,$\delta H^{\text{total}}/\delta A_{\mu' k'}$等于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{H^{\text{total}}(A_{\mu k}+\varepsilon\delta_{\mu\mu'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'))-H^{\text{total}}(A_{\mu k})\}, \tag{54.16}$$

而式中花括号中第二项代表由 $A_{\mu k}$所构成的 H^{total},而第一项代表以 $A_{\mu k}+\varepsilon\delta_{\mu\mu'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$代替 $A_{\mu k}$而获得的 H^{total}. 由此,可以证明

$$\frac{\delta H^{\text{total}}}{\delta A_{4k}}=-\mathrm{i}e\,\frac{1}{(2\pi^{3/2})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}+\frac{1}{4\pi}k^2A_{4,-k},$$

$$\frac{\delta H^{\text{total}}}{\delta A_{jk}}=c\,\frac{(p_j-eA_j/c)}{\{m^2c^2+(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{1/2}}\left(-\frac{e}{c}\right)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}$$
$$+(4\pi)^{-1}k^2A_{j,-k}\quad(j=1,2,3). \tag{54.17}$$

在(54.13)及将 $\boldsymbol{k}$ 换为$-\boldsymbol{k}$ 的(54.14)式中消去了 $P_{\mu,-k}$,即获得了

$$\begin{cases} -k^2A_{4k}-c^{-2}\ddot{A}_{4k}=-4\pi \mathrm{i}e(2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}, \\ -k^2A_{jk}-c^2\ddot{A}_{jk}=-(4\pi e/c)\xi'_j(2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}, \end{cases} \tag{54.18}$$

即是我们所需的(54.6)式.

我们在此应该引入相当于(49.26),(49.27)的起始条件.在这里它们成为

$$k_iA_{ik}-c^{-1}\dot{A}_{4k}=0,$$

$$c^{-1}k_i\dot{A}_{ik}+k^2A_{4k}-4\pi \mathrm{i}e(2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}=0. \tag{54.19}$$

用 A,P 来表出,这成为

$$k_iA_{ik}-4\pi cP_{4,-k}=0,$$

$$4\pi ck_iP_{i,-k}+k^2A_{4k}-4\pi \mathrm{i}e(2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}=0. \tag{54.20}$$

不难证明如果(54.19)或(54.20)在 $t=0$ 时刻成立,它们在任何时刻也成立.

在§52中我们已经讨论过当洛伦兹条件成立时,运动方程(52.29)变为含有 j_μ 的麦克斯韦方程,而总哈密顿量(即(52.25)加上此式前的一式 $c\{\cdots\}^{\frac{1}{2}}$)等于质点与电磁场能量(52.26)的和.在此我们可以猜到当(54.19)式成立时,(54.18)与含有 j_μ 的麦克斯韦方程等效,而总哈密顿量(54.12)等于质点与电磁场能量(52.26)的和.第一点是极显然的,不必证明.为证明第二点起见,我们看到§52中在(52.25)式附近所讨论的总哈密顿量与此间总哈密顿量的不同,只是前者多

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\{2\pi c^2P_\mu P_\mu\}$$

一项,而后者多一项

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{2\pi c^2P_{\mu k}P_{\mu,-k}\},$$

但

$$\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\{2\pi c^2P_\mu P_\mu\}=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{8\pi c^2}\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\right\}$$

$$= \int d^3\boldsymbol{x}\, \frac{1}{8\pi c^2} \int \frac{1}{(2\pi)^{-3/2}} \dot{A}_{\mu k} e^{ikx} d^3\boldsymbol{k} \int \frac{1}{(2\pi)^{-3/2}} \dot{A}_{\mu k'} e^{ik'x} d^3\boldsymbol{k}'$$

$$= \int d^3\boldsymbol{k}\, \frac{1}{8\pi c^2} \dot{A}_{\mu k} \dot{A}_{\mu,-k} = \int d^3\boldsymbol{k}\, 2\pi c^2 P_{\mu k} P_{\mu,-k},$$

因此这两个总哈密顿量的值是相等的.

可以指出：$A_\mu(\boldsymbol{x})$，$P_\mu(\boldsymbol{x})$与 $A_{\mu k}$，$P_{\mu k}$ 中的关系，正是一种切变换(контактное преобразование). 因为它们中的关系是

$$A_\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \alpha_{\mu k} e^{ikx} d^3\boldsymbol{k},$$

$$P_\mu(\boldsymbol{x}) = 4\pi c^2 \frac{\partial A_\mu}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int 4\pi c^2 \dot{A}_{\mu k} e^{ikx} d^3\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int P_{\mu,-k} e^{ikx} d^3\boldsymbol{k} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int P_{\mu k} e^{-ikx} d^3\boldsymbol{k}; \qquad (54.21)$$

而在力学中，自 $p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3, \cdots$ 变至 $P_1Q_1, P_2Q_2, \cdots$ 的变换，如果满足

$$[Q_j, P_i] \equiv \sum_k \left\{ \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right\} = \delta_{ij},$$

$$[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = 0, \qquad (54.22)$$

那么变换称为切变换. 这里自 $A_{\mu k}$，$P_{\mu k}$ 变至 $A_\mu(\boldsymbol{x})$，$P_\mu(\boldsymbol{x})$ 的变换(及其逆变换)都满足与上面类似的式子(但(54.22)中的取和改为了取积分)，因此是一个切变换. 因此 $A_{\mu k}$，$P_{\mu k}$，$A_\mu(\boldsymbol{x})$，$P_\mu(\boldsymbol{x})$ 可以同时适合正则方程. 又因变换式中不明显地含有 t 字样，它们的哈密顿函数是取等值的.

我们可以引入另一个切变换，使总哈密顿密度的式中只含有 A，P 的项成为许多平方项的和. 令

$$\begin{cases} A_{\mu k} = \frac{1}{2}(1-i) b_{\mu k} + \frac{1}{2}(1+i) b_{\mu,-k}, \text{①} \\ P_{\mu k} = \frac{1}{2}(1+i) l_{\mu k} + \frac{1}{2}(1-i) l_{\mu,-k}; \end{cases} \qquad (54.23)$$

b，l 代表新变数. 不难证明这个变换是切变换. 由上式知

---

① 我们也能引入新变数 b，c；定义为

$$b_{\mu k} = \frac{1}{2}(A_{\mu k} + A_{\mu,-k}), \quad c_{\mu k} = \frac{1}{2}(A_{\mu k} - A_{\mu,-k}).$$

但如此定义的 $b_{\mu k}$ 与 $b_{\mu,-k}$ 相同，而 $c_{\mu k} = -c_{\mu,-k}$；因而使 $b_{\mu k}$ 等不完全独立，使我们必须引入新的起始条件.

$$A_{\mu,-k}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})b_{\mu k}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})b_{\mu,-k},$$

因此

$$\int A_{\mu k}A_{\mu,-k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}=\int\frac{1}{2}(b_{\mu k}b_{\mu k}+b_{\mu,-k}b_{\mu,-k})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}=\int b_{\mu k}b_{\mu k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k};$$

同样

$$\int P_{\mu k}P_{\mu,-k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}=\int l_{\mu k}l_{\mu k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}.$$

因此总哈密顿量只含有 P,A 的一项成为

$$\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{2\pi c^2 l_{\mu k}l_{\mu k}+(8\pi)^{-1}k^2 b_{\mu k}b_{\mu k}\}.\tag{54.24}$$

条件(54.9),(54.10),亦即

$$A_{ik}=(A_{i,-k})^*,\quad A_{4k}=-(A_{4,-k})^*,$$
$$P_{ik}=(P_{i,-k})^*,\quad P_{4k}=-(P_{4,-k})^*$$

成为

$$\begin{cases}b_{ik}=(b_{ik})^*,\quad b_{4k}=-(b_{4k})^*,\\ l_{ik}=(l_{ik})^*,\quad l_{4k}=-(l_{4k})^*;\end{cases}\tag{54.25}$$

亦即 b_i,l_i 为实数,b_4,l_4 为纯虚数.这样,理论便简单化.

注意(54.23)的逆变换与(54.23)极相似.逆变换是

$$\begin{cases}b_{\mu k}=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})A_{\mu k}+\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})A_{\mu,-k},\\[2ex] l_{\mu k}=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})P_{\mu k}+\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})P_{\mu,-k},\end{cases}\tag{54.26}$$

与(54.23)相差处只是 i 与 $-$i 的不同.

用 b,l 作为变数后,

$$\begin{aligned}A_\mu(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})b_{\mu k}+\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})b_{\mu,-k}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})b_{\mu k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})b_{\mu,k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int b_{\mu k}(\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{1}{2}[b_{\mu k}(\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\\&\quad+b_{\mu,-k}(\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left\{\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}(b_{\mu k}+b_{\mu,-k})\right]\right.\\&\quad\left.+\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}(b_{\mu k}-b_{\mu,-k})\right]\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}.\end{aligned}\tag{54.27}$$

这便是 $b_{\mu k}$ 的实际意义. 事实上(54.2)右方可以直接写为

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{2}(A_{\mu k}e^{ikx} + A_{\mu,-k}e^{-ikx})d^3\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left\{\cos \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}(A_{\mu k} + A_{\mu,-k})\right]\right.$$

$$\left. + \sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}i(A_{\mu k} - A_{\mu,-k})\right]\right\}d^3\boldsymbol{k}; \qquad (54.28)$$

(54.27),(54.28)显然是相同的.

用 b,l 作变数后,运动方程变为

$$db_{\mu k}/dt = 4\pi c^2 l_{\mu k},$$

$$-k^2 b_{\mu k} - c^{-2}\ddot{b}_{\mu k} = -(4\pi e/c)\xi'_\mu(2\pi)^{-3/2}(\cos \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi} + \sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}), \qquad (54.29)$$

而起始条件改为

$$ik_i b_{ik} + 4\pi c l_{4,-k} = 0,$$

$$4\pi c i k_i l_{i,-k} + k^2 b_{4k} - 4\pi i e(2\pi)^{-3/2}(\cos \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi} + \sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}) = 0. \qquad (54.30)$$

这些可由读者自己证明.

现在讨论用 A_μ, P_μ, l, b 等所表出的电磁场与质点的总动量. 电磁场的动量曾见于§9(9.28)式下面的一个式子. 首先补充这个式子的证明:

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}dV = \frac{1}{4\pi c}\int\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial\boldsymbol{A}/\partial t\right)\times(\nabla\times\boldsymbol{A})dV$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\int\{\varphi\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \frac{1}{c}(\nabla\boldsymbol{A})\cdot(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$$

$$+ \frac{1}{c}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)\cdot\nabla\boldsymbol{A}\}dV$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\int\{\varphi(\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A}) - \frac{1}{c}(\nabla\boldsymbol{A})\cdot\partial\boldsymbol{A}/\partial t$$

$$- [\nabla\cdot(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)]\boldsymbol{A}\}dV$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\int\left\{\varphi\nabla\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \boldsymbol{A}\nabla^2\varphi\right.$$

$$\left. - \frac{1}{c}(\nabla\boldsymbol{A})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\boldsymbol{A}\right\}dV$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\int\boldsymbol{A}\left[-\nabla^2\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]dV$$

$$- \frac{1}{4\pi c^2}\int\left(\nabla\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dV$$

$$=\frac{1}{c}\int \boldsymbol{A}\rho \mathrm{d}V-\frac{1}{4\pi c^2}\int[\nabla \boldsymbol{A}\cdot(\partial \boldsymbol{A}/\partial t)-\nabla\varphi(\partial\varphi/\partial t)]\mathrm{d}V.$$

其次，与质点的动量 $m\dot{\xi}_i$ 相加，得质点与场的总动量

$$m\dot{\xi}_i+(e/c)A_i-\frac{1}{4\pi c^2}\int(\partial A_\mu/\partial x_i)(\partial A_\mu/\partial t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}. \tag{54.31}$$

由§50的理论我们可以保证它的守恒.（利用运动方程来直接证明它的守恒也毫无困难.）(54.31)第一、第二项的和即是质点的 p_i. 第三项用 $A_{\mu k}$，$P_{\mu k}$ 表出成为

$$-\int(\mathrm{d}^3\boldsymbol{k})\mathrm{i}k_iA_{\mu k}P_{\mu k}, \tag{54.32}$$

用 b，l 来表出成为

$$-\int(\mathrm{d}^3\boldsymbol{k})\mathrm{i}k_i\,\frac{1}{2}\{b_{\mu k}l_{\mu k}+b_{\mu,-k}l_{\mu,-k}+\mathrm{i}b_{\mu,-k}l_{\mu k}-\mathrm{i}b_{\mu k}l_{\mu,-k}\}$$

$$=\int(\mathrm{d}^3\boldsymbol{k})k_i(b_{\mu,-k}l_{\mu k}). \tag{54.33}$$

这些式子在本书中没有应用.

在量子力学中，我们通常将总哈密顿量(54.12)的最末一项称为电磁场的能，$c(m^2c^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$ 为质点的能，而将(54.12)中第一、第二两项的和减去 $c(m^2c^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$ 后为作用能.（这个作用能在忽略 $O(A^2)$ 后等于 $-\int L^I\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$，与以前相同.）这显然是不太恰当的；理由是：(54.12)第一项只是质点的能而不可能是其他，第二、第三两项的和只是电磁场的能而不可能是其他. 将第三项认为是电磁场的能量后，便获得了电磁场能量可以取负值的情形（因 A_{4k} 是虚数）. 同样在(54.31)中，量子力学认为第一、第二两项的和是质点动量而第三项是电磁场的动量，但在我们的理论中，第一项是质点的动量，而第二、第三两项的和是电磁场的动量.

在量子力学中，我们通常引入新的变数，使(54.24)（或(54.12)的第三项），(54.33)（或(54.31)的第三项）明显地代表一群自由光子的能量及动量. 但在这样的能量式子中，一部分能量依然是负的. 详细的讨论在本书的范围之外. 但另一方面，在下一节中我们将看到，如果在(54.12)式中适当地消去电磁场的纵波，新的纯电磁场的哈密顿函数，一定取正值.

§55　纵场的消除

在量子电动力学中，我们时常在哈密顿函数中消去电磁场的

纵部分,所用的方法是一个切变换①. 所谓消去电磁场的纵部分,实质上即是将电磁场的纵部分表为电荷的坐标的函数. 在经典电动力学的正则方程中,我们也可以消去纵场;这一点的讨论便是本节的目的.

首先让我们回忆一下 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的纵横部分所适合的微分方程. 这便是(9.18)式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-c^{-2}(\partial^2\boldsymbol{A}/\partial t^2)=-(4\pi/c)\boldsymbol{j}^t, \tag{55.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, \tag{55.2}$$

以及

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-c^{-1}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t). \tag{55.3}$$

式中 $\boldsymbol{j}^t$ 乃 $\boldsymbol{j}$ 的横部分,而 φ(即 $-\mathrm{i}A_4$)应该了解为

$$\int[\rho(x'y'z't)/r]\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}',\quad r^2=(x-x')^2+\cdots \tag{55.4}$$

[因为 φ 满足 $\nabla^2\varphi(x,y,z,t)=-4\pi\rho(x,y,z,t)$],因此(55.3)中的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 完全是一个横波与一个质点坐标的函数的和,即是我们所需要的形式. 质点的运动方程依旧,即

$$m\ddot{\xi}_\mu=(e/c)H_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu,$$

$$H_{\mu\nu}=(\partial A_\nu/\partial x_\mu-\partial A_\mu/\partial x_\nu).$$

最后,注意(55.2)可以换为在 $t=0$ 的

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\quad \partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})/\partial t=0.$$

为处理(55.1)起见,不妨引入 $\boldsymbol{j}^t$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的傅里叶展开. 令 $\boldsymbol{e}_{1k},\boldsymbol{e}_{2k}$ 为两个单位矢量,与 $\boldsymbol{k}$ 垂直,那么由于(55.2),$\boldsymbol{A}$ 的展开成为

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int(a_{1k}\boldsymbol{e}_{1k}+a_{2k}\boldsymbol{e}_{2k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}, \tag{55.5}$$

式中 a_{1k},a_{2k} 为标量,是 t 的函数. 同样 $\boldsymbol{j}^t$ 也可以展开为

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int(h_{1k}\boldsymbol{e}_{1k}+h_{2k}\boldsymbol{e}_{2k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}. \tag{55.6}$$

---

① 例如见 А. Соколов 与 Д. Иваненко:《量子场论》§ 25.

选择 $\boldsymbol{e}_{1k},\boldsymbol{e}_{2k}$，使之满足

$$\boldsymbol{e}_{1k}=\boldsymbol{e}_{1,-k},\quad \boldsymbol{e}_{2k}=\boldsymbol{e}_{2,-k}.$$

以(55.5)，(55.6)代入(55.1)，两方乘以 $\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x})$，对 $\boldsymbol{x}$ 积分，再乘以 $\boldsymbol{e}_{1k'}$(或 $\boldsymbol{e}_{2k'}$)，便获得了

$$\begin{aligned}&-k^2a_{1k}-c^{-2}\ddot{a}_{1k}=-(4\pi/c)h_{1k},\\&-k^2a_{2k}-c^{-2}\ddot{a}_{2k}=-(4\pi/c)h_{2k}.\end{aligned}\tag{55.7}$$

在 $\boldsymbol{j}^t$ 等于(55.6)的式子上，两方乘以 $\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x})$，对 $\boldsymbol{x}$ 积分，再乘以 $\boldsymbol{e}_{1k'}$，便获得了

$$h_{1k}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\boldsymbol{j}^t(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_{1k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.$$

因为 $\boldsymbol{j}$ 的纵部分与 $\boldsymbol{e}_{1k}\exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$的乘积的积分等于零(见§9(3)中所证明的“横场与纵场的乘积的空间积分等于零”)，得

$$h_{1k}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_{1k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.$$

以质点的 $\boldsymbol{j}$ 代入，得

$$h_{1k}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{1k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}.$$

同样

$$h_{2k}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{2k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}.$$

(55.7)成为

$$-k^2a_{\alpha k}-c^{-2}\ddot{a}_{\alpha k}=-(4\pi/c)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{\alpha k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\quad(\alpha=1,2).\tag{55.8}$$

不难证明(55.8)及质点的运动方程，都可以由一个适当的哈密顿的正则方程中求出. 当我们有许多质点时，这个总哈密顿量 H^{total} 为

$$\begin{aligned}&\sum c\{m^{(i)2}c^2+(\boldsymbol{p}^{(i)}-e^{(i)}\boldsymbol{A}(\xi^{(i)})/c)^2\}^{1/2}+U_{\text{es}}\\&\quad+\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{2\pi c^2(p_{1k}p_{1,-k}+p_{2k}p_{2,-k})\\&\quad+(8\pi)^{-1}k^2(a_{1k}\,a_{1,-k}+a_{2k}\,a_{2,-k})\};\end{aligned}\tag{55.9}$$

式中(i)代表各个质点的符号，(55.9)中第一项代表各个质点的能量的总和，U_{es}代表静电能

$$\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\int(\rho\rho'/r)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'$$
$$=\frac{1}{2}\sum e^{(i)}e^{(i)}/r^{(ij)}=\sum_{i>j}e^{(i)}e^{(i)}/r^{(ij)}.\tag{55.10}$$

（注意我们在此忽略一个电子的静电自能；这一项是无穷大的.）p_{1k}，p_{2k}代表a_{1k}，a_{2k}的动量. 在(55.9)中我们只有横波的a，p及电子的$\boldsymbol{\xi}^{(i)}$，$\boldsymbol{p}^{(i)}$字样，因而是我们所需要的. 不难验证，这个H的正则方程正是我们所需的运动方程. 对于第一个质点而言，

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i^{(1)}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i^{(1)}}=c\frac{p_i^{(1)}-eA_i(\boldsymbol{\xi}^{(1)})/c}{\{m^{(1)2}c^2+(\boldsymbol{p}^{(1)}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^{(1)})/c)^2\}^{1/2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i^{(1)}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial\xi_i^{(1)}}=-\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}e^{(1)}\left[\sum e^{(j)}\frac{1}{r^{(1j)}}\right]$$
$$-\frac{c[p_k^{(1)}-eA_k(\boldsymbol{\xi}^{(1)})/c]}{\{m^{(1)2}c^2+(\boldsymbol{p}^{(1)}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^{(1)})/c)^2\}^{1/2}}\left(-\frac{e^{(1)}}{c}\right)\frac{\partial A_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}).\tag{55.11}$$

由此可以求出

$$m^{(1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}=e^{(1)}\left\{-\nabla^{(1)}\varphi+\frac{1}{c}\boldsymbol{u}^{(1)}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}^{(1)})-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right\},\tag{55.12}$$

即是我们所欲求的. 同样地讨论其他质点. 对于电磁场而言，

$$\mathrm{d}a_{1k}/\mathrm{d}t=\delta H^{\text{total}}/\delta p_{1k}=4\pi c^2p_{1,-k},$$

$$\mathrm{d}p_{1,-k}/\mathrm{d}t=-\delta H^{\text{total}}/\delta a_{1,-k}$$
$$=-\frac{1}{4\pi}a_{1k}k^2-\sum_i c\frac{[p^{(i)}-eA(\boldsymbol{\xi}^i)/c]_j}{\{m^{(i)2}c^2+(\boldsymbol{p}^{(i)}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^i)/c)^2\}^{1/2}}$$
$$\times\left(-\frac{e^{(i)}}{c}\right)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(e_{1,-k})_j\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{\xi}^{(i)});\tag{55.13}$$

式中$[p^{(i)}-eA(\boldsymbol{\xi}^i)/c]_j$，$(e_{1,-k})_j$代表这些矢量的$j$分量. 在上两式中消去$p_{1,-k}$，便获得了

$$\frac{1}{c^2}\ddot{a}_{1k} = -a_{1k}k^2 + \sum_i \frac{4\pi e^{(i)}}{c}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(\boldsymbol{u}^{(i)}\boldsymbol{e}_{1k})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}),$$

即是我们所需的(55.8).

不难证明,(55.9)即是电磁场与质点的总能.根据§9中的(9.24)去计算电磁场的能,便证明总能应为

$$\sum_i \frac{m^{(i)}c^3}{\{c^2 - \xi_j'^{(i)}\xi_j'^{(i)}\}^{1/2}} + \frac{1}{2}\int \rho\varphi \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int\left\{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}. \tag{55.14}$$

(55.14)的第一、第二两项分别等于(55.9)的第一、第二两项.(55.14)的第三项以(55.5)代入后成为

$$\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{k^2(a_{1k}a_{1,-k} + a_{2k}a_{2,-k}) + \frac{1}{c^2}(\dot{a}_{1k}\dot{a}_{1,-k} + \dot{a}_{2k}\dot{a}_{2,-k})\},$$

以 $4\pi c^2 p_{\alpha,-k}$代替 $\dot{a}_{\alpha k}$,便变成了(55.9)中的第三项.

以上只是说明了用(55.9)作为总哈密顿函数时,总哈密顿量等于总能量,正则方程便成为所需的运动方程,而没有说明(55.9)是如何求得的.在此我们用两个方法求出(55.9).

第一个方法的情形如下:先写出

$$\partial H_{\mu\nu}/\partial x_\mu = -4\pi j_\nu/c,$$

得

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} = -\frac{4\pi}{c}j_i, \tag{55.15}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = -4\pi\rho. \tag{55.16}$$

引入一个规范,使

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0, \tag{55.17}$$

便得了

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho. \tag{55.18}$$

(55.18)是运动方程(55.15),(55.16)在规范(55.17)中的结果.我

们已知由 S_2+S_3' 的变分，可以求得运动方程(55.15)，(55.16)；它们相当于 S_2+S_3' 的最小. 既然(55.17)，(55.18)不损害(55.15)，(55.16)的有效性，我们可以将它们引入 S_2+S_3' 中，再去求变分，变分所得的微分方程，依然相当于 S_2+S_3' 的最大或最小，因而与(55.15)，(55.16)等效. 惟一可能的不同是：新的变分结果是旧的变分结果的一部分，即满足(55.17)一部分. 但(55.15)，(55.16)中的 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}$ 对于规范变换而言是不变的，因此这对于运动方程(55.15)，(55.16)中的规范不变量而言，引入(55.17)不产生实质上的损害.

将(55.17)，(55.18)引入 S_2+S_3'，在力学中相当于以下的情形. 如果

$$\dot{q}_f=\phi(q_1q_2,\cdots,\dot{q}_1\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_{f-1})$$

是(49.1)的解，我们将(49.2)中的 $\dot{q}_f$ 改为 $\phi(q_1q_2,\cdots,\dot{q}_1\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_{f-1})$ 而再应用变分法，这显然是不影响运动方程的.

用了(55.17)，(55.18)后 S_3' 成为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8\pi}\int(E^2-H^2)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t&=\frac{1}{8\pi}\int\{-(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\\
&\quad+\left[-\frac{1}{c}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)-\nabla\varphi\right]^2\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{8\pi}\int\{-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\frac{1}{c^2}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)^2+(\nabla\varphi)^2\\
&\quad+(2/c)(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)\cdot\nabla\varphi\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{8\pi}\int\{+\boldsymbol{A}\cdot\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)^2+(\nabla\varphi)^2\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{8\pi}\int\{-(\partial A_i/\partial x_j)(\partial A_i/\partial x_j)+\frac{1}{c^2}(\partial A_i/\partial t)^2\\
&\quad-\varphi\,\nabla^2\varphi\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{8\pi}\int\left\{-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial A_i}{\partial t}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t. \tag{55.19}$$

将此写为

$$\int\mathrm{d}t\bar{L}^{EH}=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}tL^{EH},$$

再引入(55.5)式,将 $\bar{L}$,L 化为 $a_{\alpha k}$,$\dot{a}_{\alpha k}$ 的函数,再依照分析力学中的标准办法,引入 $a_{\alpha k}$的动量 $p_{\alpha k}$及哈密顿量 H,便获得了(55.9)的结果.注意(55.19)右方最末一项与 S_2 中含有 φ 的一项合为

$$-\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,$$

使得(55.9)中出现 U_{es}一项.质点的 $\sum p_j^{(i)}\xi_j'^{(i)}$ 与 S_2 中含有 $\boldsymbol{A}$ 的一项合成为(55.9)中的第一项.详细计算在此精简.

第二个方法是利用一个切变换,将(54.12)变为(55.9).(注意(54.12)事实上即是(52.25)加上 $c\{m^2c^2+(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}/c)^2\}^{\frac{1}{2}}$.)将(52.5)变为(55.9)的讨论,在此精简.

这样的证明见 Heitler 书①.但书中所写出的计算不够明朗,所以我们在此较详细地叙述.令§54 中的(54.2)换为

$$A_i(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[a_{1k}(\boldsymbol{e}_{1k})_i+a_{2k}(\boldsymbol{e}_{2k})_i+\mathrm{i}a_{3k}(c_{3k})_i]\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}, \tag{55.20}$$

$$A_4(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{i}a_{0k}\exp\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}^{②}, \tag{55.21}$$

式中 $a_{\alpha k}(\alpha=1,2,3,0)$代表四个数字,$\boldsymbol{e}_{1k}$,$\boldsymbol{e}_{2k}$,$\boldsymbol{e}_{3k}$代表三个互相垂直的单位矢量,$(\boldsymbol{e}_{\alpha k})_i$ 为它们的 i 分量,而同时 $\boldsymbol{e}_{3k}$定义为

---

① W.Heitler:《辐射的量子论》,第三版,§6.

② a_{3k},a_{0k}前的 i 字样的引入,乃是为了使

$$a_{3k}=(a_{3,-k})^*,\quad a_{0k}=(a_{0,-k})^*.$$

(55.20)中对于1,2,3的不对称性,乃是由于我们所选择的 $\boldsymbol{e}_{1k}$,$\boldsymbol{e}_{2k}$,$\boldsymbol{e}_{3k}$满足

$$\boldsymbol{e}_{1k}=\boldsymbol{e}_{1,-k},\quad \boldsymbol{e}_{2k}=\boldsymbol{e}_{2,-k},\quad \boldsymbol{e}_{3k}=-\boldsymbol{e}_{3,-k}.$$

$$e_{3k} = k/k \quad (k \equiv |k|). \tag{55.22}$$

(注意由定义 $e_{3k}=-e_{3,-k}$，与 e_{1k}，e_{2k}所适合的 $e_{1k}=e_{1,-k}$，$e_{2k}=e_{2,-k}$不同.)重复§54中的理论，但用 $a_{\alpha k}$，$\dot{a}_{\alpha k}$，($\alpha=1,2,3,0$)作为电磁场的变数，获得了总哈密顿量

$$\begin{aligned}
&\sum c\{m^{(i)2}c^2 + (p^{(i)} - eA(\xi^i)/c)^2\}^{1/2} \\
&\quad + \sum_i \int d^3k (2\pi)^{-3/2} e^{(i)} a_{0k} \exp(ik \cdot \xi^{(i)}) \\
&\quad + \sum_{1,2,3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \{2\pi c^2 p_{\alpha k} p_{\alpha,-k} + (8\pi)^{-1} k^2 a_{\alpha k} a_{\alpha,-k}\} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \{2\pi c^2 p_{0k} p_{0,-k} + (8\pi)^{-1} k^2 a_{0k} a_{0,-k}\}.
\end{aligned} \tag{55.23}$$

在实质上，上式即是(54.12). 后两项的不同符号的来源是由于 e_{1k}，e_{2k}，e_{3k}与 $e_{1,-k}$，$e_{2,-k}$，$e_{3,-k}$中不同的关系，及(55.20)，(55.21)右方的"i"字样. 起始条件(54.19)成为

$$\begin{gathered}
ka_{3k} + 4\pi c p_{0,-k} = 0, \\
4\pi c k p_{3,-k} + k^2 a_{0k} - 4\pi (2\pi)^{-3/2} \sum e^{(i)} \exp(-ik \cdot \xi^{(i)}) = 0.
\end{gathered} \tag{55.24}$$

在这里，我们只讨论满足起始条件(55.24)的运动，亦即始终满足(55.24)的运动.

令

$$\Omega_k = \left\{ k a_{0k} - 4\pi k^{-1} (2\pi)^{-3/2} \sum e^{(i)} \exp(-ik \cdot \xi^{(i)}) \right\} a_{3,-k}; \tag{55.25}$$

显然，

$$\begin{aligned}
d\Omega_k &= \{k a_{0k} - \cdots\} da_{3,-k} + a_{3,-k} k da_{0k} \\
&\quad - a_{3,-k} 4\pi k^{-1} (2\pi)^{-3/2} \sum_i e^{(i)} \exp(-ik \cdot \xi^{(i)}) (-i) k \cdot d\xi^{(i)} \\
&= -4\pi c p_{3,-k} da_{3,-k} - 4\pi c p_{0k} da_{0k} \\
&\quad - 4\pi i (2\pi)^{-3/2} \sum_i e^{(i)} a_{3,-k} \exp(-ik \cdot \xi^{(i)}) (-k/k) \cdot d\xi^{(i)},
\end{aligned} \tag{55.26}$$

因此令 $\Omega=\left(\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\Omega_k\right)\dfrac{1}{4\pi c}$,得

$$\mathrm{d}\Omega=-\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{p_{3k}\mathrm{d}a_{3k}+p_{0k}\mathrm{d}a_{0k}\}-\sum(e^{(i)}/c)\boldsymbol{A}^{\mathrm{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}^{(i)},\tag{55.27}$$

式中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{long}}$代表 $\boldsymbol{A}$ 的纵部分. $\mathrm{d}\Omega$ 可以由起始条件的变化而来,也可以由时间的变化而来. 对于前一种变化,得

$$\delta\Omega=-\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{p_{3k}\delta a_{3k}+p_{0k}\delta a_{0k}\}-\sum(e^{(i)}/c)\boldsymbol{A}^{\mathrm{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})\cdot\delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}\tag{55.28}$$

(注意起始条件在变化时始终满足(55.24)式). 对于后一种变化得

$$\dot{\Omega}=-\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{p_{3k}\dot{a}_{3k}+p_{0k}\dot{a}_{0k}\}-\sum(e^{(i)}/c)\boldsymbol{A}^{\mathrm{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})\cdot\boldsymbol{\xi}^{(i)\prime}.\tag{55.29}$$

在(55.28)上取对时间的变化,在(55.29)上取对起始情形的变化,相减,得

$$\begin{aligned}&-\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{\dot{p}_{3k}\delta a_{3k}-\delta p_{3k}\dot{a}_{3k}+\dot{p}_{0k}\delta a_{0k}-\delta p_{0k}\dot{a}_{0k}\}\\&-\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{e^{(i)}}{c}\boldsymbol{A}^{\mathrm{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})\right]\delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}\\&+\sum_i\left[\delta\frac{e^{(i)}}{c}\boldsymbol{A}^{\mathrm{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})\right]\boldsymbol{\xi}^{(i)\prime}=0.\end{aligned}\tag{55.30}$$

现在讨论哈密顿量(55.23)对起始条件的变化. 我们得

$$\begin{aligned}\delta H&=\sum\frac{\partial H}{\partial\xi_j^{(i)}}\delta\xi_j^{(i)}+\sum\frac{\partial H}{\partial p_j^{(i)}}\delta p_j^{(i)}\\&\quad+\sum_\alpha\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\left\{\frac{\delta H}{\delta a_{\alpha k}}\delta a_{\alpha k}+\frac{\delta H}{\delta p_{\alpha k}}\delta p_{\alpha k}\right\}\\&=-\sum\frac{\mathrm{d}p_j^{(i)}}{\mathrm{d}t}\delta\xi_j^{(i)}+\sum\frac{\mathrm{d}\xi_j^{(i)}}{\mathrm{d}t}\delta p_j^{(i)}\\&\quad+\sum_\alpha\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\left\{-\frac{\mathrm{d}p_{\alpha k}}{\mathrm{d}t}\delta a_{\alpha k}+\frac{\mathrm{d}a_{\alpha k}}{\mathrm{d}t}\delta p_{\alpha k}\right\}.\end{aligned}\tag{55.31}$$

由此减去(55.30),得

$$\delta H = \sum_i \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_j^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c} A_j^{\mathrm{long}}(\xi^i) \right) \right] \delta\xi_j^{(i)}$$

$$+ \sum_i \frac{\mathrm{d}\xi_j^{(i)}}{\mathrm{d}t} \delta\left(p_j^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c} A_j^{\mathrm{long}}(\xi^i) \right)$$

$$+ \sum_{\alpha=1,2} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \left\{ -\frac{\mathrm{d}p_{\alpha k}}{\mathrm{d}t} \delta a_{\alpha k} + \frac{\mathrm{d}a_{\alpha k}}{\mathrm{d}t} \delta p_{\alpha k} \right\}. \tag{55.32}$$

注意在(55.31)的末一项中对 α 取和时，$\alpha=1,2,3,0$，而在(55.32)末一项中对 α 取和时，$\alpha=1,2$. 引入

$$\boldsymbol{p}^{(i)*} = \boldsymbol{p}^{(i)} - (e^{(i)}/c)\boldsymbol{A}^{\mathrm{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}), \tag{55.33}$$

便证明了 H 只是 $\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{p}^{(i)*}, a_{1k}, a_{2k}, p_{1k}, p_{2k}$ 的函数. 因为在(55.24)条件下这些依然可以认为是独立的，我们得

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)p_j^{(i)*} = -\,\partial H/\partial\xi_j^{(i)},$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\xi_j^{(i)} = \partial H/\partial p_j^{(i)*},$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)p_{\alpha k} = -\,\delta H/\delta a_{\alpha k},$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)a_{\alpha k} = \delta H/\delta p_{\alpha k} \quad (\alpha = 1,2). \tag{55.34}$$

以上证明了 $a_{\alpha k}, p_{\alpha k}(\alpha=1,2), \boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{p}^{(i)*}$ 等满足正则方程，而新的哈密顿量乃是一个 $a_{\alpha k}, p_{\alpha k}(\alpha=1,2), \boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{p}^{(i)*}$ 的函数，由利用(55.24)简化(55.23)而获得. 我们最后一步工作，即利用(55.24)将(55.23)化为(55.9).

首先，(55.23)第一项可以表为

$$\sum c\{m^{(i)2}c^2 + [\boldsymbol{p}^{(i)*} - e\boldsymbol{A}^{\mathrm{tran}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})/c]^2\}^{1/2}$$

($\boldsymbol{A}^{\mathrm{tran}}$代表 $\boldsymbol{A}$ 的横部分)，即是我们所需的. 其次，(55.23)第三项关于 $\alpha=1,2$ 的部分可以保留. 问题只是在证明第二项、第三项中 $\alpha=3$ 的一部分，及与第四项的和等于(55.9)中的 U_{es}. 自(55.24)中求出 p_{0k}, p_{3k}，代入第四项，与第二项合并后，成为

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\, \frac{1}{k^2} \sum_{i\neq j} e^{(i)}e^{(j)} \exp \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(i)} - \boldsymbol{\xi}^{(j)}). \tag{55.35}$$

不难证明这一项即是 U_{es}. 因为

$$\rho = \sum e^{(j)}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(j)}) = \sum \frac{e^{(j)}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\exp \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(j)}),$$

又因 $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$，得

$$\varphi=-4\pi\sum \frac{e^{(j)}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\left(-\frac{1}{k^2}\right)\exp \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(j)}).$$

(因为右方乘以 ∇^2 即等于在积分号中乘以 $-k^2$，因此成为 $-4\pi\rho$.)因此

$$\int \frac{1}{2}\rho\varphi\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\sum e^{(i)}\varphi(\boldsymbol{\xi}^{(i)})$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum e^{(i)}e^{(j)}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{k^2}\exp \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(i)}-\boldsymbol{\xi}^{(j)}),$$

(55.36)

即是我们所需的式子. 这个证明带有一些“形式”的性质，因为(55.35)中含有 $i=j$ 的一项，而这一项在积分后成为无穷大.

这里的证明似乎不像切变换，但实际上可以认为是一个稍改样的切变换.

以上的理论说明了电磁场的运动方程，无论是否消去纵波，都满足正则方程. 这样，使理论量子化便有了可能. 事实上，我们还可以讨论哈密顿-雅可比(Jacobi)的偏微分方程，而证明它的一个解正是拉格朗日量沿运动过程的积分. 同时我们还可以求得量子力学波函数在普朗克常数趋近于零时与雅可比函数的关系. 这些情形，正同一个质点在一个势场中运动一样. 由于本书的范围，这些问题将不在此讨论.

最后可以附带地指出：消去纵波并不意味着使理论丧失了相对论性. 理由是这样的：所谓相对论性，乃是我们能否自某一个系统的运动方程，转变为另一个系统的同样方程. 现在，自 O 系统消去纵波后的变数 $M_1, M_2, \cdots$ 可以变换到在 O 系统中消去纵波前的变数 $N_1, N_2, \cdots$，由 $N_1, N_2, \cdots$ 可以变换到在 O' 系统中消去纵波前的变数 $N_1', N_2', \cdots$，再由 $N_1', N_2', \cdots$ 变换至在 O' 系统中消去纵波后的变数 $M_1', M_2', \cdots$，构成了自 $M_1, M_2, \cdots$ 变至 $M_1', M_2', \cdots$ 的变换.

这个变换显然不改变运动方程的形式.因此消去纵波而获得的运动方程,是合乎相对论条件的.但另一方面必须指出:$M_1,M_2,\cdots$中的$\xi,\boldsymbol{p},U_{es},\cdots$并不一定分别地变为$M_1',M_2',\cdots$中的$\xi,\boldsymbol{p},U_{es}$,等等.最突出的是:$M$中的$U_{es}$并不变为$M'$中的$U_{es}$.就这个意义而言,我们可以说,"库仑能"没有"相对论性".

在下一部中,我们讨论经典电动力学的困难,并讨论一些近代的电子理论.

第三部　近代的电子理论及电子的一些运动示例

第九章　近代的电子理论

§56　电子论的困难

第八章中的理论极易给人们一个感觉，即点电荷及电磁场的理论是很完整的，但这仅是一个错觉．理由是：在电子的运动方程

$$m\ddot{\xi}_\mu = (e/c)H_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu \tag{56.1}$$

的右方，我们没有讨论 $H_{\mu\nu}$应否包含电子本身所产生的电磁场．如果要包含进去，那么由于点电荷本身所产生的电磁场在电荷所在处是奇异的（即成为无穷大而且方向不确定），(56.1)式的右方便没有意义，因此运动方程也没有意义．如果我们忽略点电荷本身所产生的电磁场，将在(56.1)右方的 $H_{\mu\nu}$了解为外界所产生的电磁场，那么当电子的速度极小时，(56.1)式化为牛顿运动方程式

$$m\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{F}. \tag{56.2}$$

点电荷的自作用力无法计算．在§27 中我们曾讨论一个有大小的电子在速度极小时的自作用力．那里的运动方程(27.12)取以下的形式：

$$m\dot{\boldsymbol{u}} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{u}} + \cdots = \boldsymbol{F} \tag{56.3}$$

（$\boldsymbol{F}$ 代表外界电磁场所构成的洛伦兹力）．设想电子的半径趋于零，可以把这个方程用于瞬时速度为零的点电荷．上式与(56.2)式不同，其左方第二项及以后的项代表电子的自作用力．因此完全忽略(56.1)右方的自作用力是不正确的．我们还在此指出，§3 的守恒定律也是在“自作用力”存在的情形下生效的，因此为了守恒定律的成立，我们也不能完全抛弃自作用力．

在近代的理论中，绝大部分理论都将电子假想为点电荷．在这

一章以下诸节中,我们也如此地去想像电子.在把电子认为是质点之前,让我们看一下将电子认为有大小的理论有什么困难.

如果将电子认为是一个有大小的物体,那么,最主要的问题便是我们不能了解:为什么电子的各部分不由于它们的互相排斥而分裂?为了保持电子的不分裂,必须引入其他的力场,使电子各部分凝固而不分裂.这样的思想,见之于 Poincaré 的工作①.但他没有具体地说明这个力是怎样的,同时我们也不易想像一个力场,能够始终使一个电子不分裂,而同时不完全地与电磁场抵消,使得两个不同的电荷间的力,基本上不受到这个外加的力场的影响.

这样的理论,即使有部分的成功,也是不切实际的,因为用这个理论去讨论一个电子的运动时,必须将后者认为是一个弹性体,因而不可避免地遇到了极复杂的计算.

另一个办法是假定电子各部分的运动,实际上只由几个少数的变数的变化而决定,例如 § 26 中的阿伯拉汉姆电子,及依照电子中心速度而收缩的洛伦兹电子.在这样的理论中,如果我们假定电子的任何一部分在某时刻的运动,不仅依赖于该部分所在处的电磁场,该部分的本身的性质(例如大小,速度等),而也直接地依赖于其他部分在同时刻的速度、电磁场等,那么理论便包含了“超距作用”的精神,因而是不能接受的.这样的理论在实质上建筑在“同时性的绝对性”上(即两件事的是否为“同时”是与观察者的选择无关的),而在相对论中,“同时性”是相对的,因此它不可能符合相对论②.如果我们假定电子的任何一部分在某时刻的运动,不仅依赖于其他部分在同时刻的运动状况,而也依赖于其他部分(例如电子中心)在各个不同时刻下的运动状况,这样的理论是可以建立

---

① H. Poincaré, *Rend. Pal.* **21**(1906)129.他证明了这个力场与电磁场所合并的能量、动量张量 $T_{\mu\nu}$的 $T_{\mu4}$分量,对空间积分后成一矢量.

② 一个更详尽的讨论见 Л.Д. Ландау 与 Е.М. Лифшиц 著《经典场论》第二章 § 2.1.此外可以参阅 J. Frenkel, *Zeits. f. Phys.* **32**(1925)518.

的，而也是符合于相对论的①. 在已建立的这样的理论中，电子的各部分在任一时刻下的运动，仅与电子中心的运动过程有关，而与在该时刻在该部分上的电磁场无关，似乎不能令人满意.

以上的困难使我们放弃将电子认为有大小的假定，转而讨论电子为质点的情形，让我们先讨论无外界力的情形. 第一步是将(56.1)改为

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_2} m\ddot{\xi}_\mu \mathrm{d}s &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{e}{c} H_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu \mathrm{d}s \\ &= \int c^{-1} H_{\mu\nu} j_\nu \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}c}\int (\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu)\mathrm{d}^4V \quad (\mathrm{d}^4V = \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_4) \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}c}\int T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu, \qquad (56.4)\end{aligned}$$

式中 s_1, s_2 为电子的固有时，相当于电子的世界线与(56.4)右方面积分中的面的相交处的 s. 如果有外界电磁场 H''，我们只消将(56.4)右方的 $T_{\mu\nu}$，了解为电子场和外界场所合成的总场的 $T_{\mu\nu}$，而结果往往等于在原来的(56.4)右方加上 $(e/c)H''_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu$ 的积分. 为使讨论简单化起见，我们往往只讨论无外界电磁场的情形.

自(56.1)变至(56.4)，在数学上讲来是不严格的. 但我们依旧这样去做，希望(56.4)能够给我们一个有意义的式子. 但在没有真正的新理论前(即不同于第五章的理论)，这样的希望必然是落空的. 事实上，在§26中我们曾指出点电荷的电磁场动量、能量都是无穷大，由此不难看出(56.4)右方是不收敛的.

有两种办法可解除以上的困难. 一个是改变电磁场所适合的微分方程，例如玻恩(Born)的非线性方程(见§59)，又例如含有高次偏微分的场方程(见§60)等. 另一个方法是先确定了(56.4)

① Mac Manus, *Proc. Roy. Soc* **A195**(1948)323 及 Lande, Bohm 等在 1949, 1950 的 *Phy. Rev.* 中的论文.

右方面积分中的面(为了避免(56.4)对于不同面可能取不同值而引起的困难),同时将(56.4)的左方改为

$$\int_{s_1}^{s_2}(\mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}s)\mathrm{d}s, \quad p_\mu = f(\dot{\xi}, \ddot{\xi}, \cdots), \tag{56.5}$$

而选择适当的 p_μ,使新的(56.4)不再含有奇异性质的项.这便是狄拉克(Dirac)所用的方法(见§58).这个方法也称为"减除法",因为它在实质上等于在(56.4)右方中把不收敛的项减去.为了解这个理论起见,必须详细地阅读以下的§58.

在前一种办法中,我们当然希望能如此地改变场方程,使电子的自作用力取一个"有意义"而不是"奇异"的值.但要达到这一点是困难的.所以我们依旧回到(56.4)式,亦即

$$\int_{s_1}^{s_2} m\ddot{\xi}_\mu \mathrm{d}s = \frac{1}{\mathrm{i}c}\int_S T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu, \tag{56.6}$$

式中 S 为某一个面,与电子世界线交于两点,相当于电子在固有时 s_1, s_2 的所在处.(可以指出:将自作用力的线积分转换为 $T_{\mu\nu}$ 的面积分,在这些新理论中情形正与未改变场方程前的情形完全相同.)显然,在改变场方程后,我们希望

(i) (56.6)右方不再是无穷大;

(ii) (56.6)能够给我们一个合乎相对论的电子运动方程;

(iii) (56.6)右方的值对于不同的 S 面取同样的值①.(因为如果(56.6)右方的值与所选择的 S 面有关,那么我们必须明确地规定 S 是什么面.)让我们看在条件(i),(ii),(iii)下(56.6)右方应具有什么性质.

令 O' 为某一个系统,令它的 x'_μ 与(56.6)中计算 $\xi_\mu, T_{\mu\nu}$ 等所用的系统 O 的 x 有以下的关系,

$$x_\mu = a'_{\mu\nu}x'_\nu. \tag{56.7}$$

---

① 因(56.6)右方面积分的积分项有奇异点,(56.6)右方对不同面取不同值是完全可能的.

令 $s_2 \gg s_1$. 又假定在 s_1 附近的一大段 s 中，在 s_2 附近的一大段 s 中，$\ddot{\xi}$ 都几乎等于零. 令(56.6)的 S 为 $t'=$常数 c_2' 面，$t'=$常数 c_1' 面，及在无穷远处的面所组成. 注意前两个面分别地包含了 $\xi_\mu(s_2)$，$\xi_\mu(s_1)$，在这样的情形下，(56.6)右方成为三部分的和：

$$\frac{1}{\mathrm{i}c}\left(\int_{t'=c_2'}+\int_{t'=c_1'}+\int_{x'\to\infty}T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu\right), \tag{56.8}$$

而式中第一项几乎成为以常速度 $\dot{\xi}(s_2)$运动的电子的电磁场所构成的 $T_{\mu\nu}$的面积分. 称 $\hat{T}_{\mu\nu}$为以常速度 $\dot{\xi}$ 运动的电子的电磁场的 $T_{\mu\nu}$，(56.8)第一项便成为

$$(\mathrm{i}c)^{-1}\int_{t'=c_2'}\hat{T}_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu, \tag{56.9}$$

亦即

$$(\mathrm{i}c)^{-1}a'_{\mu\nu}\int_{t'=c_2'}\hat{T}'_{\nu4}\mathrm{d}S'_4 \quad (\mathrm{d}S'_4=\mathrm{d}x'_1\mathrm{d}x'_2\mathrm{d}x'_3). \tag{56.10}$$

由条件(iii)，知对于不同系统 O'，O''，我们应该有

$$(\mathrm{i}c)^{-1}a'_{\mu\nu}\int_{t'=c_2'}\hat{T}'_{\nu4}\mathrm{d}S'_4=(\mathrm{i}c)^{-1}a''_{\mu\rho}\int_{t''=c_2''}\hat{T}''_{\rho4}\mathrm{d}S''_4, \tag{56.11}$$

亦即

$$\int_{t'=c_2'}\hat{T}'_{\nu4}\mathrm{d}S'_4=a'_{\mu\nu}a''_{\mu\rho}\int_{t''=c_2''}\hat{T}''_{\rho4}\mathrm{d}S''_4, \tag{56.12}$$

亦即通过电子 $\xi(s_2)$的各个面上的积分

$$\int\hat{T}'_{\nu4}\mathrm{d}S'_4 \tag{56.13}$$

的变换性质，正如一个矢量. 当然，由于条件(i)，(56.13)首先必须是收敛的.

当(56.13)构成一个矢量时，(56.6)便给我们一个合乎相对论的运动方式. 讨论在系统 O' 中的(56.6)时，我们令 S 为 $t'=c_1'$，$t'=c_2'$ 等面，得

$$\int_{s_1}^{s_2}m\ddot{\xi}'_\mu\mathrm{d}s=\frac{1}{\mathrm{i}c}\left\{\int_{t'=c_2'}\hat{T}'_{\mu4}\mathrm{d}S'_4+\int_{t'=c_1'}\hat{T}'_{\mu4}\mathrm{d}S'_4+\cdots\right\}, \tag{56.14}$$

讨论在系统 O'' 的 (56.6) 时,我们令 S 为 $t''=c_1''$,$t''=c_2''$ 等面,获得了类似的式子. 这些式子,在(56.13)为矢量的情形下,至少对于写出的项而言,是合乎相对论的. 为获得与寻常的运动方程相似的运动方程起见,只消对 s_2 微分,这样获得的式子,至少对于写出的项而言,是合乎相对论的. 这便是我们希望(iii)成立的理由. 在下面的两个如此的理论中,(56.13)的收敛及矢量性质都是满足的. 这是令人满意的. 但另一方面,在这些理论中,我们还没有完全地计算出(56.6)的右方,因而没有算出相当于辐射阻尼的项(即相当于 $(2/3)(e^2/c^3)\ddot{\boldsymbol{u}}$ 的项). 这个计算本来是重要的,但下面的 §57 将证明合乎相对论要求而同时在 $\boldsymbol{u}$ 取小值时成为(56.3)的运动微分方程基本上只有一个,因此这些计算便没有很多必要了!

有一个一般性的理论,讨论在什么情形下(56.13)构成一个矢量. 现在补充如下.

令电子在 O 系统中以始终不变的速度 $\boldsymbol{u}$ 沿 x 轴运动. 令 O^0 为电子的静止系统. O,O^0 系统中的 x,x^0 有以下的关系:

$$\begin{cases} x_1^0 = (1-\beta^2)^{-1/2}(x_1 + \mathrm{i}\beta x_4), & x_2^0 = x_2, \\ x_4^0 = (1-\beta^2)^{-1/2}(x_4 - \mathrm{i}\beta x_1), & x_3^0 = x_3; \end{cases} \tag{56.15}$$

$\hat{T}$,$\hat{T}^0$ 中有以下的关系:

$$\begin{cases} \hat{T}_{14} = -\mathrm{i}\beta(1-\beta^2)^{-1}(\hat{T}_{44}^0 - \hat{T}_{11}^0), \\ \hat{T}_{44} = (1-\beta^2)^{-1}(\hat{T}_{44}^0 - \hat{T}_{11}^0\beta^2), \cdots. \end{cases} \tag{56.16}$$

讨论在 $t=c$ 上的面积分

$$\int \hat{T}_{14}\mathrm{d}S_4, \quad \int \hat{T}_{44}\mathrm{d}S_4 \quad (\mathrm{d}S_4 = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3). \tag{56.17}$$

为明确起见,先讨论第一个积分. 在图 35 中,我们画出 $t=c$ 及 $t^0=c^0$ 面. 依照积分定义,$\hat{T}_{14}$在 $t=c$ 面上的积分应该等于面上许多小块 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ 乘上该处的 $\hat{T}_{14}$后的取和. 但 B 点的 $\hat{T}_{14}$等于 B 点的

$$-\mathrm{i}\beta(1-\beta^2)^{-1}(\hat{T}_{44}^0 - \hat{T}_{11}^0), \tag{56.18}$$

亦即是 D 点的

$$-\mathrm{i}\beta(1-\beta^2)^{-1}(\hat{T}_{44}^0 - \hat{T}_{11}^0). \tag{56.19}$$

另一方面，作 B 点处的面元 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ 在 $t^0=c^0$ 面上的投影 dd'，dd' 由 O^0 看来占了一个面 $\mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{d}x_2^0\,\mathrm{d}x_3^0$，等于

$$(1-\beta^2)^{-1/2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \qquad (56.20)$$

（注意 $bb':dd'=(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$，即是斐兹杰惹收缩），因此

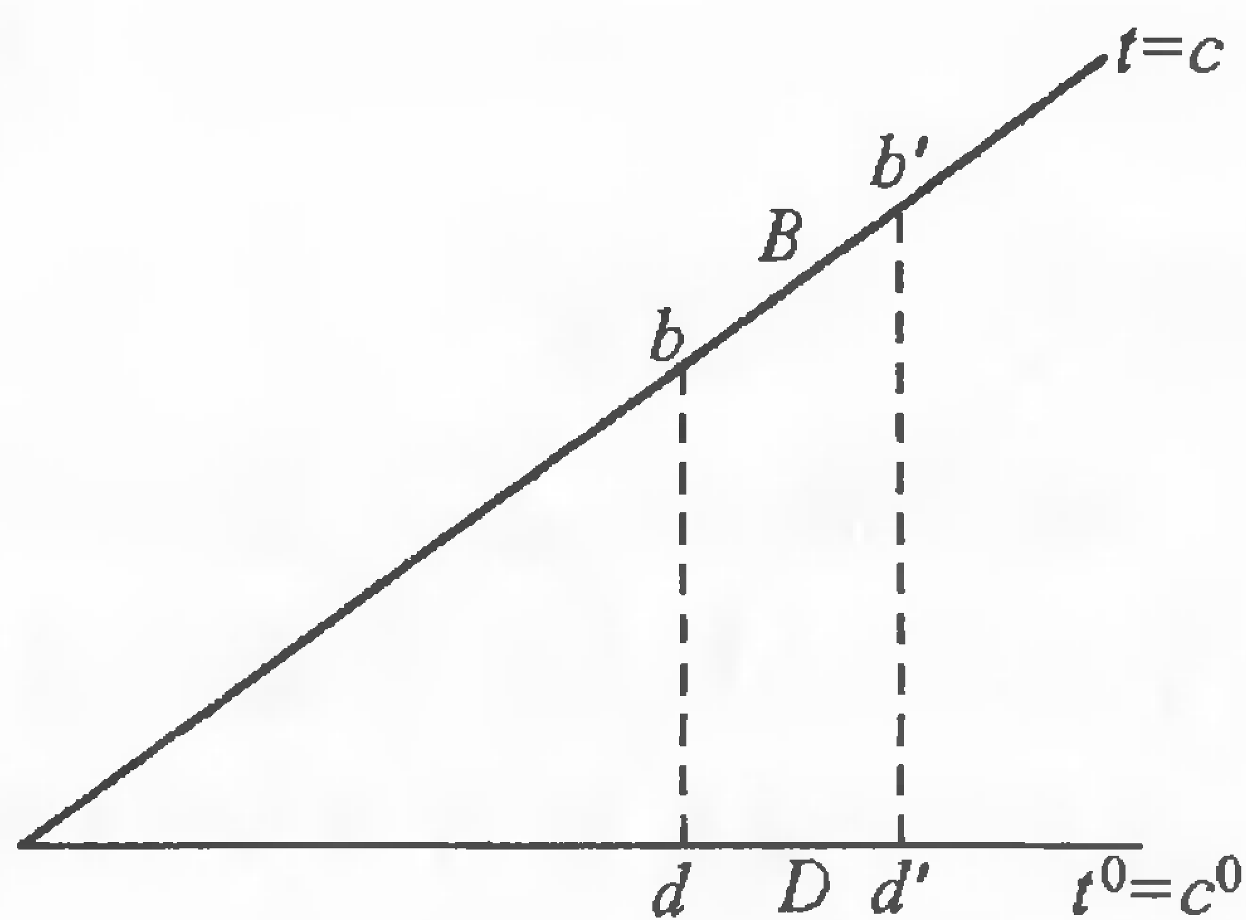


图　35

$$\int_{t=c}\hat{T}_{14}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=-\mathrm{i}\beta(1-\beta^2)^{-1}$$
$$\times\int_{t^0=c^0}(\hat{T}^0_{44}-\hat{T}^0_{11})(1-\beta^2)^{1/2}\mathrm{d}x_1^0\mathrm{d}x_2^0\mathrm{d}x_3^0.$$

同样

$$\int_{t=c}\hat{T}_{14}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=(1-\beta^2)^{-1}$$
$$\times\int_{t^0=c^0}(\hat{T}^0_{44}-\hat{T}^0_{11}\beta^2)(1-\beta^2)^{1/2}\mathrm{d}x_1^0\mathrm{d}x_2^0\mathrm{d}x_3^0.$$

因此如果

$$\int\hat{T}^0_{11}\,\mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{d}x_2^0\,\mathrm{d}x_3^0=0, \qquad (56.21)$$

我们获得

$$\begin{cases}\displaystyle\int\hat{T}_{14}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=-\mathrm{i}\beta(1-\beta^2)^{1/2}\int\hat{T}^0_{44}\,\mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{d}x_2^0\mathrm{d}x_3^0,\\ \displaystyle\int\hat{T}_{44}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=(1-\beta^2)^{1/2}\int\hat{T}^0_{44}\,\mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{d}x_2^0\,\mathrm{d}x_3^0;\end{cases}$$

$$(56.22)$$

亦即是 $\int\hat{T}\mathrm{d}S_4$，$\int\hat{T}^0\mathrm{d}S_4^0$ 中的关系，正如一个矢量在各系统中的分量. 一般讲来，如果

$$\int\hat{T}^0_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{d}x_2^0\,\mathrm{d}x_3^0=0,\quad(\mu=\nu=4\text{ 的情形例外})$$

$$(56.23)$$

那么

$$\int_{t=c} \hat{T}_{\mu 4} \mathrm{d}S_4 \tag{56.24}$$

便构成一个矢量①.

必须指出：这个证明只在 $\dot{\xi}$ 始终不变时有效.在这个情形下，电子在某一个系统中是始终静止的，因而可以比较这个系统中的 $T_{\mu\nu}$ 在同一地点而在不同时刻的值.当电子速度可以有变化时，两个不同面上的 T 是难以比较的.

在以下讨论有关问题的几节中(§59，§60)，我们将证明(56.21)，(56.23)式，由之而证明了(56.24)是一个矢量.

§57 狄拉克的电子运动方程

在下一节中，我们将看到狄拉克如何导出了他的电子运动方程

$$m\ddot{\xi}_\mu - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}(\dddot{\xi}_\mu c^2 - \dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\nu \ddot{\xi}_\nu) = \frac{e}{c} H''_{\mu\nu} \dot{\xi}_\nu, \tag{57.1}$$

式中 $H''_{\mu\nu}$ 代表外界所产生的 $H_{\mu\nu}$.不难证明，(57.1)的前三个分式即是§27中的(27.13)或(27.16).而(57.1)的第四个式子乃是(27.17).

在这里我们可以证明：如果要求电子运动方程为微分方程，在 $\boldsymbol{u}$ 取小值时成为(56.3)，而同时又要求满足相对论要求，那么(57.1)几乎是惟一的运动方程.证明如下.由于相对论的要求，这样的电子运动方程左方必然是

$$m\ddot{\xi}_\mu,\quad \dddot{\xi}_\mu,\quad \dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\nu \ddot{\xi}_\nu,\quad \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu \dddot{\xi}_\nu,\quad \ddot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu \ddot{\xi}_\nu,\quad \cdots \tag{57.2}$$

等等的线性组合.但由于

$$\begin{cases} \dot{\xi}_\nu \dot{\xi}_\nu = -c^2, \quad \dot{\xi}_\nu \ddot{\xi}_\nu = 0, \\ \ddot{\xi}_\nu \ddot{\xi}_\nu = -\dot{\xi}_\nu \dddot{\xi}_\nu, \end{cases} \tag{57.3}$$

① 这一段讨论即是寻常所谓“自身张力”的讨论.

等等，因此如果在(57.2)中我们不要 $\ddddot{\xi}$，也不要 ξ 的乘积中 ξ 等上面的点子总数多于五个，那么(57.2)中只有

$$\ddot{\xi}_\mu,\quad \dddot{\xi}_\mu,\quad \dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu,\quad \dot{\xi}_\mu$$

四个是独立的. 令运动方程的右方不变，便获得了

$$m\ddot{\xi}_\mu + c_0\dot{\xi}_\mu + c_1\dddot{\xi}_\mu + c_2\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu = (e/c)H_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu, \tag{57.4}$$

式中 c_0, c_1, c_2 为三个常数. 如果当 $\boldsymbol{u}$ 取小值时上式趋近于(56.3)，得

$$c_0 = 0,\quad c_1 = -(2/3)(e^2/c^3). \tag{57.5}$$

以此代入(57.4)，再在(57.4)左右二方乘以 $\dot{\xi}_\mu$，获得

$$c_1\dot{\xi}_\mu\dddot{\xi}_\mu + c_2(-c^2)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu = 0,$$

利用(57.3)中最末一式，得

$$c_2 = -c^{-2}c_1 = +(2/3)(e^2/c^5). \tag{57.6}$$

以这样的 c_0, c_1, c_2 代入(57.4)，便获得了(57.1).

因此如果不改变对电子运动方程的要求，而同时不要 $\ddddot{\xi}$ 项，那么(57.1)是惟一的运动方程. 如果允许 $\ddddot{\xi}_\mu$ 及含有六个点的 ξ 的乘积，那么(57.1)的左方还可以有

$$c_3\ddddot{\xi}_\mu + c_4\ddot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu + \cdots \tag{57.7}$$

等项. 必须指出，c_3 的量纲比 c_1 的量纲多一个因子 t，c_4 的量纲比 c_2 的量纲多一个因子 t. 因此 $(c_3/c_1)c$，$(c_4/c_2)c$ 必然是一个长度. 换句话说，要引入(57.7)项，必须引入一个“基本长度”.

当电子以频率 ω 振动着，(57.1)左方第二项与第一项的大小的比例可以粗糙地估计为

$$(e^2/c^3m)\omega, \tag{57.8}$$

但 e^2/mc^2 与电子的经典半径 r_0(见(26.21)下的式子)的数量同级，因此如果称 λ 为 $c\omega^{-1}$，上式成为

$$r_0/\lambda.$$

(57.7)中第一项与(57.1)第二项的大小的比例，可以粗糙地估计

为

$$(c_3/c_1)\omega = \frac{(c_3c/c_1)}{(c/\omega)} = \frac{(c_3c/c_1)}{\lambda}, \tag{57.9}$$

亦即是以上所谈的基本长度与波长 λ 的比. 在目前的经典理论中，我们尚不能肯定地估计(57.9)的大小，从而判断是否必须引入这个新的基本长度①. 如果令它与 r_0 同级，(57.9)成为 (r_0/λ)，(57.7)第一项与(57.1)第一项的比例成为 $(r_0/\lambda)^2$.

让我们讨论(57.1)在简单情形下的解，由此来判断它是否是一个合适的运动方程. 讨论在直线上的运动. 令外界只给予一个电场，方向沿此直线. 令此直线为 x 轴，那时(57.1)成为

$$m\ddot{\xi} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left[\dddot{\xi} - \frac{1}{c^2}\dot{\xi}\,(\ddot{\xi}^2 - c^2\ddot{\tau}^2)\right] = e\dot{\tau}E, \tag{57.10}$$

$$m\ddot{\tau} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left[\dddot{\tau} - \frac{1}{c^2}\dot{\tau}\,(\ddot{\xi}^2 - c^2\ddot{\tau}^2)\right] = e\dot{\xi}E\frac{1}{c^2}, \tag{57.11}$$

式中 ξ 代表 ξ_1，τ 代表电子的时间坐标，E 为外界电场. 因

$$c^2\dot{\tau}^2 - \dot{\xi}^2 = c^2,$$

我们可以令

$$c\dot{\tau} = c\cosh q, \quad \dot{\xi} = c\sinh q, \tag{57.12}$$

代入(57.10)，得

$$\dot{q} - b\ddot{q} = (e/cm)E, \tag{57.13}$$

式中 b 为一常数，等于 $\frac{2}{3}(e^2/mc^3) = \frac{2}{3}(r_0/c)$. 积分(57.13)，得

$$q(s) = c_1 + c_2 e^{s/b} + \frac{e}{cm}\int_0^s E(s')\mathrm{d}s' - \frac{e}{cm}\int_0^s e^{(s-s')/b}E(s')\mathrm{d}s'.$$

$$(s > 0)$$

令 $q(0) = \dot{q}(0) = 0$，又令

$$E(s) = E_0\delta(s - s^*) \quad (E_0 > 0,\ s^* > 0)$$

$(E_0, s^*$ 为两个常数，均大于零)，得

---

① 在近代的量子电动力学中，常有人主张引入一个新的“基本长度”.

$$q=\begin{cases}\dfrac{eE_0}{cm}[1-e^{(s-s^*)/b}] & (s>s^*),\\ 0 & (0\leqslant s\leqslant s^*).\end{cases}\tag{57.14}$$

这是极不可理解的，因为由(57.14)我们推出：当 $s>s^*$ 时，亦即当外界作用已停止时，

$$q<0,\quad \dot{q}=-(eE_0/cmb)e^{(s-s^*)/b}<0,\tag{57.15}$$

亦即 $\dot{\xi}<0,\ddot{\xi}<0$，亦即 $\dot{\xi}$ 的绝对值在增加，亦即电子愈运动愈快. 当 $s\to\infty$ 时，$q\to-\infty$，亦即 $\dot{\xi}\to-\infty, u\to c$. 尤其可怪的是：原来电子是不动的 $(q(0)=\dot{q}(0)=0)$，外界所施的力是沿 x 正轴的，但电子在 $s>s^*$ 时沿 x 的负向运动. 注意在 $s>s^*$ 时电子并不受力，因此这时的加速度称为"自身加速".

狄拉克认为这是(57.1)方程最大的成就. 他说为了避免电子的 $|q|$ 在 $s\to\pm\infty$ 时趋近于 ∞，我们在解(57.1)时必须引入一个条件，使电子在 $s=\infty$ 时及在 $s=-\infty$ 时以等速运动①. 这样，电子在没有受到外界力前，便必须开始有加速度. 加速度开始的时刻与电子遇到外界力的时刻的时间差，等于 r_0/c，正好像电子是一个以原来的 ξ 为中心，r_0 为半径的圆球，而电磁波以速率 c 在电子中传播似的. 这样的理论固然极美，但在实际上极不方便，因为我们不能自 $s=0$ 的 q，$\dot{q}$ 去决定运动，而必须用 $\dot{q}(\infty)=\dot{q}(-\infty)=0$ 的条件去决定运动. 同时，$q(0)$ 须由 $\dot{q}(\infty)=\dot{q}(-\infty)=0$ 去决定的假定，也与寻常因果律的概念不合.

此外，用(57.1)去讨论氢原子中的电子运动，发现电子的轨道逐渐放大②，与寻常经典理论中电子在绕原子核旋转时逐渐趋近

---

① P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A167** (1938) 148. Д. Иваненко 与 А. Соколов 著《经典场论》§ 35. 狄拉克原文要求电子在外界力消失后立即以等速运动，伊万宁柯书要求电子在 $s=\infty, s=-\infty$ 时以等速运动(在 $s=\pm\infty$ 处，外力假定为零). 第二个要求(亦即本书所讨论的要求)比较合理一些. 在 § 65 中，我们将指出他们是等效的.

② C.J. Eliezer, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **39**(1943)173，及 *Rev. Mod. Phy.* **19** (1947)147.

于原子核的情形，恰成一个相反.

必须指出：(57.1)在$\boldsymbol{u}\approx 0$时所成的

$$m\dot{\boldsymbol{u}}-\frac{2}{3}(e^2/c^3)\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{F},\quad (\dot{\boldsymbol{u}}=\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t,\ \ddot{\boldsymbol{u}}=\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t^2) \tag{57.16}$$

在这一点是正确的，它使氢原子中的电子，渐渐地落入原子核. 为看出这一点，不妨讨论沿圆周的运动. 那里

$$\dot{\boldsymbol{u}}\approx-(u^2/r^2)\boldsymbol{r},$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}\approx-(u^2/r^2)\boldsymbol{u},$$

因此将(57.16)左方第二项移至右方，获得

$$m\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{F}-\frac{2}{3}(e^2/c^3)(u^2/r^2)\boldsymbol{u},$$

右方第二项好像是一个力，有趋势将$\boldsymbol{u}$的绝对值减小，因而使电子能量减少，逐渐地趋近于原子核.

不妨在此粗糙地指出(57.1)为什么带来了这个“电子自身加速”的现象. 在(57.11)式中的

$$\frac{2}{3}(e^2/c^5)\dot{\tau}(\ddot{\xi}^2-c^2\ddot{\tau}^2)$$

项等于

$$\frac{2}{3}(e^2/c^5)(\mathrm{i}c)^{-1}\dot{\xi}_4(\ddot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\mu),$$

代表电子在单位时间中的能量放射乘以

$$c^{-2}(1-\beta^2)^{-1/2}$$

(参阅§45的(45.13)，(45.14)式)，因而永远是正的，亦即是正定的. 它的效果是使$\dot{\tau}$减少，亦即是使能量降低，速度变小. 相反地，(57.11)式中的$-(2/3)(e^2/c^3)\dddot{\tau}$项，可正可负. 在以上的例题中，当$s>s^*$，它是负的，使得电子能量增加，速度加大. 正如§27中所指出的，这与电子的能量的放射无关，而必须了解为电子的某一部分能量乘以c^{-2}对s的微商. 如果不引入这一部分能量，(57.11)便使电子能量逐渐减小而我们便没有了“电子自身加速”的现象. 问

题是：在(57.1)式左方中取去第二项会使得(57.1)不可解.事实上，当(57.1)左方取去第二项后，左方乘上 $\dot{\xi}_\mu$ 不等于零，而右方乘上 $\dot{\xi}_\mu$ 等于零，证明了取去了第二项的(57.1)没有解.

为解决(57.1)所遭遇的困难而不放弃运动方程为一个微分方程的假定，显然只有两种办法.一个是引入高次微商的项，例如 $\ddddot{\xi}$ 等等.但这样的做法不能保证电子自身加速度的不产生.另一个是放弃相对论，这样由 $\boldsymbol{u}$ 取小值时的(56.3)出发，便不一定获得(57.1).总之，在(57.1)中我们曾给予了电子一个过大、过于重要的能量动量 $-(2/3)(e^2/c^3)\dddot{\xi}_\mu$，而给予这一项的理由是由于相对论的要求，由于"形式"上的要求，因而严格讲来理由是不够充分的.

虽然(57.1)是不够令人满意的，但由于目前尚没有更好的理论，我们只好暂时保留它.在下一节中我们将讨论狄拉克如何求得了这个方程.

§58　狄拉克的电子运动方程的导出

我们的出发点是(56.4)式，亦即

$$\int_{s_1}^{s_2} m\ddot{\xi}_\mu \mathrm{d}s = \frac{1}{\mathrm{i}c}\int T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu. \tag{58.1}$$

这个式子对于自由电子及在外界电磁场下的电子都可以应用；在讨论自由电子时，右方的 $T_{\mu\nu}$ 乃是电子所放射的电磁场的 $T_{\mu\nu}$.我们首先讨论这个情形.

依照上节的叙述，我们的方法乃是先将(58.1)右方的面固定下来，计算右方，再将左方改为

$$\int_{s_1}^{s_2}(\mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}s)\mathrm{d}s,$$

再引入适当的 p_μ，使得(58.1)成为一个有意义的式子(即不含有

奇异性质的项). 在狄拉克原文①中,(58.1)右方的面乃是一个管子面及两个平面. 令 $O(s)$ 为电子在固有时 s 的静止系统,亦即说在这系统中电子在固有时 s 的速度 $\dot{\xi}_\mu$ 为

$$(0,0,0,ic).$$



图　36

以上所说的两个平面,一个是 $O(s_1)$ 系统中垂直于该系统时间轴的一个平面,通过 $\xi(s_1)$;另一个是 $O(s_2)$ 系统中垂直于该系统时间轴的一个平面,通过 $\xi(s_2)$(见图 36). 管的描写如下:已给定一点 x_μ 后,取一个固有时 s 与之相应,相应关系为

$$\{x_\mu - \xi_\mu(s)\}\dot{\xi}_\mu(s) = 0 \qquad (58.2)$$

(因此 s 为 x_μ 的函数). 当我们令 x_μ 与"与它相应的 s"适合

$$\{x_\mu - \xi_\mu(s)\}\{x_\mu - \xi_\mu(s)\} = \varepsilon^2 \qquad (58.3)$$

(ε^2 为已知数),这样的 x_μ 便组成了一个管子面. 这便是狄拉克所选择的管子面. 这样的计算有一个缺点,即在两个平面上的面积分的值,不仅与电子在 s_1,s_2 的情形有关. 为避免这一点,我们用 Bhabha②的计算方法.

我们在此也在给了 x_μ 后,寻找一个固有时 s,与之相应,相应的关系为

$$\{x_\mu - \xi_\mu(s)\}\{x_\mu - \xi_\mu(s)\} = 0, \quad -i\{x_4 - \xi_4(s)\} > 0. \qquad (58.4)$$

这个 s 显然即是 x_μ 的推迟固有时. 引入 κ,也是 x_μ 的函数,定义为

$$\kappa \equiv - c^{-1}\{x_\mu - \xi_\mu(s)\}\dot{\xi}_\mu(s) \qquad (58.5)$$

(式中 s 为与 x_μ 相应的推迟固有时),那么当 κ 取一常值 κ_1 时,x_μ

---

① P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A167**(1938)148.

② H.J. Bhabha and H. Chandra, *Proc. Roy. Soc.* **A183**(1944)134.

便组成了一个管面.这便是我们所取的管面,(58.1)右方面积分的面还有其他部分,一个取为

$$\{x_\mu-\xi_\mu(s_1)\}\{x_\mu-\xi_\mu(s_1)\}=0,\quad -\mathrm{i}\{x_4-\xi_4(s_1)\}>0,$$
$$-\{x_\mu-\xi_\mu(s_1)\}\dot{\xi}_\mu(s_1)\leqslant c\kappa_1 \tag{58.6}$$

(这个面是以 $\xi_\mu(s_1)$ 为顶点的将来光锥面的一部分);另一个取为以 s_2 代替 s_1 的(58.6)(见图 37).注意由定义,κ 必须取正值,它的量纲是一个长度,而 κ 取较大值的管子乃是一个较大的管子,它将一个 κ 取较小值的管子完完全全地包含在它的内部中.

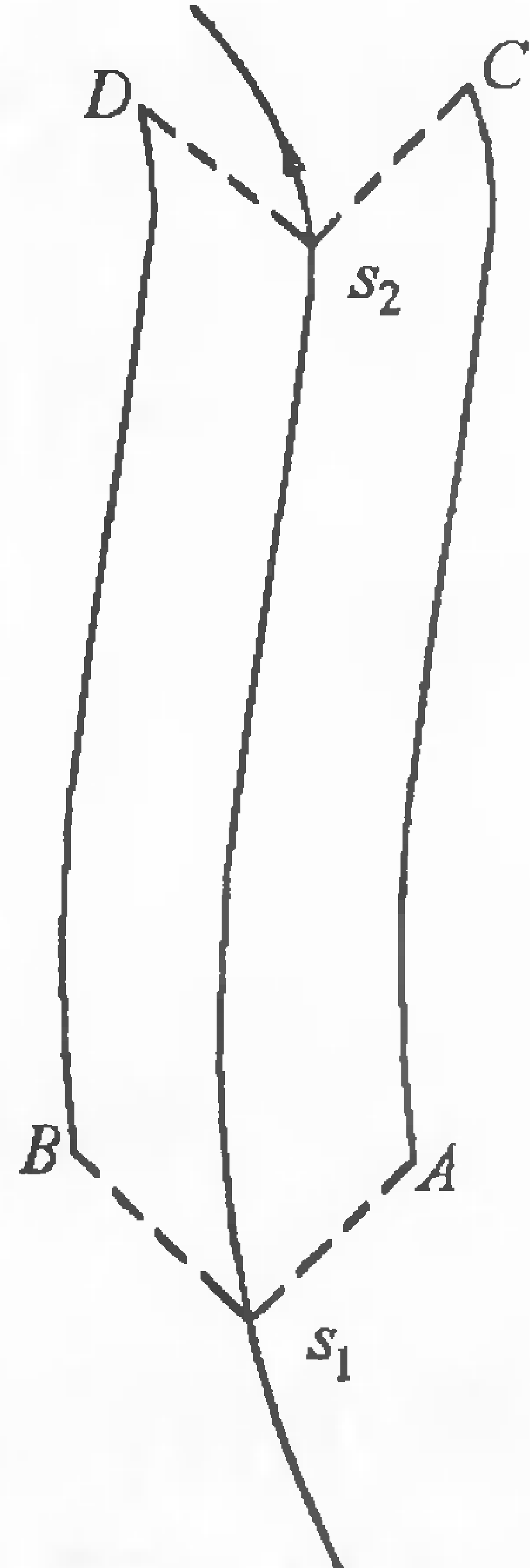


图　37

先计算 $T_{\mu\nu}$ 在管面上的积分.引入 γ_μ,κ',定义为

$$\gamma_\mu=x_\mu-\xi_\mu(s), \tag{58.7}$$
$$\kappa'=\gamma_\mu\ddot{\xi}_\mu(s). \tag{58.8}$$

依照(46.11),在 x_μ 的 $H_{\mu\nu}$ 等于

$$\frac{e}{c^2\kappa^2}(\gamma_\nu\ddot{\xi}_\mu-\gamma_\mu\ddot{\xi}_\nu)+\frac{e(c^2+\kappa')}{c^3\kappa^3}(\gamma_\nu\dot{\xi}_\mu-\gamma_\mu\dot{\xi}_\nu). \tag{58.9}$$

不难证实

$$(\gamma_\nu\ddot{\xi}_\mu-\gamma_\mu\ddot{\xi}_\nu)(\gamma_\rho\ddot{\xi}_\nu-\gamma_\nu\ddot{\xi}_\rho)=\kappa'(\ddot{\xi}_\mu\gamma_\rho+\ddot{\xi}_\rho\gamma_\mu)-\gamma_\mu\gamma_\rho\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu,$$
$$(\gamma_\nu\ddot{\xi}_\mu-\gamma_\mu\ddot{\xi}_\nu)(\gamma_\rho\dot{\xi}_\nu-\gamma_\nu\dot{\xi}_\rho)=-c\kappa\ddot{\xi}_\mu\gamma_\rho+\kappa'\gamma_\mu\dot{\xi}_\rho,$$
$$(\gamma_\nu\dot{\xi}_\mu-\gamma_\mu\dot{\xi}_\nu)(\gamma_\rho\dot{\xi}_\nu-\gamma_\nu\dot{\xi}_\rho)=-c\kappa(\dot{\xi}_\mu\gamma_\rho+\dot{\xi}_\rho\gamma_\mu)+c^2\gamma_\mu\gamma_\rho;$$

由此可以算出

$$H_{\mu\nu}H_{\nu\rho}=\frac{e^2}{c^4\kappa^4}\{-\gamma_\mu\gamma_\rho\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu-c^2(\ddot{\xi}_\mu\gamma_\rho+\ddot{\xi}_\rho\gamma_\mu)\}$$
$$-\frac{e^2}{c^3\kappa^5}(\kappa'+c^2)(\dot{\xi}_\mu\gamma_\rho+\dot{\xi}_\rho\gamma_\mu)+\frac{e^2}{c^4\kappa^6}(\kappa'+c^2)^2\gamma_\mu\gamma_\rho. \tag{58.10}$$

注意在这些计算中,我们曾用了在管面上 x_μ 与 s 所适合的(58.4)

式，也用了 κ,κ' 的定义(58.5)，(58.8)，也用了 $\dot{\xi},\ddot{\xi}$ 等量中的关系. 由(58.10)，可以算出

$$H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}=-2e^2/\kappa^4. \tag{58.11}$$

因此

$$\begin{aligned}T_{\mu\rho}=&\frac{1}{4\pi}H_{\mu\nu}H_{\nu\rho}+\frac{1}{16\pi}H_{\theta\nu}H_{\theta\nu}\delta_{\mu\rho}\\=&\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^2}{c^4\kappa^4}[-\gamma_\mu\gamma_\rho\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu-c^2(\ddot{\xi}_\mu\gamma_\rho+\ddot{\xi}_\rho\gamma_\mu)]\right.\\&-\frac{e^2}{c^3\kappa^5}(\kappa'+c^2)(\dot{\xi}_\mu\gamma_\rho+\dot{\xi}_\rho\gamma_\mu)+\frac{e^2}{c^4\kappa^6}(\kappa'+c^2)^2\gamma_\mu\gamma_\rho\\&\left.-\frac{1}{2}(e^2/\kappa^4)\delta_{\mu\rho}\right\}.\end{aligned} \tag{58.12}$$

下一步计算便是计算管面上的 $\mathrm{d}S_\rho$. 这个面的公式是

$$\kappa=\text{常数}. \tag{58.13}$$

(我们有时即以 κ 代表此常数，以免符号过于复杂.)因 s,κ 为 x_μ 的函数，任意点的 x_μ 可以用 s,κ，及 x_μ 中任意两个的值来表出. 令 $O(s)$ 为电子在固有时 s 的静止系统，令该系统中的 γ 称为 $\gamma^\dagger$，再令 $\gamma^\dagger$ 与我们的计算系统(即(58.1)式所用的系统)中的 γ 有以下的关系：

$$\gamma_\mu^\dagger=a_{\mu\nu}(s)\gamma_\nu. \tag{58.14}$$

我们取 $s,\kappa,\gamma_2^\dagger,\gamma_3^\dagger$ 的值来描写 x_μ，亦即用 $s,\kappa,\gamma_2^\dagger,\gamma_3^\dagger$ 作为曲面坐标，

$$x_\mu=f_\mu(s,\kappa,\gamma_2^\dagger,\gamma_3^\dagger).$$

那时管上的 $\mathrm{d}S_\mu$ 成为

$$\frac{\partial\kappa}{\partial x_\mu}\cdot\left|\frac{D(\kappa,s,\gamma_2^\dagger,\gamma_3^\dagger)}{D(x_1,x_2,x_3,x_4)}\right|^{-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\,\mathrm{d}\gamma_3^\dagger \tag{58.15}$$

(参阅§42的(42.14)式). 注意由于当 x_μ 离世界线愈远时 κ 的值也愈大，上述的方向是自管内向外的. 让我们计算(58.15).

首先，由于(58.4)，$\gamma_\mu\gamma_\mu=0$，对 x_μ 微商，得

$$\gamma_{\mu}+\gamma_{\nu}(-\dot{\xi}_{\nu})\left(\frac{\partial s}{\partial x_{\mu}}\right)=0,$$

由此得

$$\frac{\partial s}{\partial x_{\mu}}=-\frac{\gamma_{\mu}}{\kappa c}. \tag{58.16}$$

其次，由 κ 的定义(58.5)，对 x_{μ} 微商，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial x_{\mu}}&=-\frac{1}{c}\left\{\dot{\xi}_{\mu}-\dot{\xi}_{\nu}\dot{\xi}_{\nu}\frac{\partial s}{\partial x_{\mu}}+\gamma_{\nu}\ddot{\xi}_{\nu}\frac{\partial s}{\partial x_{\mu}}\right\}\\&=-\frac{1}{c}\dot{\xi}_{\mu}+\frac{\gamma_{\mu}}{\kappa c^{2}}(c^{2}+\kappa').\end{aligned} \tag{58.17}$$

再次

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{2}^{\dagger}}{\partial x_{\mu}}&=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\{a_{2\nu}(s)\gamma_{\nu}\}=\frac{\partial a_{2\nu}(s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_{\mu}}\gamma_{\nu}+a_{2\nu}\left\{\delta_{\mu\nu}-\dot{\xi}_{\nu}\frac{\partial s}{\partial x_{\mu}}\right\}\\&=a_{2\mu}+\left[\frac{\partial a_{2\nu}}{\partial s}\gamma_{\nu}-a_{2\nu}\dot{\xi}_{\nu}\right]\left(-\frac{\gamma_{\mu}}{\kappa c}\right).\end{aligned} \tag{58.18}$$

同样可以算出 $\partial\gamma_{3}^{\dagger}/\partial x_{\mu}$ 等. 将(58.16)，(58.17)，(58.18)代入

$$D(\kappa,s,\gamma_{2}^{\dagger},\gamma_{3}^{\dagger})/D(x_{1},x_{2},x_{3},x_{4}), \tag{58.19}$$

稍稍简化，便获得了

$$\begin{vmatrix}-\frac{1}{c}\dot{\xi}_{1} & -\frac{1}{c}\dot{\xi}_{2} & -\frac{1}{c}\dot{\xi}_{3} & -\frac{1}{c}\dot{\xi}_{4}\\ -\frac{\gamma_{1}}{\kappa c} & -\frac{\gamma_{2}}{\kappa c} & -\frac{\gamma_{3}}{\kappa c} & -\frac{\gamma_{4}}{\kappa c}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{vmatrix}.$$

将第一行的 $\dot{\xi}_{\mu}$ 改写为

$$a_{\nu\mu}\dot{\xi}_{\nu}^{\dagger}$$

(式中 $\dot{\xi}_{\nu}^{\dagger}$ 代表在 $O(s)$ 系统中的 $\dot{\xi}$ 的各个分量)，第二行的 γ_{μ} 改为 $a_{\nu\mu}r_{\nu}^{\dagger}$，上面的行列式可以改写为

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{c}\dot{\xi}_1^\dagger & -\frac{1}{c}\dot{\xi}_2^\dagger & -\frac{1}{c}\dot{\xi}_3^\dagger & -\frac{1}{c}\dot{\xi}_4^\dagger \\ -\frac{\gamma_1^\dagger}{\kappa c} & -\frac{\gamma_2^\dagger}{\kappa c} & -\frac{\gamma_3^\dagger}{\kappa c} & -\frac{\gamma_4^\dagger}{\kappa c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

因后一个行列式的值为 1,(58.19)算出为

$$(\kappa c^2)^{-1}[\dot{\xi}_1^\dagger \gamma_4^\dagger - \dot{\xi}_4^\dagger \gamma_1^\dagger]. \tag{58.20}$$

但依照 $\xi^\dagger$ 的定义, $\dot{\xi}_4^\dagger = \mathrm{i}c, \dot{\xi}_1^\dagger = 0$, 因此(58.19)等于

$$-\mathrm{i}c\gamma_1^\dagger/\kappa c^2. \tag{58.21}$$

因此 $\mathrm{d}S_\mu$ 等于

$$\left\{-\frac{1}{c}\dot{\xi}_\mu + \frac{\gamma_\mu}{\kappa c^2}(c^2+\kappa')\right\}\frac{\kappa c^2}{-\mathrm{i}c\gamma_1^\dagger}\mathrm{d}s\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\mathrm{d}\gamma_3^\dagger. \tag{58.22}$$

因此,管面上的$\frac{1}{\mathrm{i}c}\int T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu$ 等于

$$\int \mathrm{d}s\left\{\iint\left(\frac{1}{\mathrm{i}c}\right)\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\mathrm{d}\gamma_3^\dagger T_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{c}\dot{\xi}_\nu + \frac{\gamma_\nu}{\kappa c^2}(c^2+\kappa')\right]\frac{\kappa c^2}{-\mathrm{i}c\gamma_1^\dagger}\right\}.$$

让我们讨论对于 $\gamma_2^\dagger, \gamma_3^\dagger$ 的积分. 将曲括号中的项改写为

$$\int \mathrm{d}\gamma_2^\dagger\mathrm{d}\gamma_3^\dagger a_{\rho\mu}T_{\rho\nu}^\dagger\left[-\frac{1}{c}\dot{\xi}_\nu^\dagger + \frac{\gamma_\nu^\dagger}{\kappa c^2}(c^2+\kappa')\right]\frac{\kappa}{\gamma_1^\dagger}, \tag{58.23}$$

式中 $T^\dagger$ 为 $O(s)$系统中 T 的各个分量. 以(58.12)所求出的 $T_{\rho\nu}^\dagger$ 代入(58.23),获得了

$$\frac{1}{4\pi c}a_{\rho\mu}\int\left\{\frac{e^2}{\kappa^3c^3}(-\gamma_\rho^\dagger\ddot{\xi}_\nu^\dagger\ddot{\xi}_\nu^\dagger) + \frac{e^2\kappa'^2}{\kappa^5c^3}\gamma_\rho^\dagger + \cdots\right\}\frac{\kappa}{\gamma_1^\dagger}\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\mathrm{d}\gamma_3^\dagger. \tag{58.24}$$

式中未写出的项在积分后成为

$$O(\kappa^{-1}),\quad O(\kappa^{-2}),\quad \cdots,$$

在 $\kappa\to 0$ 时趋近于无穷大. Bhabha 曾经证明(见 362 页注②中的文献)这些项必然是某一个 $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, \cdots$ 的函数对 s 的微商,因而只消在

(58.1)左方的 $m\ddot{\xi}$ 改为 $\dot{p}$ 后在 $\dot{p}$ 中引入适当的项，便可以将它的效果抵消. 注意在 $O(s)$ 系统中，

$$\gamma_4^\dagger = \mathrm{i}\kappa,\quad \gamma_1^{\dagger\,2} + \gamma_2^{\dagger\,2} + \gamma_3^{\dagger\,2} = \kappa^2, \tag{58.25}$$

因此

$$\int\left\{\frac{e^2}{\kappa^3c^3}(-\gamma_\rho^\dagger\,\ddot{\xi}_\nu^\dagger\,\ddot{\xi}_\nu^\dagger) + \frac{e^2\kappa'^2}{\kappa^5c^3}\gamma_\rho^\dagger + \cdots\right\}(\kappa/\gamma_1^\dagger)\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\,\mathrm{d}\gamma_3^\dagger \tag{58.26}$$

的积分面由 $O(s)$ 看来只是在某一个固定时刻在三维空间中一个以 κ 为半径的圆球，而 $(\kappa/\gamma_1^\dagger)\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\,\mathrm{d}\gamma_3^\dagger$ 乃是这个圆球的面积元. 由此，可以看出(58.24)中第一个积分

$$\int\frac{e^2}{\kappa^3c^3}(-\gamma_\rho^\dagger\,\ddot{\xi}_\nu^\dagger\,\ddot{\xi}_\nu^\dagger)\frac{\kappa}{\gamma_1^\dagger}\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\,\mathrm{d}\gamma_3^\dagger \tag{58.27}$$

只有在 ρ 等于 4 时才不等于零. 当 $\rho=1,2,3$ 时，由于圆球对称性，积分值等于零. 因此(58.27)成为

$$\delta_{\rho4}\int\frac{e^2}{\kappa^3c^3}(-\mathrm{i}\kappa)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu(\kappa^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi) = -\,4\pi\mathrm{i}(e^2/c^3)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu.$$

在(58.24)的第二个积分中，将 κ'^2 展开为

$$\sum_i\ddot{\xi}_i^\dagger\,\ddot{\xi}_i^\dagger\,\gamma_i^\dagger\,\gamma_i^\dagger + 2\sum_{i>j}\ddot{\xi}_i^\dagger\,\ddot{\xi}_j^\dagger\,\gamma_i^\dagger\,\gamma_j^\dagger\quad(i,j=1,2,3)$$

(注意在 $O(s)$ 系统中，由于 $\dot{\xi}_\mu^\dagger\,\ddot{\xi}_\mu^\dagger = 0$ 及 $\dot{\xi}_1^\dagger = \dot{\xi}_2^\dagger = \dot{\xi}_3^\dagger = 0$，得 $\ddot{\xi}_4^\dagger = 0$)，获得

$$\int\frac{e^2\kappa'^2}{\kappa^3c^3}\gamma_\rho^\dagger\left(\frac{\kappa}{\gamma_1^\dagger}\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\,\mathrm{d}\gamma_3^\dagger\right) = \sum_i\left\{\delta_{\rho4}(+\mathrm{i})\frac{e^2}{c^3}\frac{4\pi}{3}\ddot{\xi}_i^\dagger\,\ddot{\xi}_i^\dagger\right\}$$

$$= \delta_{\rho4}\mathrm{i}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{4\pi}{3}\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu. \tag{58.28}$$

当 ρ 不等于 4 时积分也由于对称性而变为零. 因此(58.24)成为

$$-\frac{e^2\mathrm{i}}{c^4}\,\frac{2}{3}\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu a_{4\mu}, \tag{58.29}$$

但 $\mathrm{i}ca_{4\mu}$ 即为 $\dot{\xi}_\mu$，故上式成为

$$-(2/3)(e^2/c^5)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu. \tag{58.30}$$

不难看出，在其他的面上，$T_{\mu\nu}$的面积分的值只与电子在 s_1,s_2 的运动有关，因而只消适当地改变 p_μ，便可以消除它们的影响. 问题是：这些积分是不收敛的. 例如以 $\xi(s_1)$为顶点的光锥面(58.6)上，面的公式可以写为 $s=s_1$，由此可以算出

$$\mathrm{d}S_\nu = K\gamma_\nu \mathrm{d}\kappa \mathrm{d}\gamma_2^\dagger \,\mathrm{d}\gamma_3^\dagger\,, \quad K = O(\kappa^{-1}),$$

$$T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu = (K/4\pi)\left(\frac{1}{2}e^2\gamma_\mu/\kappa^4\right)\mathrm{d}\kappa\mathrm{d}\gamma_2^\dagger\,\mathrm{d}\gamma_3^\dagger\,,$$

因此积分发散正如 $\int \mathrm{d}\kappa/\kappa^2$. 如果我们不要求过分的严格，我们可以依旧假定它们的影响在适当地改变 p_μ 后被消除.

由以上的计算，知(58.1)的右方在可以忽略一个 $\xi,\dot{\xi},\ddot{\xi},\cdots$ 的函数对 s 的微商的情形下，等于

$$\int -\frac{2}{3}(e^2/c^5)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu \mathrm{d}s.$$

因此自由电子的运动方程为

$$\mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}s = -\frac{2}{3}(e^2/c^5)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu. \tag{58.31}$$

取 p_μ 为 $m\dot{\xi}_\mu + f_\mu(\dot{\xi},\ddot{\xi},\cdots)$，得

$$m\ddot{\xi}_\mu + \dot{f}_\mu = -\frac{2}{3}(e^2/c^5)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu. \tag{58.32}$$

乘以 $\dot{\xi}_\mu$，获得了

$$\dot{f}_\mu\dot{\xi}_\mu = +\frac{2}{3}(e^2/c^3)\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu.$$

上式中 $\dot{f}_\mu$ 的最简单的解为

$$\dot{f}_\mu = -\frac{2}{3}(e^2/c^3)\dddot{\xi}_\mu. \tag{58.33}$$

以此代入(58.32)，获得了自由电子的运动方程

$$m\ddot{\xi}_\mu - \frac{2}{3}(e^2/c^5)(c^2\dddot{\xi}_\mu - \dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu) = 0. \tag{58.34}$$

如果外界有电磁场，我们可以将出发点(58.1)改变，假定为

$$\int (\mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}s)\mathrm{d}s = \frac{e}{c}H''_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu + \frac{1}{\mathrm{i}c}\int T^c_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu,$$

式中 H'' 代表外界的场，$T^c_{\mu\nu}$ 代表电子自身的电磁场的能量-动量张量，也可以将(58.1)改为

$$\int (\mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}s)\mathrm{d}s = \frac{1}{\mathrm{i}c}\int T^{\mathrm{tot}}_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu,$$

式中 $T^{\mathrm{tot}}_{\mu\nu}$ 代表总的电磁场的 $T_{\mu\nu}$，即外界与电子的总电磁场所构成的能量-动量张量. 不论用哪一种办法，我们获得了

$$m\ddot{\xi}_\mu - \frac{2}{3}(e^2/c^5)(c^2\dddot{\xi}_\mu - \dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\ddot{\xi}_\nu) = (e/c)H''_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu; \quad (58.35)$$

详细计算不在此补充.

由以上，可见 $\dot{f}_\mu$ 的引入是比较最可以怀疑的一点. 其次，$T_{\mu\nu}$ 在光锥面上的积分不收敛，说它们可以忽略也是可怀疑的.

不妨在此简单地说明，为什么在 $\kappa=\kappa_1$ 的管上的面积分，如果含有一项

$$\int (A_n/\kappa_1^n)\mathrm{d}s \quad (n \neq 0)$$

时，A_n 必须为一个 $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, \cdots$ 的函数对 s 的微分. 理由是这样的：取一个管 $\kappa=\kappa_1$，再取一个管 $\kappa=\kappa_1+\Delta\kappa$，令它们与以 $\xi(s_1)$，$\xi(s_2)$ 为顶点的将来光锥面相交而称相交曲线在光锥面上所包围的面为 σ_1, σ_2，那么由于 $\sigma_1, \sigma_2, \kappa=\kappa_1$，$\kappa=\kappa_1+\Delta\kappa$ 四个面中的 $T_{\mu\nu}$ 满足 $\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu=0$，得

$$\int_{\kappa=\kappa_1+\Delta\kappa} T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu - \int_{\kappa=\kappa_1} T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu + \int_{\sigma_1+\sigma_2} T_{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu = 0.$$

在上式乘上 $(\Delta\kappa)^{-1}$，令 $\Delta\kappa$ 趋近于零. 第三项成为

$$\sum_n \frac{1}{\kappa_1^n}[f_n(\dot{\xi}(s_2), \ddot{\xi}(s_2), \cdots) - f_n(\dot{\xi}(s_1), \ddot{\xi}(s_1), \cdots)],$$

而第一、第二项即是

$$\sum_{n\neq 0}\int -n(\kappa_1)^{-(n+1)}A_n(s)\mathrm{d}s.$$

因此，我们获得

$$nA_n(s) = \mathrm{d}f_{n+1}(\dot{\xi}(s), \ddot{\xi}(s), \cdots)/\mathrm{d}s.$$

这证明了在 $A_n(s)$ 中只有 $A_0(s)$ 一项可以不是一个 $\dot{\xi}, \ddot{\xi}, \cdots$ 的函数的全微分.

运动方程(58.35)可以写为

$$m\ddot{\xi}_\mu = \frac{e}{c}\left\{\frac{2}{3}\frac{e}{c^4}(\dot{\xi}_\mu \dddot{\xi}_\nu - \dot{\xi}_\nu \dddot{\xi}_\mu) + H''_{\mu\nu}\right\}\dot{\xi}_\nu, \tag{58.36}$$

式中花括号中第一项了解为一个 $H_{\mu\nu}$,相当于电子在它本身上所施的作用. 这个 $H_{\mu\nu}$ 通常称为辐射场,可以证明为电子身上的

$$\frac{1}{2}(H_{\mu\nu,\text{ret}} - H_{\mu\nu,\text{adv}}), \tag{58.37}$$

式中 H_{ret} 代表推迟势,H_{adv} 代表超前势. 更清楚地讲,我们令 $x_\mu - \xi_\mu(s)$ 为 $O(s)$ 中一个纯类空矢量,讨论

$$\frac{1}{2}\{H_{\mu\nu,\text{ret}}(x_\mu) - H_{\mu\nu,\text{adv}}(x_\mu)\} \tag{58.38}$$

在 x_μ 趋近于 $\xi_\mu(s)$ 时的极限,而这个极限便是(58.36)花括号中第一项在 s 时的值. 这一点的证明补充如下:

电子的推迟势 A_μ 等于下式右方,

$$A_\mu(\boldsymbol{x}, t) = e\int \dot{\xi}_\mu \mathrm{d}s 2\delta[R^2 - c^2(t-\tau)^2] \tag{58.39}$$

(见 § 46 的(46.8)). 在此式中,$\boldsymbol{R}$ 代表自 $\boldsymbol{\xi}$ 至 $\boldsymbol{x}$ 的矢量,τ 代表电子的时间坐标,而积分区域包含了推迟固有时. 令 σ 代表

$$R^2 - c^2(t-\tau)^2,$$

便获得了

$$H_{\mu\nu,\text{ret}} = 4e\int\{\dot{\xi}_\nu(x_\mu - \xi_\mu) - \dot{\xi}_\mu(x_\nu - \xi_\nu)\}\frac{\partial\delta(\sigma)}{\partial\sigma}\mathrm{d}s. \tag{58.40}$$

令 $\xi_\mu(s_0)$ 为电子世界线上某一点,而 x_μ 为世界线外一点,适合

$$x_\mu = \xi_\mu(s_0) + \varepsilon a_\mu, \tag{58.41}$$

$$a_\mu a_\mu = 1, \tag{58.42}$$

$$a_\mu \dot{\xi}_\mu(s_0) = 0. \tag{58.43}$$

而讨论 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 趋近于零时在 x_μ 上的 $H_{\mu\nu\,\text{ret}}$. (58.42)的意义为"$x_\mu - \xi_\mu(s_0)$ 是一类空矢量",(58.43)的意义为"$x_\mu - \xi_\mu(s_0)$ 在 $O(s_0)$ 系统中是一个纯类空矢量". 当 $\varepsilon \to 0$ 时,x_μ 点的推迟固有时与 s_0 变为极相近. 为求 x_μ 的推迟固有时起见,我们将 ξ_μ 在 s_0 点附近展开

$$\xi_\mu = \xi_{\mu 0} + u\dot{\xi}_{\mu 0} + \frac{1}{2}u^2\ddot{\xi}_{\mu 0} + \frac{1}{6}u^3\dddot{\xi}_{\mu 0} + \cdots,$$

$$\dot{\xi}_\mu = \dot{\xi}_{\mu 0} + u\ddot{\xi}_{\mu 0} + \frac{1}{2}u^2\dddot{\xi}_{\mu 0} + \cdots,$$

$$(u \equiv s - s_0,\quad \xi_{\mu 0} \equiv \xi_\mu(s_0),\quad \dot{\xi}_{\mu 0} = \dot{\xi}_\mu(s_0),\cdots) \tag{58.44}$$

因此

$$x_\mu - \xi_\mu = \varepsilon a_\mu - u\dot{\xi}_{\mu 0} - \frac{1}{2}u^2\ddot{\xi}_{\mu 0} - \cdots,$$

$$\sigma = \varepsilon^2 - c^2u^2 - \varepsilon(a_\mu\ddot{\xi}_{\mu 0})u^2 - \frac{1}{3}\varepsilon(a_\mu\dddot{\xi}_{\mu 0})u^3 + O(u^4). \tag{58.45}$$

因此

$$u_{\text{ret}} = s_{\text{ret}} - s_0 = -\frac{\varepsilon}{c} + \frac{\varepsilon^2}{2c^3}(a_\mu\ddot{\xi}_{\mu 0}) + \frac{\varepsilon^3}{6c^4}(a_\mu\dddot{\xi}_{\mu 0}) + O(\varepsilon^4). \tag{58.46}$$

同样 u_{adv} 乃是(58.45)中大于零的一个根，

$$u_{\text{adv}} = s_{\text{adv}} - s_0 = +\frac{\varepsilon}{c} - \frac{\varepsilon^2}{2c^3}(a_\mu\ddot{\xi}_{\mu 0}) + \frac{\varepsilon^3}{6c^4}(a_\mu\dddot{\xi}_{\mu 0}) + O(\varepsilon^4).$$

由此得

$$u_{\text{ret}} + u_{\text{adv}} = (\varepsilon^3/3c^4)(a_\mu\dddot{\xi}_{\mu 0}) + O(\varepsilon^4). \tag{58.47}$$

上式中 $\xi_{\mu 0}$, $\dot{\xi}_{\mu 0}$, …中的“0”字样,此后有时不再写出.

在(58.40)中,我们以(58.44)代入,而同时将对 s 的积分改为对 u 的积分.(58.40)可以改写为

$$\begin{aligned}
&4e\int\{\cdots\}\frac{1}{(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}u)}\frac{\partial\delta(\sigma)}{\partial u}\mathrm{d}u\\
&\quad = -4e\int\frac{\partial}{\partial u}\left[\{\cdots\}\frac{1}{\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}u}\right]\delta(\sigma)\mathrm{d}u\\
&\quad = -4e\int\frac{\partial}{\partial u}\left[\{\cdots\}\frac{1}{\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}u}\right]\frac{\delta(u-u_{\text{ret}})}{|\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}u|_{u=u_{\text{ret}}}}\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

因而等于

$$-4e\frac{\partial}{\partial u}\left[\{\cdots\}\frac{1}{\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}u}\right]\frac{1}{|\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}u|}. \tag{58.48}$$

以 u_{ret} 代 u 而获得的值.(58.48)中{…}等于

$$\left\{\dot{\xi}_{\nu 0} + u\ddot{\xi}_{\nu 0} + \frac{1}{2}u^2\dddot{\xi}_{\nu 0} + \cdots\right\}\left\{\varepsilon a_\mu - u\dot{\xi}_{\mu 0} - \frac{1}{2}u^2\ddot{\xi}_{\mu 0} - \frac{1}{6}u^3\dddot{\xi}_{\mu 0} - \cdots\right\}$$

$$-\{\dot{\xi}_{\mu0}+u\ddot{\xi}_{\mu0}+\cdots\}\left\{\varepsilon a_\nu-u\dot{\xi}_{\nu0}-\frac{1}{2}u^2\ddot{\xi}_{\nu0}+\cdots\right\}.$$

拿走“0”字样，上式成为

$$\varepsilon a_\mu\dot{\xi}_\nu+u\varepsilon a_\mu\ddot{\xi}_\nu+u^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon a_\mu\dddot{\xi}_\nu-\frac{1}{2}\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\right)$$
$$+u^3\left(\frac{1}{6}\varepsilon a_\mu\ddddot{\xi}_\nu-\frac{1}{3}\dot{\xi}_\mu\dddot{\xi}_\nu\right)+\cdots-[\mu,\nu],\qquad(58.49)$$

式中$[\mu,\nu]$代表以前各项将μ,ν对调后的总和. 另一方面，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}u}=\{-2c^2-2\varepsilon(a_\mu\ddot{\xi}_\mu)-\varepsilon(a_\mu\dddot{\xi}_\mu)u+\cdots\}u.\qquad(58.50)$$

以这些代入(58.48)，称(58.49)为B，称(58.50)花括号中的值为D，获得了

$$-4e\left\{\frac{B}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{D}\right)+\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{u}\right)\right\}\frac{1}{|Du|}$$
$$=-4e\left\{\frac{B}{u}\frac{\varepsilon a_\mu\dddot{\xi}_\mu+\cdots}{D^2}+\frac{1}{D}\left[-\frac{\varepsilon a_\mu\dot{\xi}_\nu}{u^2}+\left(\frac{1}{2}\varepsilon a_\mu\dddot{\xi}_\nu-\frac{1}{2}\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+2u\left(\frac{1}{6}\varepsilon a_\mu\dddot{\xi}_\nu-\frac{1}{3}\dot{\xi}_\mu\dddot{\xi}_\nu\right)+\cdots-[\mu,\nu]\right]\right\}\frac{1}{+Du}.\qquad(58.51)$$

以u_{ret}代入上式，便得了$H_{\mu\nu\,\mathrm{ret}}$. $H_{\mu\nu\,\mathrm{adv}}$的式子也是(58.40)式，但积分区域包含超前固有时，因此也是(58.51)式，但最末一个因子改为$(-Du)^{-1}$，而同时式中的u以u_{adv}代入.（所以将$(Du)^{-1}$改为$-(Du)^{-1}$，乃是由于在求(58.40)的积分时获得了一个因子$|\mathrm{d}s/\mathrm{d}u|^{-1}$）. 让我们计算$\varepsilon\to0$时的

$$\frac{1}{2}(H_{\mu\nu,\mathrm{ret}}-H_{\mu\nu,\mathrm{adv}}).\qquad(58.52)$$

不难看出，

$$-2e\left\{\frac{B}{u^2}\frac{\varepsilon a_\mu\dddot{\xi}_\mu}{D^3}\right\}_{u_{\mathrm{ret}}}-2e\left\{\frac{B}{u^2}\frac{\varepsilon a_\mu\dddot{\xi}_\mu}{D^3}\right\}_{u_{\mathrm{adv}}}$$
$$=-4e\frac{a_\mu\dot{\xi}_\nu}{(1/c)^2}\frac{a_\rho\dddot{\xi}_\rho}{(-2c^2)^3}-[\mu,\nu]+O(\varepsilon),$$

$$+2e\left\{\frac{\varepsilon a_\mu\dot{\xi}_\nu}{u^3D^2}\right\}_{u_{\mathrm{ret}}}+2e\left\{\frac{\varepsilon a_\mu\dot{\xi}_\nu}{u^3D^2}\right\}_{u_{\mathrm{adv}}}-[\mu,\nu]$$
$$=2e\frac{a_\mu\dot{\xi}_\nu}{(1/c)^4(1-2c^2)^2}(-3)\cdot2\cdot\frac{a_\rho\dddot{\xi}_\rho}{6c^4}-[\mu,\nu]+O(\varepsilon),$$

$$-2e\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\varepsilon a_\mu \dddot{\xi}_\nu - \frac{1}{2}\dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\nu\right)}{D^2 u}\right\}_{u_{\text{ret}}} - 2e\{\cdots\}_{u_{\text{adv}}} - [\mu,\nu] = O(\varepsilon^2),$$

$$-2e\left\{\frac{2\left(\frac{1}{6}\varepsilon a_\mu \dddot{\xi}_\nu - \frac{1}{3}\dot{\xi}_\mu \dddot{\xi}_\nu\right)}{D^2}\right\}_{u_{\text{ret}}} - 2e\{\cdots\}_{u_{\text{adv}}} - [\mu,\nu]$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^4}(\dot{\xi}_\mu \dddot{\xi}_\nu - \dddot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu) + O(\varepsilon). \tag{58.53}$$

(58.51)中的未写出项对于 H_{ret},H_{adv}的贡献相减后成为 $O(\varepsilon)$,因此我们只消将(58.53)中诸式相加,便获得了(58.52),因而证实了(58.52)在 $\varepsilon\to 0$ 时等于(58.36)的花括号中的第一项.这便是我们所欲证明的.

§59　玻恩的非线性方程

现在讨论改变麦克斯韦方程的理论.这样的第一类理论是将麦克斯韦的线性方程,改为非线性方程.最早的这样的理论见于 G. Mie 的工作①,但不幸他的理论不满足规范不变性的要求.后来的理论见于玻恩,英菲德(Infeld)及柏拉斯(Pryce)的工作②.现在将他们的理论叙述于下.

先讨论在真空中的电磁场方程.我们依然引入势 A_μ,假定 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 为

$$H_{\mu\nu} \equiv (\partial A_\nu/\partial x_\mu - \partial A_\mu/\partial x_\nu) \tag{59.1}$$

的各个分量.我们假定 A_μ 等所适合的微分方程由一个拉格朗日 L^{EH}的变分而得来.因为 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 所构成的不变量只有

$$(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2),\quad (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2$$

两个,L^{EH}只可能是它们的函数.玻恩一度选择了

---

① G. Mie, *Ann. d. Phys.* **37**(1912)511; **39**(1912)1; **40**(1913)1.

② M. Born, *Proc. Roy. Soc.* **A143**(1934)410; M. Born and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.* **A144**(1934)425;
M.H.L. Pryce, *Proc. Roy. Soc.* **A155**(1935)597.

$$L^{EH}=\frac{E_0^2}{4\pi}\left\{1-\left[1-\frac{1}{E_0^2}(E^2-H^2)\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\frac{E_0^2}{4\pi}\left\{1-\left[1+\frac{1}{2E_0^2}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}\right]^{1/2}\right\}, \qquad (59.2)$$

式中 E_0 为一常数,量纲为一电场. 当 $E_0 \to \infty$时,上式成为以前的

$$-\frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}.$$

他们后来又选择了

$$L^{EH}=\frac{E_0^2}{4\pi}\left\{1-\left[1-\frac{E^2-H^2}{E_0^2}-\frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2}{E_0^4}\right]^{1/2}\right\}.$$

所持的理由是比较形式的,在此不拟讨论. 此外,薛定谔(Schrödinger)曾采用了

$$L^{EH}=\frac{E_0^2}{8\pi}\log\{1+(E^2-H^2)/E_0^2\}.$$

显然,在理论的这个阶段,这些选择是带有任意性的. 为简单起见,我们只讨论(59.2)中的 L.

令 A_μ 在

$$S=\int L^{EH}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$$

中变化,而讨论使 S 为最小的 A_μ. 显然地,这样的 A 及相应的 $H_{\mu\nu}$ 满足

$$\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0, \qquad (59.3)$$

式中 $D_{\mu\nu}$ 定义为

$$D_{\mu\nu}=-8\pi\frac{\partial L}{\partial H_{\mu\nu}}=\frac{H_{\mu\nu}}{\{1+H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}/2E_0^2\}^{1/2}}. \qquad (59.4)$$

(注意在取微分时,$H_{\mu\nu}$不认为是$-H_{\nu\mu}$而同 $H_{\nu\mu}$成为相互独立的变数.)在玻恩最早的论文中,他以为(59.1)及(59.3)也可以描写有电荷的电磁场. 但事实上当电荷存在时,有些场的散度(例如以前的$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$)有奇异性,因此有两种可能的处理: 或者我们假定

(59.1),(59.3)除开奇异点外有效,或者直接地引入电流张量

$$j_\mu = \sum e^{(i)} (\mathrm{d}\xi_\mu^{(i)}/\mathrm{d}t)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}^{(i)}) \quad (\xi_4^{(i)} = \mathrm{i}ct). \tag{59.5}$$

(即直接地引入 δ 函数),而假定

$$\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi j_\mu}{c} \tag{59.6}$$

到处有效.有电荷时的电磁场的场方程便成为(59.1)及(59.6).可以看出,(59.6)可以由

$$S = \int L^{EH} \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \int \sum_i \frac{e^{(i)}}{c} \left[\frac{\mathrm{d}\xi_\mu^{(i)}}{\mathrm{d}t} \cdot A_\mu(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, t) \right] \mathrm{d}t \tag{59.7}$$

对 A_μ 取变化而得来.注意不引入 j_μ 而假定场除开奇异点外适合(59.1),(59.3),那么即使奇异点是已知的,解也不是惟一的.这相当于电荷所集中的点可以为点电荷,也可以为偶极子,四极子等等的事实.因此当电荷存在时,运动方程(59.6)的引入是必要的.

这里产生了一个性质与以前理论完全不同的新问题,即我们能否独立地引入电荷的运动方程,例如 i 质点能否独立地有一个运动方程

$$f^{(i)}(\dot{\xi}_\mu^{(i)}, \ddot{\xi}_\mu^{(i)}, \cdots, H_{\mu\nu}, \cdots) = 0, \tag{59.8}$$

不与(59.1),(59.6)有关.换句话说:如果我们任意地假定一些似(59.8)的式子,它与(59.1),(59.6)是否共同有解.这个问题乃是看到流体力学、万有引力场中的类似问题而引起的.在没有黏滞性的流体运动中,有一个人所熟知的关于涡旋的理论,称为亥姆霍兹(Helmholtz)定理,它证明一些物质所组成的一个线路上的环流,不随时间变化,因此流速场的旋度的奇异点(如果存在的话)完完全全地为流体的运动方程所决定.换句话说,这里流速场的旋度的

奇异点，不能有独立的微分方程. 在引力场中①我们也有类似的情形. 如果场源认为是场的奇异点，场的变化便决定了奇异点的变化，亦即场源的变化. 因为流体力学的运动方程，引力场的方程都是非线性的.（流体力学的运动方程中的未知函数是流速场），所以我们猜想同样的情形也可以在此出现.

如果这样，(59.6)是不需要了！在这个情形下，当我们假定(59.3)在奇异点外是到处成立的，我们便可以由此求出奇异点的运动，场的变化，等等. 代入(59.6)，获得

$$\partial D_{\mu\nu}/\partial x_\nu = \sum B_\mu^{(i)} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \xi^{(i)}), \qquad (59.10)$$

式中 $B_\mu^{(i)}$ 是某些被算出的量. 如果 $B_\mu^{(i)}$ 不与 $\mathrm{d}\xi_\mu^{(i)}/\mathrm{d}t$ 成正比，那么以(59.5)代替 j_μ 的(59.6)式根本没有解.

必须指出：流体力学中亥姆霍兹定理及引力场中的理论所援用的证明方法都是特殊的，它们并未证明所有的非线性方程都具有“奇异点不能有独立运动方程”的性质，只是说明具有这个性质有很大的可能. 因此对于(59.6)，(59.3)等式，在没有具体证明它们确有上面所说的性质前，我们暂时假定(59.8)是可以引入的. 不

---

① A. Einstein, B. Hoffmann and L. Infeld, *Ann. of Math* **39**(1938)65. 这是一篇极重要、极富有创造性的著作，证明了引力场中的场源（如果是场的奇异点）的运动不是独立的. 此文所用的方法是这样的. 在该文中，作者利用了 Bianchi 恒等式，通过场方程，获得了

$$\int B_{\mu i} \mathrm{d}S_i = 0, \qquad (59.9)$$

（见原文的(2.7)，(2.8)式），式中积分面为三维空间中的一个面，$B_{\mu i}$为场的各个分量的函数. 作者说明当积分面包含奇异点 ξ 时，(59.9)依然成立，它最后化为一个含有 ξ，$\dot{\xi}$ 的方程，由此决定了奇异点的运动. 在 1955 年，Infeld 教授访问中国时，曾谈起他如何简化了这个证明. 他利用 Bianchi 恒等式，及爱因斯坦的场方程

$$G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -8\pi k T_{\alpha\beta}$$

(T, G, g 的意义见有关广义相对论的书籍)，获得

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (;\text{代表协变微分})$$

再用 $\delta^{(3)}(x-\xi)$来表出 $T^{\alpha\beta}$（正如 § 48 中的 $\theta_{\mu\nu}$），便获得了奇异点的运动方程. 关于这方面的其他工作，见 B. Фок, *Journ. of Phys. USSR* **1**(1939)1；及胡宁，*Proc. Roy. Irish Acad.* **A51**(1947)87.

然的话，我们既不能也不必讨论这个运动方程的一般形式了.

引入能量-动量张量，定义为

$$T_{\mu\nu}^{EH} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} D_{\lambda\nu} - \delta_{\mu\nu} L, \tag{59.11}$$

由于(59.4)，我们看到

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \tag{59.12}$$

(如果用不同的 L，我们有一个不同的(59.4)，上式便可能不成立.)对于麦克斯韦电磁场，

$$T_{\mu\mu} = 0,$$

但此间的 $T_{\mu\nu}$不适合上式. 不难证明

$$\partial T_{\mu\nu} / \partial x_\nu = c^{-1} H_{\mu\nu} j_\nu. \tag{59.13}$$

证明如下，

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} D_{\lambda\nu} + \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} \frac{\partial D_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial L}{\partial H_{\rho\theta}} \frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} D_{\lambda\nu} + \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} \frac{4\pi}{c} j_\lambda + \frac{1}{8\pi} D_{\rho\theta} \frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial x_\mu}; \end{aligned}$$

因 $H_{\mu\lambda} = -H_{\lambda\mu}, D_{\lambda\nu} = -D_{\nu\lambda}$，上式可以写为

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{8\pi} D_{\rho\theta} \left(\frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\mu\rho}}{\partial x_\theta} + \frac{\partial H_{\theta\mu}}{\partial x_\rho} \right) + \frac{1}{c} H_{\mu\lambda} j_\lambda.$$

由于(59.1)，上式右方括号中的项等于零，因此我们获得了(59.13)式. 因此我们也可以将(56.1)改为(56.4)式.

讨论外界力不存在时一个静止电荷的 $H_{\mu\nu}, D_{\mu\nu}$等. 令 $\boldsymbol{E}$ 代表

$$(\mathrm{i}H_{14}, \mathrm{i}H_{24}, \mathrm{i}H_{34}), \tag{59.14}$$

令 $\boldsymbol{D}$ 代表

$$(\mathrm{i}D_{14}, \mathrm{i}D_{24}, \mathrm{i}D_{34}). \tag{59.15}$$

显然，在这个特殊情形下，我们可以令

$$H_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

因此

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} \{1 - E^2 / E_0^2\}^{-1/2}. \tag{59.16}$$

(59.6)中与我们有关的式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi e\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\xi).$$

取 ξ 在原点,上式右方成为 $4\pi e\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$. 由于在这个特殊情形下 $\boldsymbol{D}$ 的球面对称性,我们得

$$\boldsymbol{D}=e\boldsymbol{r}/r^3. \tag{59.17}$$

由此得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}\{1+D^2/E_0^2\}^{-1/2}=(e\boldsymbol{r}/r)/(r^4+r_0^4)^{1/2}, \tag{59.18}$$

式中 r_0 代表

$$(e/E_0)^{1/2}. \tag{59.19}$$

以上是一个静止电荷的 $H_{\mu\nu}, D_{\mu\nu}$. 至于一个以常速运动的电荷的 $H_{\mu\nu}, D_{\mu\nu}$,那么我们只消用一个洛伦兹变换,便可以求出. 详细结果不在此写出.

在 § 56 中我们曾指出(56.1)式最好先换为(56.4)式,同时我们希望 $T_{\mu\nu}$ 在任何系统的 $t=c$ 面上的面积分是收敛的,$T_{\mu\nu}$ 在不同系统的面 $t=c$ 上的面积分构成一个矢量. 我们在此看一看这两个希望能否满足.

对于静止电子

$$T_{44}=\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})-\frac{E_0^2}{4\pi}\left\{1-\left[1-\frac{E^2}{E_0^2}\right]^{1/2}\right\},$$

以(59.17),(59.18)的结果代入,获得

$$\int T_{44}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\frac{e^2}{r_0}(B_1-B_2),$$

式中

$$B_1=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{1/2}},$$

$$B_2=\int_0^\infty x^2\left\{1-\frac{x^2}{(1+x^4)^{1/2}}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{(1+x^4)^{1/2}}\right)\mathrm{d}(x^3).$$

用分部积分法，可以将 B_2 改为

$$\frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{x^4 \mathrm{d}x}{(1+x^4)^{3/2}} = -\frac{1}{3}\int_0^\infty x\mathrm{d}\left(\frac{1}{(1+x^4)^{1/2}}\right);$$

再用分部积分法，化上式为

$$\frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^4)^{1/2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}B_1.$$

B_1 乃是一个椭圆积分. 事实上，

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^4)^{1/2}} = \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\arctan x\right),$$

而 $F(k,\beta)$ 乃是第一种椭圆积分，定义为

$$F(k,\beta) = \int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\beta}{(1-k^2\sin^2\beta)^{1/2}}.$$

由此知

$$B_1 = \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi\right) = 1.854,$$

由此算出

$$\int T_{44}\mathrm{d}^3x = \frac{2}{3}\frac{e^2}{r_0}1.854. \tag{59.20}$$

同样地，可以计算

$$\int T_{11}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \quad \int T_{22}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \quad \cdots,$$

$$\int T_{11}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \int\left[\frac{1}{4\pi}E_1D_1 - \frac{E_0^2}{4\pi}\left\{1-\left(1-\frac{E^2}{E_0^2}\right)^{1/2}\right\}\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{e^2}{r_0}\left(\frac{1}{3}B_1 - B_2\right);$$

因 $B_2 = \frac{1}{3}B_1$，

$$\int T_{11}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \int T_{22}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \int T_{33}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = 0. \tag{59.21a}$$

由于对称性

$$\int T_{12}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \cdots = 0. \tag{59.21b}$$

又因 $T_{14}=T_{24}=T_{34}=0$，得

$$\int T_{14}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\cdots=0, \tag{59.21c}$$

因此只有 T_{44}的积分不等于零.

对于一个在外界电磁场为零的情形下以常速运动的电子，我们可以利用§56 中的理论，利用(56.21)前的两个式子，证明对于这样的电子，

$$\int T_{\mu 4}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{59.22}$$

也是收敛的. 这样我们便解决了 $T_{\mu\nu}$在不同系统的 $t=c$ 面上的面积分的收敛问题. 同时，由于(59.21)及§56 的讨论结果，知 O'，O'' 系统中的

$$\int_{t'=c'}T'_{\mu 4}\mathrm{d}S'_4,\quad \int_{t''=c''}T''_{\mu 4}\mathrm{d}S''_4 \tag{59.23}$$

的关系，正如一个矢量的分量的关系. 这样，运动方程(56.6)是完全可用的. 将在 O'系统中的运动方程取为(56.14). (56.14)右方第一项是一个矢量，它的值可以由它在电子的静止系统的值经过一个洛伦兹变换而获得. 事实上它正是

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}s}\right)_{s_2}\times(59.20)=-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}s}\right)_{s_2}\frac{2}{3}\frac{e^2}{r_0}1.854. \tag{59.24}$$

将此代替(56.14)右方第一项，移至左方，对 s_2 微分，即获得了有意义的、合乎相对论的运动方程. 如果我们愿意的话，我们可以令(56.14)原来左方的 m 等于零. 现在，只剩了电磁质量，而它等于

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2r_0}1.854=1.2361\frac{e^2}{c^2r_0}.$$

令此等于电子的已知质量 9×10^{-28}克①，得

$$r_0\approx3.5\times10^{-13}\text{ 厘米}, \tag{59.25}$$

① 见本书第 186 页注①.

亦即

$$E_0 = e/r_0^2 = 4 \times 10^{15} \text{ 静电单位}^{①}. \tag{59.26}$$

以上这些结果是令人满意的.

所以能获得以上的结果,主要是因为 $H_{\mu\nu}, D_{\mu\nu}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ 中的关系

$$H_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}/\{1 - D_{\rho\theta}D_{\rho\theta}/2E_0^2\}^{1/2}. \tag{59.27}$$

它对于静止电子而言成为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\{1 + \boldsymbol{D}^2/2E_0^2\}^{1/2}.$$

这个关系使极大的 $D_{\mu\nu}$ 只带来有限的 $H_{\mu\nu}, \boldsymbol{E}$;因此虽然 $D_{\mu\nu}$ 在电源附近的数量级为 $O(r^{-2})$,$T_{\mu\nu}$ 在该处的数量级也是 $O(r^{-2})$,使 $T_{\mu\nu}$ 对空间的积分收敛. 最值得提出的,便是这样的关系使得在离电子较远处(亦即 $|D| \leqslant E_0$ 处),

$$D_{\mu\nu} \approx E_{\mu\nu},$$

因而使运动方程(59.1),(59.6)完全变为麦克斯韦方程.

这样的理论的主要缺点是计算太复杂. 例如讨论(56.14)中相当于辐射的一项,计算便十分困难. 又例如一个电子在外界电磁场中的运动方程[②]. 又例如讨论两个静止电子的作用能. 这样的计算也是很复杂的,结果为[③]

$$\frac{e_1 e_2}{r}\left\{1 - \frac{1}{E_0^2}\frac{e_1^2 + e_2^2}{8r^4} + \cdots\right\},$$

计算的复杂性使得许多问题都没有用这个理论去研究.

一个极有趣味、可以直接用这个理论来研究而不能直接用麦克斯韦方程来研究的问题是光对于光的散射的问题. 如果有两个

---

① 1 电场强度的静电单位 $= 2.997\,924\,58 \times 10^4$ V/m. —— 编者注

② 这里的困难是无法分开电子自身的场 $H_{(\text{自身})}$ 与外界的场. 总电磁场 H 及与它相应的 D 显然是适合(59.1),(59.6)的. 如果我们令(59.17),(59.18)及类似的式子为 $H_{(\text{自身})}$,而令

$$H_{\mu\nu(\text{外界})} = H_{\mu\nu(\text{总})} - H_{\mu\nu(\text{自身})},$$

那么由于右方二项分别地适合(59.1),(59.6),不难证明 $H_{(\text{外界})}$ 必须适合一个与 $H_{(\text{自身})}$ 有关的微分方程,而这是不可了解的.

③ C.D. Thomas, *Phy. Rev.* **54**(1938)367.

光波，一个为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}_1(x,y,z,t),\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{g}_1(x,y,z,t),$$

另一个为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}_2(x,y,z,t),\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{g}_2(x,y,z,t),$$

那么依照麦克斯韦方程，

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2,\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2$$

也是一个解，因而没有一项代表一个波为另一个波散射的现象. 当我们用玻恩的场方程，那么由于场方程的非线性的性质，$\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2$，$\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2$ 不再是解. 将新的解写为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\Delta,\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2+\delta,$$

便看到了光波对于光波散射的现象. 散射波相当于上式中的 Δ 与 δ.

将玻恩的场方程移至量子力学中去有极大的困难. 将场方程写为正则方程是没有困难的（只消援用寻常方法即行），引入量子条件（即力学量的对易关系）也没有困难，写出波方程也没有困难；困难只有一点，即是无法引入场的二次量子化，无法引入湮没（поглошение 及产生（появление）算符，因而不能顺利地应用到许多实际问题上去. 所以不能二次量子化的理由乃是因为一般的 A（或 H 或 D）不是许多特殊的 A 的线性组合，亦即是说，在许多特殊的 A 的线性组合中，如果组合中的系数是任意的，那么这个组合不再是解. 将一般的解写为一个傅里叶积分时，傅里叶系数也不能是互相独立的. 因此我们没有一个一般的 A 的式子而必须对于各个情形下的 A，个别地去考虑. 在这样的理论中，引入湮没及产生算符的形式是极困难的.

为便利读者参考起见，我们写入玻恩的场方程的正则方程. 引入

$$P_r=\frac{\partial L}{\partial(\partial A_r/\partial t)}=-\frac{1}{4\pi \mathrm{i}c}H_{4r}\quad (r=1,2,3),\tag{59.28}$$

$$P_4\equiv 0.$$

引入哈密顿量 H，定义为

$$P_r\frac{\partial A_r}{\partial t}-L=P_r\left[4\pi c^2P_r+\mathrm{i}c\frac{\partial A_4}{\partial x_r}\right]$$
$$-\frac{E_0^2}{4\pi}\left\{1-\left[1+\frac{1}{2E_0^2}(H_{rs}H_{rs}-32\pi^2c^2P_rP_r)\right]^{1/2}\right\}\tag{59.29}$$

(关于质点的部分,没有放入上式内). 运动方程可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A_r}{\partial t}=\dfrac{\partial H}{\partial P_r}, \quad (r=1,2,3)\\ \dfrac{\partial P_r}{\partial t}=-\left\{\dfrac{\partial H}{\partial A_r}-\dfrac{\partial}{\partial x_s}\dfrac{\partial H}{(\partial A_r/\partial x_s)}\right\},\\ 0=-\left\{\dfrac{\partial H}{\partial A_4}-\dfrac{\partial}{\partial x_s}\dfrac{\partial H}{(\partial A_4/\partial x_s)}\right\}.\end{cases} \tag{59.30}$$

最后两式右方事实上即是哈密顿导数

$$\delta\int H(x_1',x_2',x_3')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'/\delta A_r(x_1,x_2,x_3),$$

$$\delta\int H(x_1',x_2',x_3')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'/\delta A_4(x_1,x_2,x_3)$$

(参阅 § 52 的讨论及 320 页注①的文献). 如果我们引入 A_μ 的傅里叶展开,再令 $E_0\to\infty$,理论便与 § 54 中的结果相同. 注意当 E_0 不$\to\infty$时,引入 A_μ 的傅里叶展开只会使公式更复杂化.

不妨指出,虽然我们可以引入洛伦兹规范

$$\partial A_\mu/\partial x_\mu=0,$$

但这样的工作并没有带来什么好处,例如它不能使我们消除纵场等等.

§ 60 含有高阶微商的场方程

另外一种改变麦克斯韦方程的办法是引入场的高阶微商. 在这样的工作中,当然也有很多的任意性. 我们在此先叙述一个最简单的方案①. 在这个方案中,一个以常速运动的电子的总电磁能量动量是有限的,也构成一个矢量,正如在玻恩理论中一样.

令只有电磁场的拉格朗日量为

$$L^{EH}=-\frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}-\frac{1}{16\pi\kappa^2}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}, \tag{60.1}$$

式中 κ 为一常数,而

---

① F. Bopp, *Ann. d. phys.* **38**(1940)345; B. Podolsky, *Phy. Rev.* **62**(1941)68.

$$H_{\mu\nu} = (\partial A_\nu/\partial x_\mu) - (\partial A_\mu/\partial x_\nu), \tag{60.2}$$

与前相同.取

$$S = \int L^{EH} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \mathrm{d}t + \frac{e}{c}\int \dot{\xi}_\mu A_\mu \mathrm{d}s \tag{60.3}$$

对于 A_μ 的变化,便获得

$$\frac{\partial L^{EH}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L^{EH}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_\alpha)} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{\partial L^{EH}}{\partial(\partial^2 A_\mu/\partial x_\alpha \partial x_\beta)}$$

$$= -\frac{e}{c}\int \dot{\xi}_\mu \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)\mathrm{d}s = -\frac{e}{c}\xi'_\mu \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}). \tag{60.4}$$

上式左方即是

$$\delta\left(\int L^{EH}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\right)\Big/\delta A_\mu(\boldsymbol{x}, t).$$

不难算出,(60.4)即是

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\Box\right)\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c}j_\mu; \tag{60.5}$$

如果我们引入洛伦兹规范,得

$$(1 - \kappa^{-2}\Box)\Box A_\mu = -(4\pi j_\mu/c). \tag{60.6}$$

如果我们愿意的话,我们可以令 L^{EH} 为

$$-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{8\pi\kappa^2}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\alpha},$$

那么我们直接获得了(60.6)式.由此可证

$$(1 - \kappa^{-2}\Box)\Box \partial A_\mu/\partial x_\mu = 0,$$

因此只需引入适当的起始条件,即可使 A_μ 在任何时刻满足 $\partial A_\mu/\partial x_\mu = 0$,由而获得(60.5)式.

电子的运动方程,就形式而言,依旧是

$$m\ddot{\xi}_\mu = (e/c)H_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu. \tag{60.7}$$

可以证明,A_μ 事实上是两个分别适合二阶微分方程的势 A 的差.令

$$\begin{cases} A_\mu^{(1)} = (1 - \kappa^{-2}\Box)A_\mu, \\ A_\mu^{(2)} = -\kappa^{-2}\Box A_\mu; \end{cases} \tag{60.8}$$

那么一方面

$$A_\mu = A_\mu^{(1)} - A_\mu^{(2)}, \tag{60.9}$$

而另一方面，

$$\Box A_\mu^{(1)} = \Box(1 - \kappa^{-2}\Box)A_\mu = -(4\pi j_\mu/c), \tag{60.10a}$$

$$\{\Box - \kappa^2\}A_\mu^{(2)} = -\kappa^{-2}\Box(\Box - \kappa^2)A_\mu = -(4\pi j_\mu/c), \tag{60.10b}$$

证实了以上所述的.(60.10a)即寻常电磁场的势的方程,(60.10b)是标量介子场所适合的方程,与(60.10a)的不同乃是左方多出一项 κ^2. 在量子力学中,这种场的质点有一个质量 m,等于

$$h\kappa/2\pi c.$$

(60.10b)的解曾在 § 20 中讨论过.

值得指出,(60.6)与包含(60.9),

$$\Box A_\mu^{(1)} = (\Box - \kappa^2)A_\mu^{(2)} = -(4\pi j_\mu/c) \tag{60.11}$$

的方程组完全等效.不但可以自(60.6)求出(60.9),(60.11)及可以由(60.9),(60.11)求出(60.6),并且(60.6)所需的起始条件(即 $A, \partial A/\partial t, \partial^2 A/\partial t^2, \partial A^3/\partial t^3$ 在 $t=0$ 的值),也正与(60.11)的起始条件(即 $A^{(1)}, \partial A^{(1)}/\partial t, A^{(2)}, \partial A^{(2)}/\partial t$ 在 $t=0$ 的值)完全相同.

引入 $H^{(1)}, H^{(2)}$,定义为

$$H_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{\partial A_\nu^{(1)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu^{(1)}}{\partial x_\nu}, \quad H_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{\partial A_\nu^{(2)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu^{(2)}}{\partial x_\nu}, \tag{60.12}$$

便获得了

$$H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}^{(1)} - H_{\mu\nu}^{(2)}. \tag{60.13}$$

由于(60.8)及 A_μ 所适合的 $\partial A_\mu/\partial x_\mu = 0$,得

$$\partial A_\mu^{(1)}/\partial x_\mu = \partial A_\mu^{(2)}/\partial x_\mu = 0, \tag{60.14}$$

因此(60.11)成为

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial H_{\mu\nu}^{(2)}}{\partial x_\nu} + \kappa^2 A_\mu^{(2)} = + \frac{4\pi j_\mu}{c}. \tag{60.15}$$

如果我们令 $T_{\mu\nu}$ 为

$$\begin{cases} T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(1)} - T_{\mu\nu}^{(2)}, \\ T_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\rho}^{(1)} H_{\rho\nu}^{(1)} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} H_{\rho\theta}^{(1)} H_{\rho\theta}^{(1)}, \\ T_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\rho}^{(2)} H_{\rho\nu}^{(2)} - \frac{\kappa^2}{4\pi} A_\mu^{(2)} A_\nu^{(2)} \\ \qquad + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} H_{\rho\theta}^{(2)} H_{\rho\theta}^{(2)} + \frac{\kappa^2}{8\pi} \delta_{\mu\nu} A_\rho^{(2)} A_\rho^{(2)}, \end{cases} \tag{60.16}$$

便不难证明

$$\partial T_{\mu\nu}^{(1)} / \partial x_\nu = c^{-1} H_{\mu\nu}^{(1)} j_\nu, \tag{60.17a}$$

$$\partial T_{\mu\nu}^{(2)} / \partial x_\nu = c^{-1} H_{\mu\nu}^{(2)} j_\nu, \tag{60.17b}$$

由而获得

$$\partial T_{\mu\nu} / \partial x_\nu = c^{-1} H_{\mu\nu} j_\nu. \tag{60.18}$$

(60.17a)的证明与麦克斯韦方程的情形相同，不必重复. 至于(60.17b)，证明如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\mu\nu}^{(2)}}{\partial x_\nu} = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial H_{\mu\rho}^{(2)}}{\partial x_\nu} H_{\rho\nu}^{(2)} + H_{\mu\rho}^{(2)} \frac{\partial H_{\rho\nu}^{(2)}}{\partial x_\nu} - \kappa^2 A_\mu^{(2)} \frac{\partial A_\nu^{(2)}}{\partial x_\nu} \right. \\ & \left. - \kappa^2 A_\nu^{(2)} \frac{\partial A_\mu^{(2)}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} H_{\rho\theta}^{(2)} \frac{\partial H_{\rho\theta}^{(2)}}{\partial x_\nu} + \kappa^2 A_\nu^{(2)} \frac{\partial A_\nu^{(2)}}{\partial x_\mu} \right\} \\ = & \frac{1}{4\pi} \left\{ H_{\mu\rho}^{(2)} \left[\frac{\partial H_{\rho\nu}^{(2)}}{\partial x_\nu} + \kappa^2 A_\rho^{(2)} \right] \right\} = \frac{1}{c} H_{\mu\rho}^{(2)} j_\rho. \end{aligned}$$

对于含有高阶微商的场方程，可以证明对称而满足(60.18)的 $T_{\mu\nu}$ 不是惟一的，但我们不拟在此深入这个问题，而将(60.16)作为我们的 $T_{\mu\nu}$.

现在我们可以来讨论一个电子的电磁能量、动量，等等. 讨论一个静止的电子. 称 $-\mathrm{i}A_4^{(1)}$，$-\mathrm{i}A_4^{(2)}$ 为 $\varphi^{(1)}$，$\varphi^{(2)}$，得

$$\nabla^2 \varphi^{(1)} = - 4\pi e \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}), \tag{60.19a}$$

$$(\nabla^2-\kappa^2)\varphi^{(2)}=-4\pi e\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}). \tag{60.19b}$$

取电子在原点，则由于这个问题中 φ 的球面对称性，(60.19a)的解为 e/r，(60.19b)的解为 $(e/r)\exp(-\kappa r)$. (60.19a)的解是人所共知，不必讨论. (60.19b)的解为 $(e/r)\exp(-\kappa r)$，证明如下：在 r 不为零处，

$$(\nabla^2-\kappa^2)\left[\frac{e}{r}\mathrm{e}^{-\kappa r}\right]=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}r-\kappa^2\right)\frac{e}{r}\mathrm{e}^{-\kappa r}$$

$$=\frac{e}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathrm{e}^{-\kappa r}-\kappa^2\frac{e}{r}\mathrm{e}^{-\kappa r}=0.$$

而另一方面，在包含原点的一个极小的球面上的面积分

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\left\{\frac{e}{r}\mathrm{e}^{-\kappa r}\right\}=\int r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\left\{-\frac{e}{r^2}-\frac{e\kappa}{r}\right\}\mathrm{e}^{-\kappa r}\approx-4\pi e,$$

而在此极小的球面中的体积积分

$$\int \mathrm{d}V\left(-\kappa^2\frac{e}{r}\mathrm{e}^{-\kappa r}\right)\approx 0,$$

因此(60.19)左右两方对任何体积的积分相等，因而完成了我们所需要的证明. 由(60.19)式，得

$$-\mathrm{i}A_4=\varphi=\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}=(e/r)(1-\mathrm{e}^{-\kappa r}).$$

在 r 极大处，φ 几乎与 (e/r) 相同，即与麦克斯韦场的情形相同；在 r 极小处，φ 几乎成为

$$\frac{e}{r}\left\{1-\left[1-\kappa r+\frac{1}{2}\kappa^2r^2+\cdots\right]\right\}\approx e\kappa+O(r).$$

称 $\mathrm{i}H_{14},\mathrm{i}H_{24},\mathrm{i}H_{34}$ 为 E_1,E_2,E_3，那么在这个情形下的 $\boldsymbol{E}$ 为

$$-\nabla\varphi=\frac{e\boldsymbol{r}}{r^3}\{1-\mathrm{e}^{-\kappa r}-\kappa r\}. \tag{60.20}$$

称

$$\mathrm{i}(1-\kappa^{-2}\Box)H_{14},\quad \mathrm{i}(1-\kappa^{-2}\Box)H_{24},\quad \mathrm{i}(1-\kappa^{-2}\Box)H_{34} \tag{60.21}$$

为 D_1,D_2,D_3，得这个情形下的 $\boldsymbol{D}$：

$$\boldsymbol{D}=-\nabla(1-\kappa^{-2}\nabla)\varphi. \tag{60.22}$$

(所以称(60.21)为 $\boldsymbol{D}$,乃是因为依照(60.5)式,(60.21)的散度等于 $-\mathrm{i}(4\pi/c)j_4=4\pi\rho$.)以所求得的 φ 代入(60.22)右方,或直接自 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=-4\pi e\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$ 计算,获得

$$\boldsymbol{D}=e\boldsymbol{r}/r^3. \tag{60.23}$$

不难计算静止电子的 $T_{\mu\nu}$的积分. 不难证明

$$\int T_{14}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\int T_{24}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\cdots=\int T_{12}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\int T_{23}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\cdots=0. \tag{60.24}$$

称 $\mathrm{i}H_{14}^{(1)},\mathrm{i}H_{24}^{(1)},\cdots$为 $\boldsymbol{E}^{(1)}$;$\mathrm{i}H_{14}^{(2)},\mathrm{i}H_{24}^{(2)},\cdots$为 $\boldsymbol{E}^{(2)}$,得

$$\begin{aligned}T_{44}&=\frac{1}{8\pi}E^{(1)2}-\frac{1}{8\pi}E^{(2)2}-\frac{\kappa^2}{8\pi}\varphi^{(2)2}\\&=\frac{e^2}{8\pi}\left\{\frac{1}{r^4}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\kappa}{r}\right)^2\mathrm{e}^{-2\kappa r}-\kappa^2\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-2\kappa r}\right\}.\end{aligned}$$

右方在 r 极小处为 $O(r^{-2})$,因此 T_{44}对三维空间的体积积分是收敛的. 引入一个小数 ε,利用

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{r^4}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r})r^2\mathrm{d}r&=\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r})\mathrm{d}r\\&=-r^{-1}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r})\Big|_\varepsilon^\infty+\int_\varepsilon^\infty r^{-1}\mathrm{e}^{-2\kappa r}2\kappa\mathrm{d}r\end{aligned}$$

的式子,获得了

$$\begin{aligned}\int T_{44}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\frac{e^2}{8\pi}\left\{\frac{1}{r^4}-\cdots\right\}4\pi r^2\mathrm{d}r\\&=\frac{e^2}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\left[\frac{1}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r})-\frac{2\kappa}{r}\mathrm{e}^{-2\kappa r}-2\kappa^2\mathrm{e}^{-2\kappa r}\right]\mathrm{d}r\\&=\frac{e^2}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left\{-r^{-1}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r})\Big|_\varepsilon^\infty+\kappa\mathrm{e}^{-2\kappa r}\Big|_\varepsilon^\infty\right\}\\&=e^2/2\kappa.\end{aligned} \tag{60.25}$$

又

$$T_{11}=\frac{1}{4\pi}\left\{E_1^{(1)2}-\frac{1}{2}E^{(1)2}-E_1^{(2)2}+\frac{1}{2}E^{(2)2}+\frac{1}{2}\kappa^2\varphi^{(2)2}\right\}. \tag{60.26}$$

由于球面对称性,得

$$\int T_{11}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\frac{1}{4\pi}\int\left[-\frac{1}{6}E^{(1)2}+\frac{1}{6}E^{(2)2}+\frac{1}{2}\kappa^2\varphi^{(2)2}\right]4\pi r^2\mathrm{d}r$$
$$=\int\left\{-\frac{1}{6}\frac{e^2}{r^4}+\frac{e^2}{6}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\kappa}{r}\right)^2\mathrm{e}^{-2\kappa r}+\frac{e^2\kappa^2}{2r^2}\mathrm{e}^{-2\kappa r}\right\}r^2\mathrm{d}r.$$

这在 $\boldsymbol{r}\approx 0$ 处也是收敛的.事实上,

$$\int T_{11}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=e^2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{-\frac{1}{6}\frac{1}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r})+\frac{\kappa}{3r}\mathrm{e}^{-\kappa r}+\frac{2\kappa^2}{3}\mathrm{e}^{-2\kappa r}\right\}\mathrm{d}r$$
$$=e^2\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{6}r^{-1}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r})\Big|_{\varepsilon}^{\infty}-\frac{1}{3}\kappa\mathrm{e}^{-2\kappa r}\Big|_{\varepsilon}^{\infty}\right\}$$
$$=0. \tag{60.27}$$

同样地算出 T_{22},T_{33}的积分等于零.

依照§56中的讨论,一个静止电子的 $T_{\mu\nu}$的体积积分(三维空间的体积积分)的收敛保证了一个以常速运动的电子的 $T_{\mu\nu}$的体积积分的收敛.同时静止电子的 $T_{\mu\nu}$的体积积分的等于零(T_{44}的积分除外)保证了在不同系统中的 $T_{\mu 4}$的积分构成一个矢量.因此,以上的结果是令人满意的.

令(56.14)左方的 m 等于零,取(56.14)对 s_2 的微分,获得了一个运动方程,其中质量完全是电磁质量,等于

$$m\{1-u^2/c^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

而 m 等于

$$e^2\kappa/2c^2.$$

令此等于已知的电子质量,获得

$$\kappa^{-1}=1.4\times 10^{-13}\text{ 厘米}. \tag{60.28}$$

所以能使 $T_{\mu\nu}$等对于三维空间体积的积分收敛,主要的理由是因为 $T_{\mu\nu}$等于 $T_{\mu\nu}^{(1)}-T_{\mu\nu}^{(2)}$,而 $T_{\mu\nu}^{(1)}$,$T_{\mu\nu}^{(2)}$的奇异部分几乎相等,使得 $T_{\mu\nu}$不再含有性质很奇异的项.这个情形与玻恩的理论的情形略有不同;在那里使 $T_{\mu\nu}$的积分收敛的主要理由是将 $\boldsymbol{E}$ 变小了.由于在此处 $T_{\mu\nu}$中有 $-T_{\mu\nu}^{(2)}$的一项,$T_{\mu\nu}$不再是正定的.这是因为 $A_{\mu}^{(1)}$,$A_{\mu}^{(2)}$

虽然必须适合

$$(1-\kappa^{-2}\Box)A_\mu^{(2)}=-\kappa^{-2}\Box A_\mu^{(1)},$$

因而不是完全独立的，但它们在(60.11)中可以取独立的起始条件，因此我们不能保证在一般情形下，$T_{\mu\nu}^{(1)}$与$T_{\mu\nu}^{(2)}$相减后取正值，像上面所讨论的特殊情形似的．当这个理论量子化时，我们通常将$A_\mu^{(1)}$，$A_\mu^{(2)}$认为是两个独立的场，那时$T_{\mu\nu}$中的$-T_{\mu\nu}^{(2)}$项的存在明显地告诉我们能量密度(及总能量)可以是负的．由于这个缺点，这个理论是不够理想的．

以上的理论显然可以推广至含有更高阶的微商①．(60.1)右方可以改为一个含有

$$\partial^2 H_{\mu\nu}/\partial x_\alpha \partial x_\beta,\quad \partial^3 H_{\mu\nu}/\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma,\quad \cdots$$

的式子，(60.4)左方便改变为

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_\alpha)}+\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{\partial L}{\partial(\partial^2 A_\mu/\partial x_\alpha \partial x_\beta)}-\cdots. \tag{60.29}$$

当L选择得当时，(60.4)可以成为

$$\prod_{i=1}^{n}-\frac{1}{\kappa_i^2}\prod_{i=1}^{n}(\Box-\kappa_i^2)(\partial H_{\mu\nu}/\partial x_\nu)=\frac{4\pi j_\mu}{c}, \tag{60.30}$$

式中$\kappa_1,\kappa_2,\cdots$都是常数，都不等于零．引入洛伦兹规范，得

$$\Box\prod_{i=1}^{n}-\frac{1}{\kappa_i^2}\prod_{i=1}^{n}(\Box-\kappa_i^2)A_\mu=-\frac{4\pi j_\mu}{c}. \tag{60.31}$$

如果将L选择为

$$A_\mu A_\mu,\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha},\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},\cdots$$

等等的线性组合，那么我们可以获得

$$(\Box-\kappa_0^2)\prod_{i=1}^{n}-\frac{1}{\kappa_i^2}\prod_{i=1}^{n}(\Box-\kappa_i^2)A_\mu=-\frac{4\pi j_\mu}{c} \tag{60.32}$$

的式子，式中κ_0为一常数，不一定等于零．因为我们希望在离电源远处，A_μ基本上与麦克斯韦方程中的A_μ相同，所以我们选用(60.31)式，亦即$\kappa_0=0$

---

① 微商的阶是无穷大的情形的讨论见 Uhlenbeck and Pais, *Phy. Rev.* **79** (1950)145.

的(60.32)式. 这一点在后面可以看到.

讨论(60.31)的解. 设(60.31)左方的各个 κ^2 都不相等,即假定在这些 κ^2 中没有两个相等的 κ^2. 令 κ_0 代表零. 令 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代表一群数,使

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \prod_{i \neq j} (\alpha - \kappa_i^2)$$

对于任何 α 都等于 1. 这显然要求

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} c_j = 0, \\ \sum c_j \left(\sum_{i \neq j} \kappa_i^2 \right) = 0, \\ \sum c_j \left(\sum_{i,l \neq j, i > l} \kappa_i^2 \kappa_l^2 \right) = 0, \cdots, \\ (-1)^n \sum c_j (\kappa_0^2 \kappa_1^2 \cdots \kappa_{j-1}^2 \kappa_{j+1}^2 \cdots \kappa_n^2) = 1. \end{cases} \tag{60.33}$$

上面共有 $n+1$ 个式子,恰好用来决定 $c_0, c_1, \cdots, c_n$. 所以在原则上,c 等是存在的,是可以决定的. 要求得它们,只需在

$$\sum c_j \prod_{i \neq j} (\alpha - \kappa_i^2) = 1$$

式中分别地令 α 等于 $\kappa_0^2, \kappa_1^2, \cdots$便行. 解答为

$$c_j = \left\{ \prod_{i \neq j} (\kappa_j^2 \kappa_i^2) \right\}^{-1} \quad (j = 0, 1, 2, \cdots).$$

因 $\kappa_0 = 0$,得

$$c_0 = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-\kappa_i^2) \right\}^{-1}. \tag{60.34}$$

现在令

$$A_\mu^{(j)} = c_j \prod_{i \neq j} (\Box - \kappa_i^2) A_\mu.$$

那么一方面由 c_j 的定义,知

$$\begin{aligned} \sum A_\mu^{(j)} &= \sum c_j \left\{ \prod_{i \neq j} (\Box - \kappa_i^2) A_\mu \right\} \\ &= \left\{ \sum c_j \prod_{i \neq j} (\Box - x_i^2) \right\} A_\mu = A_\mu, \end{aligned} \tag{60.35}$$

而另一方面

$$(\Box - \kappa_j^2) A_\mu^{(j)} = c_j \prod_{i=0}^{n} (\Box - \kappa_i^2) A_\mu = c_j (-4\pi j_\mu / c) \prod_{t=1}^{n} (-\kappa_i^2), \tag{60.36}$$

证明了 A_μ 为许多满足二次方程的势 A 的和. $A_\mu^{(0)}$ 满足

$$\Box A_\mu^{(0)} = c_0(-4\pi j_\mu/c)\prod_{i=1}^{n}(-\kappa_i^2) = -(4\pi j_\mu/c),$$

因此 $A^{(0)}$ 即是寻常麦克斯韦方程的势. 在静止电子的特殊情形下, $-\mathrm{i}A_4^{(0)}$ 等于 e/r, 而 $-\mathrm{i}A_4^{(j)}$ 等于

$$\prod_{i=1}(-\kappa_i^2)c_j e\exp(-\kappa_j r)/r.$$

因此在离电子远处整个 A 几乎与麦克斯韦方程的 A 相同. 对于以常速运动的电子,情形也如此. 如果要求 $-\mathrm{i}A_4$ 在电子附近不成为无穷大,那么我们选择 κ_i 等,使 $\sum_{j=0} c_j = 0$. 这个式子是已经满足的.

显然,我们应该令

$$T_{\mu\nu} = \sum_j (T_{\mu\nu})^{(j)} c_j^{-1} \prod_{i=1}^{n}(-\kappa_i^2)^{-1}, \tag{60.37}$$

式中

$$(T_{\mu\nu})^{(j)} = \frac{1}{4\pi}H_{\mu\rho}^{(j)}H_{\rho\nu}^{(j)} - \frac{\kappa_j^2}{4\pi}A_\mu^{(j)}A_\nu^{(j)} + \frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu}H_{\rho\theta}^{(j)}H_{\rho\theta}^{(j)} + \frac{\kappa_j^2}{8\pi}\delta_{\mu\nu}A_\rho^{(j)}A_\rho^{(j)},$$

由此,可以证明 $T_{\mu\nu}$ 满足

$$\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\nu = c^{-1}H_{\mu\nu}j_\nu.$$

很显然,由于(60.33)中第一式, c_j 等不可能都是正的或都是负的,因此(60.37)右方含有正项及负项. 因此,以前的困难并不能借助更高阶微商的引入而被消除.

求(60.31)的解的另一个办法便是§20中的办法. 这就是先求满足

$$\Box\prod(-\kappa_i^2)^{-1}\prod(\Box-\kappa_i^2)\varphi = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$$

的解 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$, 那么(60.31)的解便成为

$$(4\pi/c)\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')j_\mu(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'. \tag{60.38}$$

利用§20的办法,求得 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$ 为

$$\frac{c}{16\pi^4}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}k_0c(t-t')}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0\left[\frac{-\prod\limits_{i=1}(-\kappa_i^2)}{\prod\limits_{i=0}\{-(k^2-k_0^2+\kappa_i^2)\}}\right.$$

$$\left.+ f(\boldsymbol{k},k_0)\delta\{\prod(-k^2-k_0^2+\kappa_i^2)\}\right], \tag{60.39}$$

式中 $f(\boldsymbol{k},k_0)$ 为 $\boldsymbol{k},k_0$ 的任意函数. 将方括号中第一项写为

$$\prod_{i=1}(-\kappa_i^2)\left\{\sum_{j=0}\left[\frac{1}{k^2-k_0^2-\kappa_j^2}\prod_{i\neq j}\frac{1}{(\kappa_j^2-\kappa_i^2)}\right]\right\}$$

$$=\prod_{i=1}(-\kappa_i^2)\sum_{j=0}\frac{c_j}{k^2-k_0^2-\kappa_j^2},$$

将方括号中第二项取为

$$\left\{\prod(-\kappa_i^2)\right\}\sum_j(+\pi\mathrm{i})c_j\frac{k_0}{|k_0|}\delta(k_0^2-k^2-\kappa_j^2),\qquad(60.40)$$

便不难证明

$$A_\mu=\sum A_\mu^{(j)},$$

而 $A_\mu^{(j)}$ 为适合(60.36)的推迟势. 所以我们引入高阶微商,实质上等于将 § 19 的 G 函数中的

$$\frac{1}{k^2-k_0^2}+\pi\mathrm{i}\frac{k_0}{|k_0|}\delta(k^2-k_0^2)$$

改为(60.39)方括号中的项. 这与近代量子电动力学中将一些原来应出现的函数 $\delta(k^2-k_0^2)$ 改为

$$\delta(k^2-k_0^2)-\int_0^\infty\delta(k^2-k_0^2+\kappa^2)G(\kappa)\mathrm{d}\kappa$$

($G(\kappa)$ 为某一个 κ 的函数),性质是相似的[1]. 详细讨论在本书范围以外.

利用 § 20 的结果,不难求出 $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ 与电子在同一个时刻 t 的 $\xi,\dot{\xi},\cdots$ 等的关系. 在 § 20 中,(20.2)的推迟解证明为(20.19)右方,即

$$\int\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{c}\right)/R\mathrm{d}V'-\iint\lambda\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{1}{c}(b^2+R^2)^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\mathrm{J}_1(\lambda b)\mathrm{d}b}{(b^2+R^2)^{1/2}}\mathrm{d}V'.\qquad(60.41)$$

上式第一项见(17.10)式. 在上式第二项中,我们将 ρ 写为

$$\rho(\boldsymbol{r}',t)+\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}\left\{-\frac{1}{c}(b^2+R^2)^{1/2}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{c^2}(b^2+R^2)\right\}+\cdots,$$

便不难做出对 b 的积分. 事实上[2]

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{J}_1(\lambda b)\mathrm{d}b}{(b^2+R^2)^{1/2}}=\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\lambda R\right)\mathrm{K}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\lambda R\right)$$

---

① R.P. Feynman, *Phy. Rev.* **74** (1948) 939 与 1430, A. Соколов 与 Д. Иваненко:《量子场论》,第二部 § 3, e.

② G.N. Watson: Bessel Functions, § 13.6, 第(3)式.

$$= \frac{1}{\lambda R} - \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R},$$

$$\int_0^\infty J_1(\lambda b)\mathrm{d}b = \frac{1}{\lambda}, \quad \int_0^\infty J_1(\lambda b) b\mathrm{d}b = \frac{1}{\lambda^2},$$

又因

$$\frac{\partial}{\partial R}\int_0^\infty J_1(\lambda b)(b^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}b = \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda b)}{(b^2 + R^2)^{1/2}} R\mathrm{d}b$$

$$= \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R}),$$

对 R 积分，得

$$\int_0^\infty J_1(\lambda b)(b^2 + R^2)^{1/2}\mathrm{d}b = \int_0^R \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R})\mathrm{d}R$$

$$+ \left\{\int_0^\infty J_1(\lambda b)(b^2 + R^2)^{1/2}\mathrm{d}b\right\}_{R=0}$$

$$= \left\{\frac{R}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right\} + \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{R}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2},$$

$\cdots,$

以 $e\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}'(t))$ 代 $\rho(\boldsymbol{r}',t)$，以

$$e(\boldsymbol{u}\cdot\nabla_\xi)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{\xi}),\ e(\boldsymbol{u}\cdot\nabla_\xi)^2\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{\xi}) + e(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla_\xi)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{\xi})$$

代替 $\partial\rho/\partial t, \partial^2\rho/\partial t^2, \cdots$（式中 ∇_ξ 为对 $\boldsymbol{\xi}$ 的算子），算出(60.41)的第二项为

$$-e\left(\frac{1}{R} - \frac{e^{-\lambda R}}{R}\right) - \lambda e\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla_\xi)^2\left\{\frac{R}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2}\right\}$$

$$-\lambda e\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla_\xi)\left\{\frac{R}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2}\right\} + \cdots, \tag{60.42}$$

与第一项相加，得

$$e\exp(-\lambda R)\left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{2c^2}\left[\frac{u^2}{R} - \frac{\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{R}}{R} - \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}{R^3} - \lambda\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u})^2}{R^2}\right] + O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right\}. \tag{60.43}$$

以 κ_j 代替"λ"，乘以 $c_j\prod(-\kappa_i^2)$，再相加，便获得了所需的 $-iA_4$（或 φ）.(60.43)与(17.10)的不同，只在 $\exp(-\lambda R)$ 的因子及外加的一项"$-\lambda(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u})^2/R^2$".

同样可以计算以($\rho\boldsymbol{u}/c$)代替 ρ 的(60.41)式.第一项见(17.11)式.第二项算出为

$$-e\frac{\boldsymbol{u}}{c}\left(\frac{1}{R}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda R}}{R}\right)+\frac{e}{c^2}\dot{\boldsymbol{u}}+O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

与第一项合并，成为

$$e\exp(-\lambda R)(\boldsymbol{u}/Rc)+O(c^{-3}). \qquad (60.44)$$

高级项的计算留给读者.

最后我们指出有一个理论，用到两个麦克斯韦场 $A^{(1)}$，$A^{(2)}$①. 在这个理论中，我们令 $A=A^{(1)}-A^{(2)}$，而令 $A^{(1)}$为推迟势，$A^{(2)}$为

$$\frac{1}{2}\{\text{推迟势}+\text{超前势}\}. \qquad (60.45)$$

因此 A 等于

$$\frac{1}{2}\{\text{推迟势}-\text{超前势}\}.$$

这样的一个电子所施于它本身的场 $H_{\mu\nu}$等于

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^4}(\dot{\xi}_\mu\dddot{\xi}_\nu-\dddot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu),$$

产生了§58 中的运动方程(58.36). 但这个理论有两个缺点. 第一，第二个场对于不同的电荷的相互作用而言必须是不存在的，因为对于不同的电荷的相互作用而言，我们所需要的正是推迟势. 第二，即使 $A^{(2)}$已知必须满足某个微分方程，我们也无法选择起始条件，使它的解成为(60.45). 由于这两个缺点，我们觉得这个理论还有改进的必要.

§61　直接相互作用的理论

当我们所讨论的对象只有一群电子，那么我们可以计算各个电子所放射的电磁场，将后者表为电子的速度、加速度，…(即运动状况)的函数，代入电子的运动方程，而获得了只含有不同电子的 ξ，$\dot{\xi}$，$\ddot{\xi}$，…的运动方程. 如果不讨论个别电子所施于它本身的力

① Д. Иваненко 与 А. Соколов:《经典场论》§34 Б.

时，这样的理论是比较简单的.

有时，我们不直接地将总的电磁场求出，代入各个电子的运动方程，像上面所说的，而采取另一种方法. 我们在下面叙述这个方法，它在实质上与以上所说是相同的.

在§49中，我们曾考虑了

$$S_1+S_2+S_3'(\text{或 } S_3'') \tag{61.1}$$

在 ξ，A 等变化时所产生的变化，由而获得了运动方程(49.15)，(49.19). 如此获得的运动方程中的 ξ，A 使(61.1)为最小. 显然，如果令满足这个运动方程的 A 代入(61.1)，再去求(61.1)的最小，那么 ξ 的运动方程应该是在(49.15)，(49.19)式中消去 A 后的式子，亦即是我们所要求的式子. 换句话说，已知(49.15)，(49.19)使(61.1)最小，那么在条件(49.19)下使(61.1)最小的 ξ，A 依然是(49.15)，(49.19)，因此在条件(49.19)下使(61.1)最小的 ξ 是(49.15)，(49.19)中消去 A 后的 ξ.

因

$$\begin{aligned}
S_3'&=-\frac{1}{16\pi}\int H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=-\frac{1}{16\pi}\int\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=-\frac{1}{8\pi}\int\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=+\frac{1}{8\pi}\int A_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}H_{\mu\nu}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=(8\pi)^{-1}\int A_\nu(-4\pi/c)j_\nu\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\\
&=-\frac{1}{2}S_2,
\end{aligned}$$

得

$$S_3'+S_2=\frac{1}{2}S_2. \tag{61.2}$$

首先讨论用各个电子的不同时间坐标 $\tau^{(1)},\tau^{(2)},\cdots$ 为独立变数的情形. S_1 依然为

$$\sum_i - m^{(i)}c^2\int[1-(u^{(i)}/c)^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau^{(i)}. \qquad (61.3)$$

为简单符号起见,假定我们这里只有两个电子.将公式推广至含有 n 个电子的情形,乃是极易的.不讨论电子的自相互作用时,在第一个电子上的 A_μ 等于

$$\int\frac{\dot{\xi}_\mu^{(2)}e^{(2)}}{r}\delta[r-c(\tau_1-\tau_2)]\mathrm{d}s_2$$

或

$$\int\frac{\xi'^{(2)}_\mu e^{(2)}}{r}\delta[r-c(\tau_1-\tau_2)]\mathrm{d}\tau_2 \qquad (61.4)$$

(注意 $\dot{\xi}\equiv \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s,\xi'\equiv\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\tau$ 的区别).式中 r^2 代表

$$(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})^2+(x_2^{(1)}-x_2^{(2)})^2+(x_3^{(1)}-x_3^{(2)})^2,$$

即两个电子距离的平方.积分极限可以是 $(-\infty,\infty)$,也可以是 $(-\infty,\tau_1)$,因为即使用 $(-\infty,\infty)$ 为积分极限,(61.4)依旧代表推迟势.由(61.2),(61.4),得

$$\begin{aligned}
S_3'+S_2&=\frac{1}{2}S_2\\
&=\frac{1}{2}\left\{\int\frac{e^{(1)}}{c}\dot{\xi}_\mu^{(1)}A_\mu(1)\mathrm{d}s_1+\int\frac{e^{(2)}}{c}\dot{\xi}_\mu^{(2)}A_\mu(2)\mathrm{d}s_2\right\}\\
&=\frac{1}{2c}\left\{\int e^{(1)}\xi'^{(1)}_\mu A_\mu(1)\mathrm{d}\tau_1+\int e^{(2)}\xi'^{(2)}_\mu A_\mu(2)\mathrm{d}\tau_2\right\}\\
&=\frac{1}{2c}\left\{\int e^{(1)}\xi'^{(1)}_\mu\mathrm{d}\tau_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{(2)}\xi'^{(2)}_\mu\frac{1}{r}\delta[r-c(\tau_1-\tau_2)]\mathrm{d}\tau_2\right.\\
&\quad\left.+\int e^{(2)}\xi'^{(2)}_\mu\mathrm{d}\tau_2\int_{-\infty}^{\infty}e^{(1)}\xi'^{(1)}_\mu\frac{1}{r}\delta[r-c(\tau_2-\tau_1)]\mathrm{d}\tau_1\right\}.
\end{aligned} \qquad (61.5)$$

当我们引入 $(-\infty,\infty)$ 为上面右方未写出的积分极限,我们获得

$$S_3'+S_2=\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi'^{(1)}_\mu\xi'^{(2)}_\mu\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\frac{1}{2r}\{\delta[r-c(\tau_1-\tau_2)]$$

$$+\delta[r-c(\tau_2-\tau_1)]\}$$

$$=\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi'^{(1)}_{\mu}\xi'^{(2)}_{\mu}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\delta[r^2-c^2(\tau_1-\tau_2)^2].$$

(61.6)

上式右方亦可写为

$$\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\xi}^{(1)}_{\mu}\dot{\xi}^{(2)}_{\mu}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\delta[r^2-c^2(\tau_1-\tau_2)^2].$$

取(61.3),(61.6)的和,对 $\xi^{(1)}_{\mu}$ 的变化应用变分法,便获得了所需的运动方程[①]. 计算方程见 § 51(先将对 τ 的积分表为对 s 的积分,引入拉格朗日乘子,等等),在此不拟重复.

这样算出的运动方程为

$$m^{(1)}\frac{\mathrm{d}^2\xi^{(1)}_{\mu}}{\mathrm{d}s_1^2}=\frac{e^{(1)}}{c}H_{\mu\nu}\dot{\xi}^{(1)}_{\nu},$$

而 $H_{\mu\nu}$相当于以下的 A_{μ},

$$e^{(2)}\int_{-\infty}^{\infty}\xi'^{(2)}_{\mu}\mathrm{d}\tau_2\,\frac{1}{2r}\{\delta[r-c(\tau_1-\tau_2)]+\delta[r-c(\tau_2-\tau_1)]\},$$

因而是推迟势及超前势的平均.

为补救这个缺点,有些作者在(61.1)中引入另一项[②]

$$\sum e^{(i)}/c\int\xi'^{(i)}_{\mu}M_{\mu}(i)\mathrm{d}\tau_i, \qquad (61.7)$$

式中 M 代表某一个场. 如果令这个场为外界场,那么很显然地并不能解决困难.

可以指出:像上面所指出的缺点,在这样的理论中是不易克服的[③]. (61.1)必然是第一个及第二个电子的对称函数,因而当它包含

---

① 这通常称为 Fokker 变分原理,参阅 A.D. Fokker, *Zeits. f. Phys.* **58**(1929) 386.

② P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A180**(1942)1.

③ 也有一些理论,不将此认为缺点,见 Wheeler 与 Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **21**(1949)425.

$$\delta[r - c(\tau_1 - \tau_2)]$$

时,必然包含

$$\delta[r - c|\tau_1 - \tau_2|],$$

亦即包含

$$\delta[r^2 - c^2(\tau_1 - \tau_2)^2], \tag{61.8}$$

因而任何一个电子的运动方程必然地包含了其他电子所产生的推迟势及超前势.

在这里可以附带地指出,如果一个电子所作用于它本身的影响是(58.36)中的一项

$$\frac{2}{3}(e^2/c^5)(\dot{\xi}_\mu \dddot{\xi}_\nu - \dot{\xi}_\nu \dddot{\xi}_\mu)\dot{\xi}_\nu, \tag{61.9}$$

这个影响不能自$(S_3'+S_2)$中引入了相当于电子自相互作用的一项取变化而获得.如果在$(S_3'+S_2)$中引入了这样的项:

$$\sum_i \int f(\dot{\xi}^{(i)}, \ddot{\xi}^{(i)}, \dddot{\xi}^{(i)}, \cdots)\mathrm{d}s_i \tag{61.10}$$

(注意由一般性的讨论,可以相信 f 的变数中没有 ξ),那么自§51,可见一个电子的运动方程为

$$\cdots + \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}\frac{\partial f}{\partial \dddot{\xi}_\rho} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial f}{\partial \ddot{\xi}_\rho} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}_\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\eta(s)\dot{\xi}_\rho + \frac{e}{c}A_\rho\right) - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial \xi_\rho}\dot{\xi}_\nu = 0 \tag{60.11}$$

(参阅§51的(51.5)式),式中 A_ρ 为其他电子所产生的势。η 满足

$$\cdots + \dot{\xi}_\rho \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}\frac{\partial f}{\partial \dddot{\xi}_\rho} - \dot{\xi}_\rho \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial f}{\partial \ddot{\xi}_\rho} + \dot{\xi}_\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}_\rho} - c^2\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{61.12}$$

为使得(61.11)与(58.36)相同,我们要求

$$\cdots + \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}\frac{\partial f}{\partial \dddot{\xi}_\rho} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial f}{\partial \ddot{\xi}_\rho} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}_\rho} + \eta\ddot{\xi}_\rho + \dot{\xi}_\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s}$$
$$= m\ddot{\xi}_\rho - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}(\dot{\xi}_\rho \dddot{\xi}_\nu - \dot{\xi}_\nu \dddot{\xi}_\rho)\dot{\xi}_\nu. \tag{61.13}$$

自(61.13)可以推出(61.12),所以我们只需求(61.13)的解.令

$$\eta = m + g(\dot{\xi}, \ddot{\xi}, \cdots),$$

便得了一个 f, g 的式子.由于 f, g 没有下标,f, g 必须分别地含有二个或四个或六个 ξ 等等.讨论 f, g 中的某些项,在代入(61.13)左方后含有三个 ξ 及五个点(指 ξ 字样上点的总数),这样才可以与(61.13)右方第二项 $\dot{\xi}_\rho \dddot{\xi}_\nu \dot{\xi}_\nu$ 相等.f 的这些项必须含有四个 ξ 及五个点.因 $\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu, \dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\mu$ 都是常数,含有四个 ξ 及五个点的乘积都是零或常数.因此 f 中不可能含有一项,在代入(61.13)后成为 $\dot{\xi}_\rho \dddot{\xi}_\nu \dot{\xi}_\nu$.抛弃了 f 后,我们要求 g 中有一项 g_1,满足

$$\dot{\xi}_\rho \mathrm{d}g_1/\mathrm{d}s = -\frac{2}{3}(e^2/c^5)\dot{\xi}_\rho \dddot{\xi}_\nu \dot{\xi}_\nu.$$

这显然是没有解的.以上证明了我们不能在拉格朗日函数内引入一项,用来描写电子对于它本身的作用.(这个情形,使得直接相互作用理论的量子化发生了困难.)

现在讨论只用一个时间变数的方案.我们用此来研究两个以小速度运动的电子的相互作用及运动方程.S_1 成为

$$\sum_i - m^{(i)}c^2\int\{1-[u^{(i)}/c]^2\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \sum_i\int\frac{1}{2}m^{(i)}(u^{(i)})^2\mathrm{d}t, \tag{61.14}$$

S_2+S_3' 成为

$$\sum_i \frac{1}{2c}e^{(i)}\int \xi'^{(i)}_\mu A^{(i)}_\mu \mathrm{d}t = \sum \frac{1}{2c}e^{(i)}\int\{\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\boldsymbol{A}^{(i)} - c\varphi^{(i)}\}\mathrm{d}t, \tag{61.15}$$

式中 $A^{(i)}_\mu$ 代表在 i 电子处的 A_μ.当只有两个电子时,

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}^{(1)} = \dfrac{e^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}}{cR} - \dfrac{e^{(2)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}}{c^2} + O\left(\dfrac{1}{c^3}\right),\\[2ex] \varphi^{(1)} = \dfrac{e^{(2)}}{R} + \dfrac{e^{(2)}}{2c^2}\left\{\dfrac{u^{(2)^2}}{R} + \dfrac{\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R}}{R} - \dfrac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)})^2}{R^3}\right\} + O\left(\dfrac{1}{c^3}\right).\end{cases} \tag{61.16}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 代表自 $e^{(1)}$ 至 $e^{(2)}$ 的矢量(参阅(17.10),(17.11)两式).(61.15)的被积分项成为

$$\frac{e^{(1)}}{2c}\left\{\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\left[\frac{e^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}}{cR}-\frac{e^{(2)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right]\right.$$
$$\left.-c\left[\frac{e^{(2)}}{R}+\frac{e^{(2)}}{2c^2}\left(\frac{u^{(2)2}}{R}+\frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R}}{R}-\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)})^2}{R^3}\right)+O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right]\right\}$$
$$+[1,2].$$

忽略了 $O(c^{-3})$ 及 $O(u_1^2)$,$O(u_2^2)$,$O(u\,\dot{u})$,上式成为

$$-\frac{1}{2}\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{R}-\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{4c^2}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\right)+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2c^2}\frac{\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}}{R}+[1,2]. \tag{61.17}$$

如果我们愿意的话,我们可以应用分部积分法,将上式第二项改为

$$\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{4c^2}\boldsymbol{u}^{(2)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)=\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{4c^2}\left\{\boldsymbol{u}^{(2)}\cdot\frac{\boldsymbol{u}^{(2)}-\boldsymbol{u}^{(1)}}{R}\right.$$
$$\left.+(\boldsymbol{u}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R})\left(-\frac{1}{R^3}\right)[\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{u}^2-\boldsymbol{u}^{(1)})]\right\};$$

这样便在 L 中消去了 $\dot{\boldsymbol{u}}$. 由于 $O(u_1^2)$,$O(u_2^2)$等的被忽略,(61.17)成为

$$-\frac{1}{2}\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{R}+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{4c^2}\frac{\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}}{R}$$
$$+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{4c^2}\frac{(\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{R})(\boldsymbol{u}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}+[1,2]$$
$$=-\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{R}+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2c^2}\frac{\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}}{R}$$
$$+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2c^2}\frac{(\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{R})(\boldsymbol{u}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}. \tag{61.18}$$

整个的拉格朗日量为

$$\sum\frac{1}{2}m^{(i)}(u^{(i)})^2$$

加上(61.18). 由这个拉格朗日量可以算出总哈密顿量(用标准办法):

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}^{(1)}} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}^{(2)}} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)} - L = \frac{1}{2} m^{(1)} u^{(1)2} + \frac{1}{2} m^{(2)} u^{(2)2}$$
$$+ \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{R} \left\{ \boldsymbol{u}^{(1)} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)} + \frac{(\boldsymbol{u}^{(1)} \cdot \boldsymbol{R})(\boldsymbol{u}^{(2)} \cdot \boldsymbol{R})}{R^2} \right\}. \tag{61.19}$$

右方除开第一第二项外,正与§6中的(6.20)式相同.由此可见总哈密顿量依然是带电体及电磁场的总能量①.

不难写出由上面的拉格朗日而获得的运动方程:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}^{(1)}} = m\boldsymbol{u}^{(1)} + \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{2c^2} \left(\frac{\boldsymbol{u}^{(2)}}{R} + \frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}^{(2)} \cdot \boldsymbol{R})}{R^3} \right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}^{(1)}} = - \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{R^3} \boldsymbol{R} + \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{2c^2} \left\{ + \frac{\boldsymbol{u}^{(1)} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)}}{R^3} \boldsymbol{R} \right.$$
$$+ 3 \frac{(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)})(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)})}{R^5} \boldsymbol{R}$$
$$\left. - \frac{\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)}) + \boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)})}{R^3} \right\},$$

因此

$$\cdots - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}^{(1)}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}^{(1)}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}^{(1)}} = 0 \tag{61.20}$$

成为

$$m\dot{\boldsymbol{u}}^{(1)} + e^{(1)} e^{(2)} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{c^2 R^3} [\boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}^{(2)} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)})]$$
$$+ \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{2c^2} \left\{ \frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}}{R} + \frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}^{(2)})}{R^3} \right\} = 0.$$

如果不用分部积分法去改变(61.17)中的第二项,L 中含有 $\dot{\boldsymbol{u}}^{(1)}$,$\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}$,因此必须记住(61.20)中有 $\partial L/\partial \dot{\boldsymbol{u}}$ 的一项.在同样的近似程度下,以(61.17)代入(61.20),也获得上面的运动方程.如果我们不忽略 $u^{(1)2}$,$u^{(2)2}$,类似的计算给我们

① 当 L 为(61.17)而含 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 时,哈密顿量也可以求得.参阅305页注①的文献.用这个文献中的办法,可以证明哈密顿量也等于(61.19).

$$m^{(1)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(1)}+\frac{e^{(1)}e^{(2)}\boldsymbol{R}}{R^3}\left\{1+\frac{u^{(2)2}}{2c^2}-\frac{3(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)})^2}{2c^2R^2}\right\}$$
$$+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{c^2R^3}[\boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}^{(1)})-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)})]$$
$$+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2c^2}\left\{\frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}}{R}+\frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)})}{R^3}\right\}=0. \qquad (61.21)$$

可以指出：自(17.12)，(17.13)计算出第二个电子的电磁场，代入

$$m^{(1)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(1)}=e[\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{u}^{(1)}\times\boldsymbol{H})/c],$$

所获得的式正与(61.21)完全相同.(注意此处的 $\boldsymbol{R}$ 代表自 $e^{(1)}$ 至 $e^{(2)}$ 的矢量，与(17.12)，(17.13)中的 $\boldsymbol{R}$ 不同.)

以上是用推迟势计算的.如果用超前势，$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\varphi^{(1)}$ 的式子应改为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}^{(1)}=\dfrac{e^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}}{cR}+\dfrac{e^{(2)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}}{c^2}+O\left(\dfrac{1}{c^3}\right),\\ \varphi^{(1)}=\dfrac{e^{(2)}}{R}+\dfrac{e^{(2)}}{2c^2}\left\{\dfrac{u^{(2)2}}{R}+\dfrac{\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R}}{R}-\dfrac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)})^2}{R^3}\right\}+O\left(\dfrac{1}{c^3}\right).\end{cases} \qquad (61.22)$$

这个式子与(61.16)的差别只在其中几个项的符号不同.事实上将(61.16)的右方写为(c^{-1})的幂级数，将偶数项的符号改变(第一，第三，…等项符号不变，第二，第四，…等项符号改变)，(61.16)便变成了(61.22).因此，在此处的近似程度下，拉格朗日函数，运动方程都与推迟势的计算结果一样.但这并不意味着推迟势与超前势的计算在任何近似程度下都一样，因为(61.22)与(61.16)显然是不一样的.

在以上的讨论中，虽然在最后的拉格朗日量的式中描写电磁场的变数没有出现，但在实际的运动中，我们可以想像电磁场依然是出现的；只是它不在计算中出现而已.在近代的理论中有一种理论，直接去假定只含有电子坐标 ξ 及 $\dot{\xi}$，$\ddot{\xi}$ 等的拉格朗日量，而根本不去触及电子之间的相互作用是否须通过一个场的问题.例如直接地引入拉格朗日量

$$\sum_i - m^{(i)}c^2\int ds_i + \sum_{i\neq j}\sum \frac{1}{c}e^{(i)}e^{(j)}$$

$$\times \iint \dot{\xi}_\mu^{(i)}\dot{\xi}_\mu^{(j)}\delta[(\xi_\nu^{(i)} - \xi_\nu^{(j)},\xi_\nu^{(i)} - \xi_\nu^{(j)})]ds_i ds_j \quad (61.23)$$

或

$$\sum_i - m^{(i)}c^2\int ds_i + \sum_{i\neq j}\sum \frac{1}{c}e^{(i)}e^{(j)}$$

$$\times \iint \dot{\xi}_\mu^{(i)}\dot{\xi}_\mu^{(j)}G[(\xi_\nu^{(i)} - \xi_\nu^{(j)},\xi_\nu^{(i)} - \xi_\nu^{(j)})]ds_i ds_j, \quad (61.24)$$

式中 G 为某一个函数. 将 G 取为适当的函数后,我们可以在上式第二项的取和中,引入 $i=j$ 的一项. 这样的拉格朗日量事实上有时可以相当于消去电磁场的(61.1),但此处的 S_3' 不是

$$-(16\pi)^{-1}H_{\rho\theta}H_{\rho\theta}$$

的积分,此间的电磁场不适合麦克斯韦方程. 换句话说,已给了(61.24),有时有可能引入一个新的(61.1),使电磁场适合一个新式子,同时在新的(61.1)中消去电磁场后,使它成为(61.24). 那时利用(61.24)去讨论电子的运动方程时,我们依然可以想像电磁场的存在. 如果(61.24)不可能由一个适当的(61.1)像以上所说似地导出,那么这样的电子作用不是通过一个场的,因而是不可想像的. 在一个唯物的理论中,一个物体对其他物体的影响,必须是由前者逐渐传播出来的,因而场的观念几乎是必要的.

值得指出:在这样的直接相互作用理论中,我们通常引入各个电子的不同的时间坐标 $\tau_1,\tau_2,\cdots$ 或各个电子的固有时 $s_1,s_2,\cdots$,这样才可以保证理论符合相对论. 当我们用同一个时间坐标后,我们便不易选择一个 S,使它在洛伦兹变换下为不变量. 例如我们不易证明(61.18)为一个不变量.

将式(61.23)中的 δ 改为 G,显然并不损害(61.23)式的相对论性. 注意 $\delta(x_\mu,x_\mu)$ 可以写为

$$\delta(x_\mu,x_\mu) = \frac{1}{4\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ick_0t}\frac{1}{k^2-k_0^2}d^3\boldsymbol{k}dk_0$$

(参阅 § 19 对于 G_1 的计算),因此(61.24)中 G 的一个选择是

$$\frac{1}{4\pi^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\xi^{(i)}-\xi^{(j)})-\mathrm{i}ck_0(\tau^{(i)}-\tau^{(j)})}\left\{\frac{1}{k^2-k_0^2}-\int \mathrm{d}\kappa\,\frac{f(\kappa)}{k^2-k_0^2+\kappa^2}\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0. \tag{61.25}$$

由此我们获得了一个新的直接相互作用理论. 注意 G 的挑选也不是完全任意的. 如果将 G 取为

$$\frac{(\tau^{(i)}-\tau^{(j)})}{|\tau^{(i)}-\tau^{(j)}|}\delta(\xi_\mu^{(i)}-\xi_\mu^{(j)},\xi_\mu^{(i)}-\xi_\mu^{(j)})$$
$$=\frac{1}{4\pi^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\xi^{(i)}-\xi^{(j)})-\mathrm{i}ck_0(\tau^{(i)}-\tau^{(j)})}\pi\mathrm{i}\,\frac{k_0}{|k_0|}\delta(k_0^2-k^2)\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0$$

(参阅 § 19),那么(61.24)的第二项在积分后变为零. 如果将(61.24)中的 G 取为

$$\{\xi_\mu^{(i)}-\xi_\mu^{(j)},\xi_\mu^{(i)}-\xi_\mu^{(j)}\}^{-1}=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\xi^{(i)}-\xi^{(j)})-\mathrm{i}ck_0(\tau^{(i)}-\tau^{(j)})}\delta(k_0^2-k^2)\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0,$$

两个质点的作用也变得太小了. 因此(61.25)几乎是惟一的比较好的式子. 当然它亦有这个理论中不可避免的缺点,即是作用于电子上的势及场乃是推迟势与超前势的平均.

如果将(61.23)的 $[\xi_\nu^{(i)}-\xi_\nu^{(j)},\xi_\nu^{(i)}-\xi_\nu^{(j)}]$ 改为

$$\kappa\int \mathrm{J}_1(\kappa b)\mathrm{d}b\delta\{c_2(\tau^{(i)}-\tau^{(j)})^2-b^2-|\xi^{(i)}-\xi^{(j)}|^2\}, \tag{61.26}$$

那么我们获得了自 § 60 的 Podolsky 的场方程而求出的直接相互作用理论. 理由是极简单的. 在 § 60 的理论中,场的 S 等于

$$-\frac{1}{16\pi}\int\left\{H_{\mu\nu}H_{\mu\nu}+\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{8\pi}\int\left(H_{\mu\nu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2 H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{8\pi}\int A_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[H_{\mu\nu}-\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2 H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{2c}\int A_\nu j_\nu\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,$$

因此 $S_3+S_2=\frac{1}{2}S_2$,与以前相同. 如果只有两个电子,第一个电子对于 $\frac{1}{2}S_2$ 的贡献为

$$\frac{1}{2c}\int j_\nu^{(1)}A_\nu(1)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t=\frac{1}{2c}\int j_\nu^{(1)}[A_\nu^{(1)}(1)-A_\nu^{(2)}(1)]\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t. \tag{61.27}$$

因

$$A_\nu^{(1)} = \frac{1}{c}\int (j_{\nu,\mathrm{ret}}^{(2)}/r)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}^{(2)},$$

$$A_\nu^{(2)} = \frac{1}{c}\int (j_{\nu,\mathrm{ret}}^{(2)}/r)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$$-(\kappa/c)\int j_\nu\left(\boldsymbol{x}^{(2)}, t - \frac{1}{c}(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\mathrm{J}_1(\kappa b)}{(b^2+r^2)^{1/2}}\mathrm{d}b\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$$(r = |\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)}|),$$

(61.27)成为

$$\frac{\kappa}{2c^2}\iiint j_\nu(\boldsymbol{x}^{(1)},\tau^{(1)})j_\nu(\boldsymbol{x}^{(2)},\tau^{(2)})\frac{\mathrm{J}_1(\kappa b)}{\{b^2 + |\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)}|^2\}^{1/2}}$$

$$\times\delta\left[\tau^1 - \tau^2 - \frac{1}{c}(b^2 + |\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)}|^2)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}^{(1)}\mathrm{d}\tau^{(1)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}^{(2)}\mathrm{d}\tau^{(2)}\mathrm{d}b.$$

与第二个电子对于$\frac{1}{2}S_2$的贡献相加，将$\boldsymbol{x}$换为ξ，获得

$$(\kappa/c)e^{(1)}e^{(2)}\iiint\dot{\xi}_\mu^{(1)}\dot{\xi}_\mu^{(2)}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{J}_1(\kappa b)$$

$$\times\delta[c^2(\tau^{(1)} - \tau^{(2)})^2 - b^2 - |\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^2]\mathrm{d}b. \qquad (61.28)$$

除了(ij)与(12)字样上的差别外，上式即是(61.26)乘上$c^{-1}e^{(1)}e^{(2)}\dot{\xi}_\mu^{(1)}\dot{\xi}_\mu^{(2)}$对$s_1, s_2$的积分.

可以证明，(61.26)即是以

$$(k^2 - k_0^2)^{-1} - (k^2 - k_0^2 + \kappa^2)^{-1}$$

代替(61.25)的花括号内的项而构成的(61.25). 也可以证明在这个理论中，我们可以在(61.23)第二项中引入$i=j$的项.

最后，让我们指出，也不难在这里建立只用一个时间变数的拉格朗日函数. 每个电子所产生的$\boldsymbol{A}, \varphi$见(60.43)，(60.44)式. 如果只有两个电子，$\frac{1}{2}S_2$等于

$$\frac{e^{(1)}}{2c}\left\{\boldsymbol{u}^{(1)}\exp(-\lambda R)\left[\frac{e^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}}{cR} + \cdots\right]\right.$$

$$-c\exp(-\lambda R)\left[\frac{e^{(2)}}{R} + \frac{e^{(2)}}{2c^2}\left(\frac{u^{(2)2}}{R} + \frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^{(2)})^2}{R^3} - \lambda\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)})^2}{R^2}\right)\right]\right\} + [1,2];$$

在忽略$O(u_1^2)$，$O(u_2^2)$，$O(c^{-3})$的情形下成为

$$\exp(-\lambda R)\left\{-\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{R}+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2c^2}\frac{\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}}{R}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2c^2}\frac{(\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{R})(\boldsymbol{u}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R})}{R^3}+\frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2c^2}\lambda\frac{(\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\boldsymbol{R})(\boldsymbol{u}^{(2)}\cdot\boldsymbol{R})}{R^2}\right\}.$$

由这个拉格朗日量而算出的哈密顿量及运动方程等不拟在此讨论,因为这个讨论没有很多意义.

§62 多时理论

多时理论是由量子电动力学的研究而来的①,对象是含有固定数目的电子的量子系统.引入这样理论的目的,是使所写出的波方程完全地符合相对论.不难看出,这个理论可以几乎一字不改地拿到经典电动力学中来.由于多时理论及"超多时理论"(сверхмнотовременный формализм)在近代量子力学中的重要性,我们在此叙述经典电动力学的多时理论.

在这个理论中,电子数目是固定的,共 n 个.独立变数是它们的固有时 $s_1,s_2,\cdots$.被研究的函数是电磁场的势 A_μ 及电子的位置 ξ_μ,动量 p_μ.我们并不讨论 $s_1,s_2,\cdots$等所有的值,而只讨论 $s_1,s_2,\cdots$满足

$$(\xi_\mu^{(i)}-\xi_\mu^{(j)})(\xi_\mu^{(i)}-\xi_\mu^{(j)})>0\quad(i\neq j)\tag{62.1}$$

的情形.在这里,$\xi_\mu^{(i)},p_\mu^{(i)}$ 是 s_i 的函数,而 A_μ 不但是 $s_1,s_2,\cdots$等的函数,并含有一些参量 x_1,x_2,x_3,x_4,成为

$$A_\mu=A_\mu(x_1,x_2,x_3,x_4;s_1,s_2,\cdots).\tag{62.2}$$

必须强调,(62.2)中的 x_μ(虽然含有 t 字样)在这里的理论中的地位是一些参量.我们假定 ξ,p,A 的运动方程为

$$\mathrm{d}\xi_\mu^{(i)}/\mathrm{d}s_i=\frac{1}{m_i}\left\{p_\mu^{(i)}-\frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(\xi^{(i)};s_1,s_2,\cdots)\right\},\tag{62.3}$$

---

① P.A.M. Dirac, В. Фок and Б. Подольский, *Sow. Phys.* **2**(1932)468; P.A.M. Dirac, *Annal de l'Inst. H. Poincaré*, 9, 13.

$$\mathrm{d}p_\mu^{(i)}/\mathrm{d}s_i = (e/c)\dot{\xi}_\nu^{(i)}(\partial A_\nu/\partial x_\mu)_{x=\xi^{(i)}}, \tag{62.4}$$

$$\partial A_\mu/\partial s_i = 4\pi e^{(i)}\dot{\xi}_\mu^{(i)} D(x - \xi^{(i)}), \tag{62.5}$$

式中 $D(\boldsymbol{x},t)$代表

$$\frac{1}{8\pi^3}\int \mathrm{e}^{ikx}\frac{\sin ctk}{k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = -\frac{1}{8\pi^3}\int \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - kct)\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{k} \tag{62.6}$$

(参阅§20的(20.20),(20.22)式,§19的(19.13)式的计算),等于

$$\frac{1}{4\pi rc}\left\{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{r}{c}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}\delta(c^2t^2 - r^2). \tag{62.7}$$

此外,我们还引入两个式子:

$$\partial^2 A_\mu/\partial x_\nu \partial x_\nu = 0, \tag{62.8}$$

$$\partial A_\mu/\partial x_\mu + 4\pi\sum e^{(i)} D(x - \xi^{(i)}) = 0. \tag{62.9}$$

(62.3)—(62.5),(62.8),(62.9)是全部的运动式子.

首先让我们指出:这些式子是可以有解的,而在解中,$\xi^{(i)}$,$p^{(i)}$只为 s_i 的函数.先讨论(62.3),(62.4),(62.5).如果(62.3)可以容有一个 $\xi^{(i)} = \xi^{(i)}(s_i)$,$p^{(i)} = p^{(i)}(s_i)$的解,(62.3)右方必须与 s_1,s_2,$\cdots s_{i-1}$,s_{i+1},$\cdots$等无关.由于(62.5),当 $i \neq j$ 时,

$$\frac{\partial A_\mu(\xi^{(i)}, s_1, s_2, \cdots)}{\partial s_i} = 4\pi e^{(j)}\dot{\xi}_\mu^{(j)} D(\xi^{(i)} - \xi^{(i)}),$$

又因我们所选择的 s 等满足(62.1),因此上式等于零.同样,(62.4)右方对 s_j 的微分含有一项

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\left\{\frac{\partial A_\nu(x, s_1, s_2, \cdots)}{\partial x_\mu}\right\}_{x=\xi^{(i)}} = 4\pi e^{(j)}\dot{\xi}_\nu^{(j)}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\mu}D(x - \xi^{(j)})\right\}_{x=\xi^{(i)}},$$

而这一项在(62.1)满足时也等于零.因此虽然(62.3),(62.4)右方似乎含有 s_1,s_2,$\cdots s_{i-1}$,s_{i+1},$\cdots$字样,但实质上它们都只是 s_i 的函数.它们两式的能够被积分,因此不成问题.为了使(62.5)式有解,我们要求

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\{4\pi e^{(j)}\dot{\xi}_\mu^{(j)} D(x - \xi^{(j)})\} = \frac{\partial}{\partial s_j}\{4\pi e^{(i)}\dot{\xi}_\mu^{(i)} D(x - \xi^{(i)})\}.$$

因为两方都是零，所以上式是满足的，因而(62.5)式有解.

至于(62.8)，(62.9)的成立，我们可以证明如下. 令在起始时，亦即在 $s_1=s_{10}, s_2=s_{20}, \cdots$ 时，(62.8)，(62.9)式成立. 那么由于(62.5)，

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu}=\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial s_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\nu}4\pi e^{(i)}\xi_\mu^{(i)}D(x-\xi^{(i)}),$$

又由于 D 的性质，

$$\partial^2 D(x)/\partial x_\nu \partial x_\nu = 0 \tag{62.10}$$

(这一点可以由 D 的定义证明)，得

$$\partial(\partial^2 A_\mu/\partial x_\nu \partial x_\nu)/\partial s_i = 0,$$

因而证实了(62.8)在任何 s 时都成立. 同样，因为

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\left\{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}+4\pi\sum e^{(j)}D(x-\xi^{(j)})\right\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\mu}{\partial s_i}-4\pi e^{(i)}\frac{\partial D(x-\xi^{(i)})}{\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}\xi_\nu^{(i)}}{\mathrm{d}s_i}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_\mu}4\pi e^{(i)}\dot{\xi}_\mu^{(i)}D(x-\xi^{(i)})-4\pi e^{(i)}\frac{\partial D(x-\xi^{(i)})}{\partial x_\nu}\dot{\xi}_\nu^{(i)}=0,$$

可以由起始条件获得在任何 $s_1, s_2, \cdots$ 时的(62.9).

不妨在此补充一两句关于 D 的性质的讨论. 上面已提起(62.10)式. 不难看出 $D(\boldsymbol{x},t)$ 即是

$$\int \mathrm{i}\,\frac{k_0}{|k_0|}\delta(k^2-k_0^2)\,\frac{1}{8\pi^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}ck_0t}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0; \tag{62.11}$$

由此可以看出(62.10). 此外，它显然地适合

$$\begin{cases}D(\boldsymbol{x},t)=D(-\boldsymbol{x},+t), & D(\boldsymbol{x},t)=-D(\boldsymbol{x},-t),\\ D(\boldsymbol{x},t)=-D(-\boldsymbol{x},-t), & D(\boldsymbol{x},0)=0.\end{cases} \tag{62.12}$$

也适合

$$[\partial D(\boldsymbol{x},t)/\partial t]_{t=0}=\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})c; \tag{62.13}$$

事实上，利用(62.6)式，上式左方成为

$$\frac{1}{8\pi^3}\int e^{ikx}(\cos ckt)c\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{ikx}c\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x})c.$$

最后由(62.11),我们看出 $D(\boldsymbol{x},t)$是一个不变量,使(62.5)符合相对论.我们也可以直接自(62.6)证明 $D(x,t)$是不变量.为此,将(62.6)写为

$$\frac{1}{8\pi^3}\frac{1}{2i}\int(e^{-ikx+ikct} - e^{ikx-ikct})\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{k}.$$

因为 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ikct)$是不变量,所以只消证明 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}/k$ 是不变量.事实上,令在 O 系统中有一些矢量 $\boldsymbol{k}$,它们的顶点构成一个小体积 δV_k($\boldsymbol{k}$ 空间的体积),又令在 O' 系统中这些相应的矢量构成一个小体积 $\delta V'_k$,那么我们有

$$\frac{\delta V'_k}{\delta V_k} = \frac{D(k'_1,k'_2,k'_3)}{D(k_1,k_2,k_3)}.$$

现在令

$$k'_\mu = \alpha_{\mu\nu}k_\nu,$$

得

$$k'_i = \alpha_{ij}k_j + \alpha_{i4}ik,$$

$$\frac{\partial k'_i}{\partial k_j} = \alpha_{ij} + \alpha_{i4}i\frac{\partial k}{\partial k_j} = \alpha_{ij} + \alpha_{i4}i\frac{k_j}{k}.$$

因此

$$\frac{D(k'_1,k'_2,k'_3)}{D(k_1,k_2,k_3)} = \left|\alpha_{ij} + \alpha_{i4}i\frac{k_j}{k}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha_{14}i(k_1/k) & \cdots & \cdots & \alpha_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\mathrm{i}(k_1/k) & -\mathrm{i}(k_2/k) & -\mathrm{i}(k_3/k) & 1 \end{vmatrix}.
$$

依照最后一行展开,便得了

$$
k^{-1}(\alpha_{44}k - \mathrm{i}\alpha_{4i}k_i) = k'/k.
$$

这证明了 $\delta V'_k/\delta V_k = k'/k$,亦即 $\delta V_k/k$ 是一个不变量,使(62.6)为一个不变量.

多时理论与只用一个时间变数的联系是这样的. 令

$$
\begin{cases} \boldsymbol{E}(x, s_1, s_2, \cdots) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x, s_1, s_2, \cdots) - \nabla\varphi(x, s_1, s_2, \cdots), \\ \boldsymbol{H}(x, s_1, s_2, \cdots) = \nabla \times \boldsymbol{A}, \end{cases} \tag{62.14}
$$

式中右方的微商都是对 x 中的 x_1, x_2, x_3, t 的微商. 令

$$
\begin{cases} \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}(x; s_1, s_2, \cdots)_{\tau_1=\tau_2=\cdots=t}, \\ \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}(x; s_1, s_2, \cdots)_{\tau_1=\tau_2=\cdots=t}; \end{cases} \tag{62.15}
$$

那么 $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}'$ 满足麦克斯韦方程. 证明如下. 首先,令任何 $x, s_1, s_2, \cdots$ 等的函数 F 在 $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = t$ 时称为 $F'(x)$,得

$$
\nabla \cdot (\boldsymbol{H}') = (\nabla \cdot \boldsymbol{H})' = (\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A})' = 0, \tag{62.16}
$$

$$
\nabla \times (\boldsymbol{E}') = (\nabla \times \boldsymbol{E})' = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial(\nabla \times \boldsymbol{A})}{\partial t}\right)'. \tag{62.17}
$$

以 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 代替 $s_1, s_2, \cdots$,作为独立变数,得

$$
\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{H}')}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)' + \sum_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \tau_i}\right)' \\ &= \left(\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)' + \sum_i \left(\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{A}}{\partial \tau_i}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)' + \sum \nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau_i}\right)', \end{aligned}
$$

但

$$(\partial \boldsymbol{A}/\partial \tau_i)' = \{4\pi e^{(i)}\boldsymbol{\xi}'^{(i)}D(x-\xi^{(i)})\}' = 0,$$

得

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} = \left\{\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{A})}{\partial t}\right\}',$$

因此与(62.17)合并,得

$$\nabla\times(\boldsymbol{E}') = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\boldsymbol{H}')}{\partial t}. \qquad (62.18)$$

又

$$\nabla\times(\boldsymbol{H}') = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}') = -\nabla^2\boldsymbol{A}' + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}'),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\boldsymbol{E}')}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)' + \sum_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \tau_i}\right)' \\ &= -\left(\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}\right)' - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right)' \\ &\quad + \sum_i\left\{-\left(\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial\tau_i}\right)' - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial\tau_i\partial t}\right)'\right\},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}' - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t} &= -\nabla^2\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right)' \\ &\quad + \nabla\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)'\right\} \\ &\quad + \sum_i\left(-\frac{1}{c}\right)\left\{-\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_i}\right)' - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial\tau_i\partial t}\right)'\right\}.\end{aligned} \qquad (62.19)$$

右方第一、第二项的和等于零(见 62.8),右方第三项为

$$\nabla\{-4\pi\sum e^{(i)}D(x-\xi^{(i)})\}',$$

因而等于零. 又$(\partial\varphi/\partial\tau_i)'$等于零,

$$\begin{aligned}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial\tau_i\partial t}\right)' &= +\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}4\pi e^{(i)}\boldsymbol{\xi}'^{(i)}D(x-\xi^{(i)})\right]' \\ &= +\frac{4\pi}{c}e^{(i)}\boldsymbol{\xi}'^{(i)}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^{(i)})\end{aligned}$$

(见(62.13)式). 因此(62.19)成为寻常的

$$\nabla \times \boldsymbol{H}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} = \sum \frac{4\pi}{c} e^{(i)} \boldsymbol{\xi}'^{(i)} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}^{(i)}). \tag{62.20}$$

最后

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E}' &= \nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right)' \\ &= -(\nabla^2 \varphi)' - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} \right)' \\ &= -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)' - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} \right)' \\ &= -\frac{1}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) \right]' \\ &= -\frac{1}{c}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[-4\pi \sum e^{(i)} D(x - \xi^{(i)}) \right] \right\}' \\ &= 4\pi \sum e^{(i)} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}^{(i)}), \end{aligned} \tag{62.21}$$

亦即是我们所需要的. 以上证明了 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ 与寻常的麦克斯韦场完全相同.

因为运动方程(62.3), (62.4)右方实际上与 $s_1, s_2, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots$ 无关, 我们可以在这两个式中的右方中令 s 等适合

$$\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_n, \tag{62.22}$$

亦即是让 s 等中有一些关系:

$$s_j = f_{ji}(s_i). \tag{62.23}$$

在(62.3), (62.4)中消去 $p^{(i)}$, 再引入(62.22)式及 $\tau_i = t$, 获得了

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 \xi_i}{\mathrm{d}s_i^2} = &\frac{e}{c}\left[\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)_{x=\xi^{(i)}} \right]' \dot{\xi}_\nu - \frac{e}{c}\sum_{j \neq i} \left[\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial s_j} \right)_{x=\xi^{(i)}} \right]' \left(\frac{\partial s_j}{\partial s_i} \right)' \\ &- \frac{e}{c}\left[\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial s_i} \right)_{x=\xi^{(i)}} \right]'. \end{aligned} \tag{62.24}$$

上式右方第一项中的方括号即是 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ 所构成的 $H_{\mu\nu}$, 第二项、第三项分别等于零(因 $\partial A_\mu / \partial s_j$ 项在此等于零). 因此质点的运动方程与以前的理论也完全相同.

如果将(62.5)中的$D(x-\xi^{(i)})$改为

$$\frac{1}{2}\{D(x-\xi^{(i)}+\lambda)+D(x-\xi^{(i)}-\lambda)\}, \tag{62.25}$$

式中“λ”代表一个极小的类时矢量,那么(62.24)右方第二、第三项依然为零而(62.24)右方中相当于自相互作用的一项变为(58.36)右方的第一项,使(62.24)可能与狄拉克经典电子理论中的运动方程(58.36)相同.这一点可以直接地证明.由(62.5)式,取以下的解[①]

$$A_\mu(x,s_1,s_2,\cdots)=\sum_j\int_{-\infty}^{s_j}4\pi e^{(j)}\dot{\xi}_\mu^{(j)}\frac{1}{2}\{D(x-\xi^{(j)}+\lambda)+D(x-\xi^{(j)}-\lambda)\}\mathrm{d}s_j, \tag{62.26}$$

$$\frac{\partial A_\mu(x,s_1,s_2,\cdots)}{\partial x_\nu}=\sum_j\int_{-\infty}^{s_j}4\pi e^{(j)}\dot{\xi}_\mu^{(j)}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{D(x-\xi^{(j)}+\lambda)+D(x-\xi^{(j)}-\lambda)\}\mathrm{d}s_j. \tag{62.27}$$

当我们在上式中以$\xi^{(i)}$代替x,再令$\tau_1=\tau_2=\cdots=t$,上二式右方中j不等于i的项即是j电子在i电子处所产生的推迟势及势的微商.注意对于这些项而言,λ是可以忽略的(如果所有的电子不走得太靠近的话).对于$j=i$的一项,我们必须认真地考虑引入“λ”的效果.让我们在(62.26)中只留下$j=i$的一项.将下标i,j不再写出,而将积分号下的s写为s',我们所求的

$$\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)_{x=\xi^{(i)},\tau_1=\tau_2=\cdots=t} \tag{62.28}$$

可写为二项的和,一为

$$4\pi e\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{s}\left\{\dot{\xi}_\nu(s')\frac{\partial}{\partial\xi_\mu(s)}-\dot{\xi}_\mu(s')\frac{\partial}{\partial\xi_\nu(s)}\right\}\frac{1}{4\pi c|\boldsymbol{\xi}(s)-\boldsymbol{\xi}(s')+\boldsymbol{\lambda}|}$$

$$\times\left\{\delta\left(\tau(s)-\tau(s')-\mathrm{i}\lambda_4-\frac{1}{c}|\boldsymbol{\xi}(s)-\boldsymbol{\xi}(s')+\boldsymbol{\lambda}|\right)\right.$$

① 用(62.26)中的A_μ去讨论电子的运动首先见于Wentzel的工作,因此(62.26)中的A_μ也称为Wentzel势.参阅Wentzel, *Zeits. für Phys.* **86**(1933)479.

$$-\delta\left(\tau(s)-\tau(s')-\mathrm{i}\lambda_4+\frac{1}{c}|\xi(s)-\xi(s')+\lambda|\right)\Big\}\mathrm{d}s',$$

(62.29)

一为“$-\lambda$”代替“$+\lambda$”的上式.不妨令“λ”为过去类时矢量,因为这样的限制并不影响(62.25)式.这便是令

$$-\mathrm{i}\lambda_4>0.$$

(62.29)可以认为电子自$s'=-\infty$至固有时s的一段运动所产生在$(\xi(s)+\lambda)$点的

$$\frac{1}{2}(\text{推迟势}-\text{超前势})$$

的电磁场(见图38).这一段运动在$\xi(s)+\lambda$点既贡献了推迟势,也贡献了超前势;事实上,以$(\xi(s)+\lambda)$为顶点的过去及将来光锥面,都与这一段世界线相交.当我们以$-\lambda$代替$+\lambda$时,(62.29)的值变为零;因为在此处,我们看到以$(\xi(s)-\lambda)$为顶点的过去及将来光锥面不与电子世界线自$s'=-\infty$至s的一段相交.因此当$\lambda\to0$时,(62.28)即是(58.37),亦即是(58.36)中的

$$\frac{2}{3}\frac{e}{c^4}(\dot{\xi}_\mu\dddot{\xi}_\nu-\dot{\xi}_\nu\dddot{\xi}_\mu).$$

这样的理论通常称为“λ极限”过程.

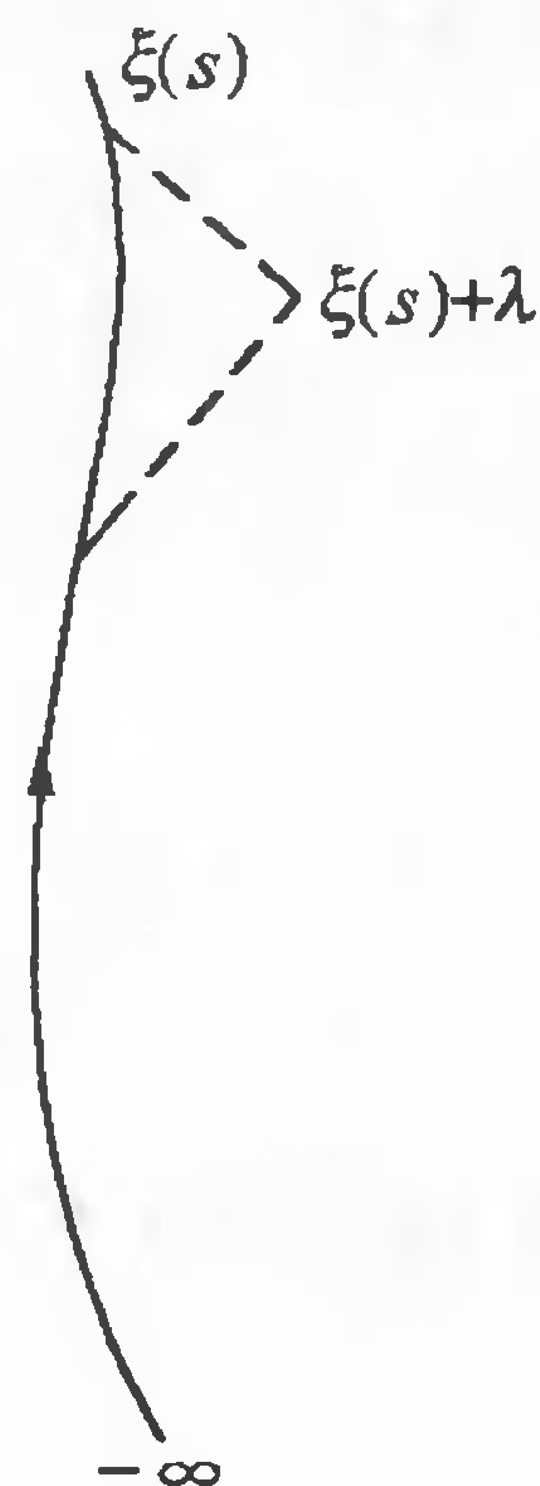


图　38

注意这样的理论不符合相对论原则(如果要求严格的话),因为(62.25)中的λ是一个常矢量,它的分量对于不同的系统取不同的值,使得含有D_λ的(62.5)式对于不同的系统取不同的形式.虽然如此,我们相信当$\lambda\to0$时,理论是合乎相对论的.

多时理论中的方程,可以写成正则方程.在寻常力学里,如果$q_1,q_2,\cdots$是广义坐标,$p_1,p_2,\cdots$是它们的动量,那么正则方程取以下的形式:

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial q_i}.\tag{62.30}$$

引入两个力学量 A,B 的泊松括号,定义为

$$[A,B]=\sum\left\{\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right\}, \tag{62.31}$$

便获得了

$$\begin{cases}[q_i,q_j]=0, & [p_i,p_j]=0,\\ [q_i,p_j]=\delta_{ij}, & [p_i,p_j]=-\delta_{ij},\\ \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=[q_i,H], & \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=[p_i,H],\\ \dfrac{\mathrm{d}A(q,p)}{\mathrm{d}t}=[A,H]. \end{cases} \tag{62.32}$$

如果有许多独立变数 $s_1,s_2,\cdots$,而运动方程为

$$\frac{\partial q_m}{\partial s_j}=\frac{\partial H_j}{\partial p_m},\quad \frac{\partial p_m}{\partial s_j}=-\frac{\partial H_j}{\partial p_m},\quad (m=1,2,\cdots) \tag{62.33}$$

那么(62.32)改为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}s_j}=[q_m,H_j], & \dfrac{\mathrm{d}p_m}{\mathrm{d}s_j}=[p_m,H_j],\\ \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s_j}=[A,H_j]. \end{cases} \tag{62.34}$$

当 H 等中不明显地含有 s 时,(62.34)有解的条件为

$$\frac{\partial}{\partial s_j}[A,H_i]=\frac{\partial}{\partial s_i}[A,H_j],$$

亦即

$$\begin{aligned}&[[AH_j],H_i]+[A,[H_iH_j]]\\ &\qquad=[[A,H_i],H_j]+[A,[H_j,H_i]].\end{aligned}$$

因

$$[[AB],C]+[[BC],A]+[[CA],B]=0$$

(上式可以直接由定义证实),得

$$[[H_i,H_j],A]=0. \tag{62.35}$$

所以一般讲来,$[H_i,H_j]=0$乃是积分条件.

在我们此处的理论中我们可以避免引入类似(62.30),

(62.33)的式子而直接引入类似(62.31),(62.32),(62.34)等式的式子.由于(62.8),我们可以将 A_μ 写为

$$A_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int (a^+_{\mu k}e^{ikx-ikct} + a^-_{\mu k}e^{-ikx-ikct})(d^3\boldsymbol{k}/k), \quad (62.36)$$

式中的 $a^+_{\mu k}, a^-_{\mu k}$ 都是 $s_1, s_2, \cdots$ 等的函数.代入运动方程(62.5),获得

$$\frac{\partial a^+_{\mu k}}{\partial s_i} = \sum 2\pi i e^{(i)}\dot{\xi}^{(i)}_\mu \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(i)} + ikc\tau^{(i)}), \quad (62.37)$$

$$\frac{\partial a^-_{\mu k}}{\partial s_i} = \sum 2\pi i e^{(i)}\dot{\xi}^{(i)}_\mu \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(i)} - ikc\tau^{(i)}). \quad (62.38)$$

(62.37),(62.38),(62.36)便完全地代替了(62.5),(62.8).将力学量 A 认为是 ξ, p, a^+, a^- 的函数,引入泊松括号 $[A,B]$ 的定义:

$$[A,B] = \sum_{\mu,i}\left(\frac{\partial A}{\partial \xi^{(i)}_\mu}\frac{\partial B}{\partial p^{(i)}_\mu} - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}_\mu}\frac{\partial A}{\partial p^{(i)}_\mu}\right) - \sum_\mu \int 2\pi k^2 ci\left(\frac{\delta A}{\delta a^+_{\mu k}}\frac{\delta B}{\delta a^-_{\mu k}} - \frac{\delta B}{\delta a^+_{\mu k}}\frac{\delta A}{\delta a^-_{\mu k}}\right)\frac{d^3\boldsymbol{k}}{k}, \text{①} \quad (62.39)$$

再引入

$$H_i = \frac{1}{2m_i}\left[p^{(i)}_\mu - \frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(i)\right]\left[p^{(i)}_\mu - \frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(i)\right], \quad (62.40)$$

便不难证明

$$\frac{\partial \xi^{(i)}_\mu}{\partial s_i} = [\xi^{(i)}, H_i], \quad \frac{\partial p^{(i)}_\mu}{\partial s_i} = [p^{(i)}_\mu, H_i], \quad (62.41)$$

便是运动方程(62.3),(62.4),

$$\frac{\partial \xi^{(i)}_\mu}{ds_j} = [\xi^{(i)}, H_j] = 0, \quad \frac{\partial p^{(i)}_\mu}{ds_j} = [p^{(i)}_\mu, H_j] = 0 \quad (i \neq j),$$

正如我们所欲的.而

① 注意这里又有哈密顿导数.参阅§52的讨论及320页注①的文献.

$$\frac{\partial a_{\mu k}^{+}}{\partial s_i}=[a_{\mu k}^{+},H_i],\quad \frac{\partial a_{\mu k}^{-}}{\partial s_i}=[a_{\mu k}^{-},H_i] \tag{62.42}$$

正是(62.37),(62.38).由(62.36),(62.42),可以获得

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial s_i}=[A_\mu,H_i]. \tag{62.43}$$

这样,我们把运动方程(62.3),(62.4),(62.5)写成了(62.41),(62.42),(62.43)的形式.这个形式也称为正则方程,是(62.30),(62.33)的推广.

由$[A,B]$的定义,知

$$\begin{cases}[\xi,\xi]=0,[p,p]=0,\quad [\xi_\mu^{(i)},p_\nu^{(j)}]=\delta_{ij}\delta_{\mu\nu},\\ [a^+,a^+]=[a^-,a^-]=0,\\ [a_{\mu k}^{+},a_{\nu k'}^{-}]=\delta_{\mu\nu}(-2\pi kc\mathrm{i})\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\end{cases} \tag{62.44}$$

此外,ξ,p 与 a^+,a^- 的泊松括号都等于零.利用(62.44)及(62.36),算出

$$\begin{aligned}[A_\mu(x),A_\nu(x')]&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')-\mathrm{i}kc(t-t')}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')+\mathrm{i}kc(t-t')}]\\ &\quad\times(-2\pi kc\mathrm{i})k^{-2}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\delta_{\mu\nu}\\ &=\frac{1}{(2\pi)^3}(-4\pi c)\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\frac{\sin kc(t-t')}{k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\delta_{\mu\nu}\\ &=-4\pi cD(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',t-t')\delta_{\mu\nu}\\ &=-4\pi c\delta_{\mu\nu}D(x-x').\end{aligned} \tag{62.45}$$

这个关系在量子电动力学中是极重要的.由(62.45),可以算出

$$[A_\mu(x),H_i]=m_i^{-1}\left[p_\mu^{(i)}-\frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(i)\right]\left(-\frac{e^{(i)}}{c}\right)(-4\pi cD(x-\xi^{(i)}))$$

由而直接地证明了(62.43)即是(62.5).

因为这里的 H 不明显地含有 $s_1,s_2,\cdots$(当外界场存在时,这个情形可以改变),因此积分条件即是

$$[H_i,H_j]=0\quad(i\neq j). \tag{62.46}$$

用了(62.44),可以算出

$$[H_i, H_j] = \frac{1}{m_i m_j}\left[p_\mu^{(i)} - \frac{e}{c}A_\mu^{(i)}(i)\right]\left[p_\mu^{(j)} - \frac{e}{c}A_\mu^{(j)}(j)\right]\left(+\frac{e^{(j)}}{c}\frac{e^{(i)}}{c}\right)$$
$$\times(-4\pi c)D(\xi^{(i)} - \xi^{(j)}),$$

由于(62.1)的限制,上式右方等于零,因此我们证明了(62.41),(62.42),(62.43)是可解的.

现在回到(62.8),(62.9)两个式子.(62.8)已经满足(见62.36式),所以不必讨论.(62.9)所给我们的,事实上乃是一个运动积分.如果 F 是一个运动积分,那么

$$\partial F/\partial s_1 = \partial F/\partial s_2 = \cdots = 0, \tag{62.47}$$

亦即

$$[F, H_1] = [F, H_2] = \cdots = 0. \tag{62.48}$$

现在

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} + 4\pi\sum e^{(i)}D(x - \xi^{(j)}), H_i\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}[A_\mu, H_i] + 4\pi e^{(i)}[D(x - \xi^{(i)}), H_i]$$
$$= m_i^{-1}\left[p_\mu^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(i)\right]\left(-\frac{e^{(i)}}{c}\right)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{-4\pi c D(x - \xi^{(i)})\}$$
$$+ 4\pi e^{(i)}m_i^{-1}\left[p_\mu^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(i)\right]\frac{\partial}{\partial \xi_\mu^{(i)}}D(x - \xi^{(i)}) = 0,$$

因此(62.9)左边是一个运动积分.因此我们可以始终地有(62.9)的式子.

以上的讨论是十分适宜于量子化的.当然,在量子力学中由于质点数可以改变的情形,这个理论又遇到了新的困难.

不妨指出,如果将(62.40)的 H_i 改为

$$-c\left\{-\left[p_\mu^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(i)\right]\left[p_\mu^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c}A_\mu(i)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{62.49}$$

以上的讨论都继续有效.(62.49)更接近于量子力学中狄拉克电子的哈密顿量.此外,我们也可以用 i 电子的

$$c\left\{m^2c^2 + \left[\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} + e\varphi$$

为它的哈密顿 H_i. 这些情形正与 § 51，§ 52中的情形相仿佛，在此不拟重复.

由于量子电动力学的需要，有人企图在(62.41)，(62.43)中消去电磁场的纵场. 这个企图至今尚未成功①.

以上叙述了几个比较近代的关于电子的理论. 在此没有介绍而值得学习的理论有以下两个：

(i) 狄拉克的新理论. 文献见 *Pro. Roy. Soc.* **A209**(1951) 291；**212**(1952)330；**223**(1954)438.

(ii) 有大小的电子的理论. 文献见 § 56的注. 其中最完整的理论是 Mac Manus 的理论.

这些理论不在此介绍了. 我们在此结束这一章.

---

① P.A.M. Dirac, *Communication of Dublin Institute for advanced studies*, Series **A** No. 1, 1943；张宗燧，物理学报，**11**(1955)453.

第十章　电子运动的几个例

§63　以小速度运动着的电子

现在让我们叙述电子运动的几个例，使我们对于电子的运动有更具体的认识. 首先讨论以小速度运动着的电子. 所谓“小速度”，即是指速度 $\boldsymbol{u}$ 比光速 c 小得很多的情形. 那时电子的运动方程是

$$m\dot{\boldsymbol{u}}-\frac{2}{3}\frac{e^3}{c^3}\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{F}\quad(\dot{\boldsymbol{u}}=\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t,\ddot{\boldsymbol{u}}=\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t^2).\qquad(63.1)$$

当外界力不存在时，我们立即算出

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{C}_1\mathrm{e}^{t/b},\qquad(63.2)$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}_1b\mathrm{e}^{t/b}+\boldsymbol{C}_2\qquad(63.3)$$

$$\left(b=\frac{2}{3}e^2/mc^3=\frac{2}{3}r_0/c\right).$$

当 $\boldsymbol{C}_1$取适当值时，速度 $\boldsymbol{u}$ 的大小的确随时间而减少. 由(63.2)可以看出：当 $t\to\infty$时，$\boldsymbol{u}\to\infty$. 但在这一节中，这一点不是理论的真正困难，因为在 $\boldsymbol{u}$ 取相当大的值时，(63.1)已经失效.

电子每秒所放射的能量为

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\boldsymbol{u}}^2=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\boldsymbol{C}_1\mathrm{e}^{t/b})^2,\qquad(63.4)$$

而电子能量的增加为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mu^2\right)=m\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}=m(\boldsymbol{C}_1b\mathrm{e}^{t/b}+\boldsymbol{C}_2)\cdot\boldsymbol{C}_1\mathrm{e}^{t/b}$$

$$=m\boldsymbol{C}_1\cdot\boldsymbol{C}_2\mathrm{e}^{t/b}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\boldsymbol{C}_1^2\mathrm{e}^{2t/b}.\qquad(63.5)$$

依照能量守恒，(63.4)应与(63.5)大小相等而符号相反，但事实上

它们并不如此.

讨论有一外界电场 $\boldsymbol{E}''$ 时的情形,那时

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}''. \tag{63.6}$$

令

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}_c \cos \omega t = \mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}), \tag{63.7}$$

式中 Re(…)代表(…)的实部分. 运动方程成为

$$\dot{\boldsymbol{u}} - b\,\ddot{\boldsymbol{u}} = m^{-1} e \mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}).$$

令

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{u}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}), \tag{63.8}$$

代入上式,得

$$\dot{\boldsymbol{u}}_0 = e\boldsymbol{E}_0 / m(1 + \mathrm{i}b\omega),$$

由此得

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{Re}\left\{\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m(1+\mathrm{i}b\omega)} \frac{1}{(-\mathrm{i}\omega)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}.$$

以上所讨论的情形即是自由电子在光波作用下的运动. 它对于外来的光而言有一个“有效截面”σ(эффективное сечение),定义为它每秒中所放射的电磁能与外界电磁场的能量在每秒中在单位面积上所流过的量的比例. 所以定义这个比例为“有效截面”,乃是因为对于外来的电磁场的能量而言,电子所散射的量,正好像电子有一个如此的面积似的. 电子每秒所放射的能量为

$$(2/3)(e^2/c^3)\,\dot{\boldsymbol{u}}^2,$$

对时间平均,得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{[\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{u}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})]^2} &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{\left[\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \dot{\boldsymbol{u}}_0^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]^2} \\ &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_0^* = \frac{1}{3}\frac{e^4 E_0^2}{c^3 m^2 (1+\omega^2 b^2)}\end{aligned} \tag{63.9}$$

(上式中“——”符号代表平均). 在求得上式的右方时,我们用了以下的关系:

$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}} = \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}} = 0.$$

外界电磁场能量每秒在单位面积上所流过的值为

$$\frac{c}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{c}{4\pi}E^2,$$

平均值为

$$(c/4\pi)\overline{E}^2 = (c/8\pi)E_0^2. \tag{63.10}$$

因此有效截面为(63.9),(63.10)的比,亦即

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3(1+\omega^2 b^2)} \quad \left(r_0 = \frac{e^2}{mc^2}\right).$$

引入外界的光波的波长 λ,又引 σ_0为$8\pi\, r_0^2/3$,获得

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + (2\pi/3)(\sigma_0/\lambda^2)}. \tag{63.11}$$

当 $\lambda \geqslant r_0$时,

$$\sigma \approx \sigma_0 = 8\pi\, r_0^2/3, \tag{63.12}$$

亦即有效截面正像一个以$(8/3)^{\frac{1}{2}} r_0$为半径的圆球的截面.(63.12)即是汤姆孙(Thomson)的结果.这是可以想像得到的,因为汤姆孙在计算 σ 时忽略了辐射阻尼,而在 $\lambda \geqslant r_0$时,相当于辐射阻尼的项是可以忽略的.当 $\lambda \leqslant r_0$时,(63.11)成为

$$\sigma = (3/2\pi)\lambda^2. \tag{63.13}$$

与实验比较时,我们可以指出:大体上讲,(63.12)与实验符合,而(63.13)不能同实验比较.后一点的理由是,r_0比电子的康普顿波长(h/mc)小,因此当 $\lambda \leqslant r_0$时,$\lambda \leqslant (h/mc)$,因此我们必须援用量子力学,而不能再用经典力学去处理这个问题.

讨论在这个问题中的能量守恒.电子的能量的变化 $m\boldsymbol{u}\dot{\boldsymbol{u}}$在一个长时期中的平均值等于零,因

$$\frac{1}{T}\int_0^T m\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}(mu^2|_T - mu^2|_0) \approx 0.$$

电子每秒所放射能量在平均后成为(63.9).外界每秒所作功的平均为

$$\overline{e\boldsymbol{E}''\cdot\boldsymbol{u}},$$

亦即

$$e\boldsymbol{E}_0\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\frac{1}{2}\left\{\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m(1+\mathrm{i}b\omega)}\frac{1}{(-\mathrm{i}\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m(1-\mathrm{i}b\omega)}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right\}$$

的平均，亦即

$$\frac{e^2E_0^2}{4m\omega}\left\{\frac{1}{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i}b\omega)}+\frac{1}{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}b\omega)}\right\}=\frac{e^2E_0^2b}{2m(1+b^2\omega^2)}=\frac{e^4E_0^2}{3c^3m^2(1+b^2\omega^2)},\tag{63.14}$$

正与(63.9)相同. 这一点是值得满意的.

以上是对于自由电子的讨论. 对于束缚电子，则讨论非常复杂. 我们在此只作一个粗糙的计算，即粗糙地估计在氢原子中电子轨道的改变的趋势. 假定所讨论的轨道在辐射阻尼项不存在时是一个圆，半径为 l，而又假定在辐射阻尼影响下，l 有了改变，而改变极慢. 因此

$$\dot{\boldsymbol{u}}\approx-(u^2/l)\boldsymbol{r}/r,\tag{63.15}$$

由此算出

$$|\ddot{\boldsymbol{u}}|=u^3/l^2,\tag{63.16}$$

而方向为 $-\boldsymbol{u}$. 因此 $|u|$ 的方程为

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|u|^3/l^2=0.\tag{63.17}$$

l 的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}t^2}-m\frac{u^2}{l}=-e^2\frac{1}{l^2},\tag{63.18}$$

所以我们的问题为在(63.17),(63.18)中求 u,l. 为简单起见，只讨论在 $t=0$ 附近的运动. 假定在 $t=0$ 时

$$mu^2/l=e^2/l^2,\quad \mathrm{d}l/\mathrm{d}t=0,$$

便获得了

$$|u(t)| = |u(0)| - \left\{\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3 m}|u(0)^3|/l(0)^2\right\}t + \cdots,$$

$$\begin{aligned}|l(t)| &= l(0) + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3 l}{\mathrm{d}t^3}\right)_0 t^3 + \cdots \\ &= l(0) + \frac{1}{6}\left(\frac{2u}{l}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_0 t^3 + \cdots \\ &= l(0) - \frac{1}{6}\frac{2u}{l}\frac{bu^3}{l^2}t^3 + \cdots \\ &= l(0) - \frac{1}{3}b\frac{e^4}{m^2 l^5}t^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{63.19}$$

令 W 代表电子动能及势能的和，亦即

$$W = -e^2/l + \frac{1}{2}mu^2, \tag{63.20}$$

得

$$\begin{aligned}W(t) &= W(0) + m(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})_0 t + \cdots \\ &= W(0) - \frac{2}{3}(e^2/c^3)(u^4/l^2)t + \cdots \end{aligned} \tag{63.21}$$

(63.21)正与能量守恒的式子相符合.

为体会束缚电子的运动，不妨讨论一个谐振子的运动，因为它们的性质有类似处. 这在下一节中讨论.

§64　谐振子的运动

在没有引入辐射阻尼项前，运动方程为

$$m\ddot{\xi} + k^2\xi = 0,$$

为简单起见，让我们讨论一维空间的谐振子，它的运动方程为

$$m\ddot{\xi} + k^2\xi = 0. \tag{64.1}$$

令 $\omega_0^2 = k^2/m$，得

$$\xi = \xi_0\cos(\omega_0 t + \delta), \tag{64.2}$$

或

$$\xi = \mathrm{Re}(\xi_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}). \tag{64.3}$$

(64.3)式中 ξ_0 为一复数.

引入辐射阻尼项后,运动方程为

$$m\ddot{\xi} - \frac{2}{3}(e^2/c^3)\dddot{\xi} + k^2\xi = 0. \tag{64.4}$$

依照寻常解此类微分方程的办法,我们假定

$$\xi = \mathrm{Re}(\xi_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),$$

式中 ξ_0,ω 为尚未决定的复数,而以 $\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 代入(64.4). 这样便获得了

$$-\omega^2 - b\mathrm{i}\omega^2 + (k^2/m) = 0. \tag{64.5}$$

当 $b\omega_0 \leqslant 1$ 时,第二项是一个较小的项,这时我们可以将上式近似为

$$-\omega^2 - b\mathrm{i}\omega_0^2\omega + \omega_0^2 = 0, \tag{64.6}$$

求解,得

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 \text{ 或 } \omega_2, \\ \omega_1 = \omega_0 - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}b\omega_0^2, \quad \omega_2 = -\omega_0 - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}b\omega_0^2. \end{cases} \tag{64.7}$$

因此 ξ 为

$$\mathrm{Re}(\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}) \quad \text{或} \quad \mathrm{Re}(\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}), \tag{64.8}$$

式中 ξ_0 为任意复数. 因此不论我们用(64.8)的哪一个作解,ξ 成为

$$C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}b\omega_0^2 t}\cos(\omega_0 t + \delta).$$

让我们讨论如此运动着的电子所放射的场. 我们在此假定电子自 $t=0$ 时刻起开始放射. 每秒中的放射为

$$\begin{cases} (2/3)(e^2/c^3)(\ddot{\xi})^2 & (t > 0), \\ 0 & (t \leqslant 0). \end{cases} \tag{64.9}$$

让我们引入 ξ_{Rad},定义为

$$\begin{cases} \xi_{\mathrm{Rad}} = \xi & (t > 0), \\ \xi_{\mathrm{Rad}} = 0 & (t \leqslant 0). \end{cases} \tag{64.10}$$

放射便成为

$$(2/3)(e^2/c^3)(\ddot{\xi}_{\mathrm{Rad}})^2. \tag{64.11}$$

当 ξ 为(64.8)第一式所决定时,我们不难证实

$$\xi_{\mathrm{Rad}} = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega}{\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}b\omega_0^2\mathrm{i}} \frac{(-1)}{2\pi\mathrm{i}}\xi_0\right]. \tag{64.12}$$

因为当 $t>0$时,我们讨论在 ω 的复平面中一个围线积分,一部分为沿实轴自 $-\infty$至$+\infty$,另一部分为一个极大的半圆,圆心在原点,在下半平面内,利用留数理论,证明(64.12)括号中的项即是 $\xi_0\exp(-\mathrm{i}\omega_1 t)$;当 $t<0$时,讨论另一个围线积分,一部分为沿实轴自$-\infty$至$+\infty$,另一部分为一个极大的半圆,圆心在原点,在上半平面内,利用留数理论,证明(64.12)括号中的项等于零. 由(64.12)知

$$\xi_{\mathrm{Rad}} = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega}{\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}b\omega_0^2\mathrm{i}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_0^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega}{\omega - \omega_0 - \frac{1}{2}b\omega_0^2\mathrm{i}}\right]. \tag{64.13}$$

先讨论自 $t=0$至 $t=\infty$的全部放射. 这等于

$$(2/3)(e^3/c^3)\int_0^{\infty}(\ddot{\xi}_{\mathrm{Rad}})^2\mathrm{d}t.$$

将 $b\omega_0^2$写为 γ,将 ξ_{Rad}写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{64.14}$$

得

$$\ddot{\xi}_{\mathrm{Rad}} = \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 f(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

因 ξ 为实数,

$$f(\omega) = f(-\omega)^*,$$

$$(\ddot{\xi}_{\mathrm{Rad}})^2=\int\omega^2 f(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\int\mu^2 f^*(\mu)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\mu t}\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_0^T(\ddot{\xi}_{\mathrm{Rad}})^2\mathrm{d}t=\iint\omega^2\mu^2 f(\omega)f^*(\mu)\,\frac{2\sin(\mu-\omega)T}{\mu-\omega}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mu.$$

但已知

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\sin(\mu-\omega)T}{\mu-\omega}=\pi\delta(\mu-\omega),$$

因此得

$$\begin{aligned}\int_0^T(\ddot{\xi}_{\mathrm{Rad}})^2\mathrm{d}t&=2\pi\iint\omega^2\mu^2 f(\omega)f^*(\mu)\delta(\omega-\mu)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mu\\&=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\omega^4|f(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\\&=4\pi\int_0^{\infty}\omega^4|f(\omega)|^2\mathrm{d}\omega.\end{aligned}\tag{64.15}$$

依照(64.13)，

$$f(\omega)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\left(\frac{\xi_0}{\omega-\omega_0+\dfrac{1}{2}\gamma\mathrm{i}}-\frac{\xi_0^*}{-\omega-\omega_0-\dfrac{1}{2}\gamma\mathrm{i}}\right),$$

$$\begin{aligned}|f(\omega)|^2=\frac{1}{16\pi^2}\Bigg\{&\frac{\xi_0\xi_0^*}{(\omega-\omega_0)^2+\dfrac{1}{4}\gamma^2}+\frac{\xi_0\xi_0^*}{(\omega+\omega_0)^2+\dfrac{1}{4}\gamma^2}\\&-\frac{\xi_0\xi_0}{\left(\omega_0-\dfrac{1}{2}\gamma\mathrm{i}\right)^2-\omega^2}-\frac{\xi_0^*\xi_0^*}{\left(\omega_0+\dfrac{1}{2}\gamma\mathrm{i}\right)^2-\omega^2}\Bigg\}.\end{aligned}\tag{64.16}$$

当 $\gamma\ll\omega_0$时，我们可以忽略上式花括号中后三项而只保留第一项. 于是

$$|f(\omega)|^2=\frac{1}{16\pi^2}(\xi_0\xi_0^*)\Big/\left\{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma^2\right\}.$$

全部放射等于

$$\frac{1}{6\pi}\frac{e^2}{c^3}\xi_0\xi_0^*\int\frac{\omega^4}{\left\{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma^2\right\}}\mathrm{d}\omega. \tag{64.17}$$

将上式写为$\int S(\omega)\mathrm{d}\omega$,得

$$S(\omega)=\frac{1}{6\pi}\frac{e^2}{c^3}\xi_0\xi_0^*\frac{\omega^4}{\left\{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma^2\right\}}. \tag{64.18}$$

这便是全部放射按 ω 的分布,将 ω 换为$2\pi\nu$,得全部放射能量按频率 ν 的分布.

不难近似地作出(64.17)的积分.将积分项的分子 ω^4换为 ω_0^4,引入 $x=2(\omega-\omega_0)/\gamma$,(64.17)便成了

$$\frac{1}{6\pi}\frac{e^2}{c^3}\omega_0^4\xi_0\xi_0^*\frac{2}{\gamma}\int_{-2\omega_0/\gamma}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

将积分下限换为$-\infty$(因 $\omega_0\gg\gamma$,这是可以允许的),得

$$\frac{1}{6\pi}\frac{e^2}{c^3}\omega_0^4\xi_0\xi_0^*\frac{2}{\gamma}\pi=\frac{1}{2}m\omega_0^2\xi_0\xi_0^*. \tag{64.19}$$

不难证实上式即是 $t=0$时刻的

$$\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}k^2\xi^2 \tag{64.20}$$

(如果在上式中我们令 ξ 为 $\mathrm{Re}(\xi_0e^{-i\omega_0t})$).因此以上说明在 $t=0$时刻的电子总能量,在 $t=0$ 后全部放射.

(64.18)中的分布如图39.最高点在 $\omega=\omega_0$处.当 ω 改变至 $\omega_0+\frac{1}{2}\gamma$ 处,高度便降低了一半.因此 γ 代表这个高峰的宽度.因 $\omega/2\pi$ 为所射出的光的频率,而 $S(\omega)$与频率为 $\omega/2\pi$ 的光的强度成正比,因此以上的

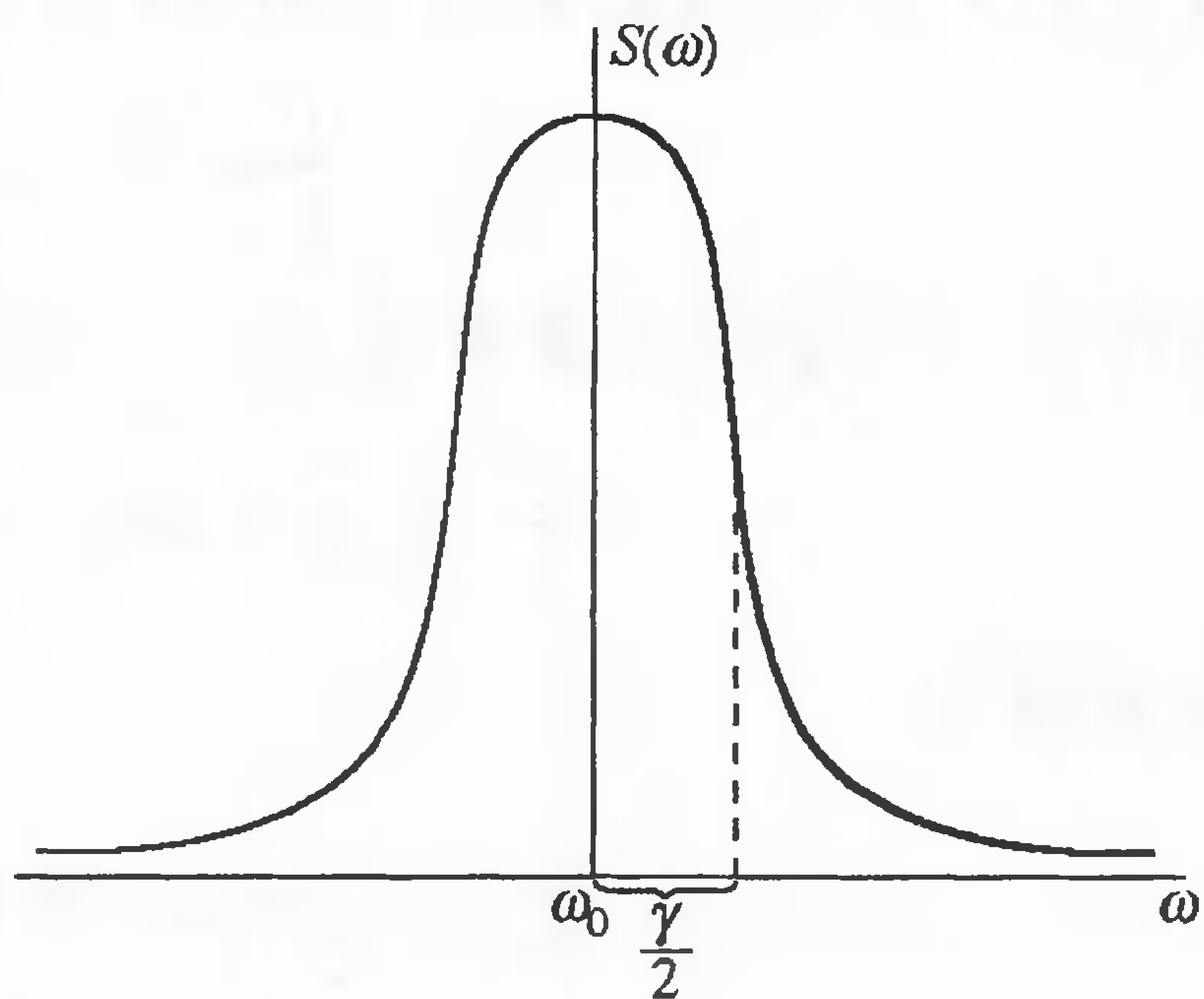


图　39

曲线指出：射出的光的频率可以认为集中在$\left(\omega_0+\frac{1}{2}\gamma\right)\Big/2\pi$及$\left(\omega_0-\frac{1}{2}\gamma\right)\Big/2\pi$中. 因此$\gamma/2\pi$又称为光谱线的宽度. 半宽度$\gamma/4\pi$等于

$$(4\pi)^{-1}b\omega_0^2=\frac{e^2}{c^3m}\omega_0^2\frac{1}{6\pi}. \tag{64.21}$$

以上讨论了在$t=0$后的全部放射. 不妨讨论在某一时刻t附近在一秒中的放射. 能量放射等于

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(e^2/c^3)(\ddot{\xi})^2&=\frac{2}{3}(e^2/c^3)\{\mathrm{Re}(-\omega_1^2\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t})\}^2\\&=\frac{1}{6}\frac{e^2}{c^3}\{\omega_1^2\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}+\omega_1^{*2}\xi_0^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1^* t}\}^2.\end{aligned} \tag{64.22}$$

虽然讨论目标是在某时刻t附近每秒中的放射，我们依然可以引入对一段时间的平均. 当$\omega_0\gg\gamma$时，我们可以取此段时间比$1/\gamma$小而比$1/\omega_0$大，使得在平均中$\mathrm{e}^{-\gamma t}$可以认为常数而$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_0 t}$的平均等于零，得平均能量放射

$$\frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega_1^2\omega_1^{*2}\xi_0\xi_0^*\mathrm{e}^{-\gamma t}\approx\frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega_0^4\xi_0\xi_0^*\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{64.23}$$

电子在t时刻的能量可以将$\mathrm{Re}(\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t})$代入

$$\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}k^2\xi^2$$

而算出，它每秒中的变化为

$$\dot{\xi}(m\ddot{\xi}+k\xi)=\dot{\xi}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{\xi},$$

因而等于

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{-\mathrm{i}\omega_1}{2}\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}+\frac{\mathrm{i}\omega_1^*}{2}\xi_0^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1^* t}\right\}\\&\times\left\{\frac{\mathrm{i}\omega_1^3}{2}\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}-\frac{\mathrm{i}\omega_1^{*3}}{2}\xi_0^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1^* t}\right\}.\end{aligned} \tag{64.24}$$

对以上所说的一段时间取平均，再忽略ω_1与ω_0的差别，获得

$$-\frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}\xi_0\xi_0^*\omega_0^4\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{64.25}$$

正是(64.23)乘以−1.这正是我们自能量守恒所希望的.

注意(64.22)与(64.24)是不相等的.它们对于一段时间的平均严格讲来也是不相等的.只是在取平均后,在忽略 $\omega_1^2\omega_1^{*2}$ 与 $\omega_1\omega_1^{*3}$,$\omega_1^3\omega_1^*$ 等的差别后,它们才相等,我们才获得所需的能量守恒.

最后讨论作谐振动的电子对于光波的散射.运动方程为

$$m\ddot{\xi}-bm\dddot{\xi}+\omega_0^2\xi=\mathrm{Re}(E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \tag{64.26}$$

在上式中不妨令 E_0 为一实数.显然地,

$$\xi=\mathrm{Re}(\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \tag{64.27}$$

以 $\xi_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 代入上式,得

$$\xi_0=\frac{(e/m)E_0}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega^3 b}. \tag{64.28}$$

上式亦可写为

$$\xi_0=\frac{e}{m}\frac{E_0}{\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega^3 b)^2\}^{1/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},$$

$$\tan\varphi=-\omega^3 b/(\omega_0^2-\omega^2).$$

因此每秒中的放射为

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\ddot{\xi})^2=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{e}{m}\frac{E_0\omega^2}{\{\cdots\}^{1/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\varphi}\right]\right\}^2.$$

对时间取平均,得

$$\frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{e}{m}E_0\omega^2\right)^2\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+b^2\omega^6}. \tag{64.29}$$

另一方面,电子的总能(即动能加上 $\frac{1}{2}k^2\xi^2$)的变化率对于一个长时间的平均等于零.因此我们希望上式等于外界电磁场每秒中所作的功的平均.事实上,外界电磁场每秒中所作的功等于

$$e\mathrm{Re}(E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\omega\xi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

$$= \frac{1}{4} e (E_0 e^{-i\omega t} + E_0 e^{i\omega t})(- i\omega \xi_0 e^{-i\omega t} + i\omega \xi_0^* e^{i\omega t}).$$

对时间的平均为

$$\frac{1}{4} e E_0 (i\omega \xi_0^* - i\omega \xi_0)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{e^2 i\omega}{m} E_0^2 \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega^3 b} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega^3 b} \right\}$$

$$= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^6} \frac{1}{2} \frac{e^2 \omega^4 b}{m} E_0^2, \qquad (64.30)$$

即是(64.29). 因此能量守恒在此获得了证实.

由(64.29),可以算出有效截面

$$\frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^6}. \qquad (64.31)$$

这个式子在 $\omega_0 \to 0$时趋近于 § 63中的结果. 由公式,可见这里的 σ 比 § 63中的 σ 大. 公式(64.31)对我们最有兴趣的时候乃是 $\omega \approx \omega_0$ 的时候. 但不幸地当 $\omega \approx \omega_0$时我们必须考虑量子现象. 因此我们不能希望 $\omega \approx \omega_0$时的(64.31)与实验符合. 当 $\omega \gg \omega_0$而$(2\pi c/\omega)$并不$\ll h/mc$ 时,又当 $\omega \ll \omega_0$时,(64.31)给我们一个相当合理的结果.

由以上的几个例子,可以看到能量守恒只在某些情形下成立. 这些情形的共同特点是:电子的运动带有振动,亦即 ξ 的式子带有 $\exp(-i\omega t)$的因子,而我们所讨论的能量改变等等都是一个对时间取平均的值,取平均所用时间比$(1/\omega)$大出许多. 基本上只有在以上的情形下,能量守恒才成立. 不难直接看出这件事的理由. 事实上,在以上的情形下

$$-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int (\ddot{\xi})^2 dt = + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int \dot{\xi} \, \dddot{\xi} \, dt,$$

上式左方为放射,右方即辐射阻尼项所作的功.

在下一节中,我们讨论以任意速度运动着的电子.

§65　狄拉克运动方程的例

运动方程为(58.35)，亦即

$$m\ddot{\xi}_\mu-\frac{2}{3}(e^2/c^5)(c^2\dddot{\xi}_\mu-\dot{\xi}_\mu\ddot{\xi}_\nu\dddot{\xi}_\nu)=(e/c)H''_{\mu\nu}\dot{\xi}_\nu,\tag{65.1}$$

式中 H''代表外界的场. 先讨论左方只为 $m\ddot{\xi}_\mu$ 情形时的两个特例.

(1) 外界电场是均匀的，外界磁场不存在

在此处，

$$\mathrm{i}H_{14}=\text{常数}\ E_0,\quad H_{\mu\nu}=0\ (\text{当}\ \mu\nu\neq 14\ \text{或}\ 41).\tag{65.2}$$

将(65.1)首三个分量写出，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{\xi}_1=eE_0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{\xi}_2=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\xi_3=0.\tag{65.3}$$

由此得

$$m\dot{\xi}_1=eE_0t+C_1,\quad m\dot{\xi}_2=C_2,\quad m\dot{\xi}_3=C_3.\tag{65.4}$$

式中 C_1,C_2,C_3为三个常数. 不妨令 $C_1,C_3=0$而只讨论 ξ_1,ξ_2的变化情形.

由$\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2$可以求出三维空间的速度 $\boldsymbol{u}$. 由(47.20)，知

$$u_i=c^2p_i/U,$$
$$U=c\{p_i^2+m^2c^2\}^{1/2}.$$

亦即

$$\begin{cases}U=c\{m^2c^2+C_2^2+e^2E_0^2t^2\}^{1/2},\\ u_1=ceE_0t\{m^2c^2+C_2^2+e^2E_0^2t^2\}^{-1/2},\\ u_2=cC_2\{m^2c^2+C_2^2+e^2E_0^2t^2\}^{-1/2}.\end{cases}\tag{65.5}$$

引入 U_0，代表质点在 $t=0$时刻的能量

$$c\{m^2c^2+C_2^2\}^{1/2},$$

上式可以简化. 积分,我们获得

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1}{eE}\{U_0^2 + c^2e^2E_0^2t^2\}^{1/2}, \\ \xi_2 = \dfrac{C_2c}{eE_0}\text{arcsinh}\left(\dfrac{ceE_0t}{U_0}\right) \end{cases} \tag{65.6}$$

(积分常数取为零). 由上两式,获得

$$\xi_1 = \frac{U_0}{eE_0}\cosh\frac{eE_0\xi_2}{C_2c}. \tag{65.7}$$

因此在均匀电场下,电子轨道为一悬链线. 注意在寻常力学(即牛顿力学)中,轨道是一抛物线. 当时间 $t\to\infty$ 时,此处的 $u_1\to c$,而寻常力学中的 $u_1\to\infty$,因此运动便极不相同.

(2) 外界磁场是均匀的,而电场不存在

取外界磁场在 z 轴方向,大小为 H_0. 运动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\,\dot{\xi}_1 = \left(\dfrac{e}{c}\right)\dot{\xi}_2H_0(1-\beta^2)^{1/2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\,\dot{\xi}_2 = -\left(\dfrac{e}{c}\right)\dot{\xi}_1H_0(1-\beta^2)^{1/2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\,\dot{\xi}_3 = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\,\dot{\xi}_4 = 0. \end{cases} \tag{65.8}$$

由上式中最末一式,知 $|u|$ 不变,亦即 β 不变. 因此上式可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \omega u_2, \quad \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -\omega u_1, \tag{65.9}$$

式中 ω 代表

$$eH_0(1-\beta^2)^{1/2}/mc = eH_0c/U,$$

在运动中是一常数. 求(65.9)的解时,先将(65.9)写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1 + \mathrm{i}u_2) = -\mathrm{i}\omega(u_1 + \mathrm{i}u_2), \tag{65.10}$$

由此获得

$$(u_1 + \mathrm{i}u_2) = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\varphi)},$$

式中 C,φ 乃是两个实常数. 由上式求得

$$\begin{cases} u_1 = C\cos(\omega t + \varphi), \\ u_2 = -C\sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \tag{65.11}$$

再度积分，获得

$$\begin{cases} \xi_1 = C'\sin(\omega t + \varphi), \\ \xi_2 = C'\cos(\omega t + \varphi), \end{cases} \tag{65.12}$$

式中 C' 代表 (C/ω).

积分(65.8)中关于 $\dot{\xi}_3$ 的式子二次，得

$$\xi_3 = C_2 t + C_3. \tag{65.13}$$

由上式及(65.12)，可知运动轨道是一个螺旋线.

最后附带地讨论外界电场磁场均存在，均为均匀的、均沿 z 轴的情形. 运动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\,\dot{\xi}_1 = \dfrac{e}{c}\,\dot{\xi}_2 H_0 (1-\beta^2)^{1/2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\,\dot{\xi}_2 = -\dfrac{e}{c}\,\dot{\xi}_1 H_0 (1-\beta^2)^{1/2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\,\dot{\xi}_3 = eE_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\,\dot{\xi}_4 = \dfrac{e}{c}\mathrm{i}E_0\,\dot{\xi}_3 (1-\beta^2)^{1/2}. \end{cases} \tag{65.14}$$

由(65.14)第三式，得

$$\dot{\xi}_3 = eE_0 t/m.$$

代入(65.14)第四式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{e^2E_0^2}{m^2c^2} t (1-\beta^2)^{1/2};$$

积分，得

$$\frac{1}{(1-\beta^2)} = \frac{e^2E_0^2}{m^2c^2} t^2 + C.$$

令 u 在 $t=0$时为零,得 $C=1$,得

$$1-\beta^2=\{1+e^2E_0^2t^2/m^2c^2\}^{-1}.$$

代入(65.14)第一第二两式,获得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\xi}_1+\mathrm{i}\,\dot{\xi}_2)=-\mathrm{i}(\dot{\xi}_1+\mathrm{i}\,\dot{\xi}_2)\frac{eH_0}{cm}\left(1+\frac{e^2E_0^2t^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2}.$$

积分,得

$$\ln(\dot{\xi}_1+\mathrm{i}\,\dot{\xi}_2)=-\mathrm{i}\frac{H_0}{E_0}\ln\left\{t+\left(t^2+\frac{m^2c^2}{e^2E_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}+C_1-\mathrm{i}C_2,$$

式中 C_1,C_2均为实数. 由上式,不难求出

$$\dot{\xi}_1+\mathrm{i}\,\dot{\xi}_2=\mathrm{e}^{C_1}[\cos\{\cdots\}-\mathrm{i}\sin\{\cdots\}];$$

由此获得了

$$\dot{\xi}_1=\mathrm{e}^{C_1}\cos\{(H_0/E_0)\ln(t+\cdots)+C_2\},$$

$$\dot{\xi}_2=-\mathrm{e}^{C_1}\sin\{(H_0/E_0)\ln(t+\cdots)+C_2\}.$$

由此可以验证直接自(65.14)获得的

$$\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2=\text{常数}.$$

再一次的积分给我们

$$\xi_1=\mathrm{e}^{C_1}\sin\{(H_0/E_0)\ln(t+\cdots)+C_2\}\frac{cm}{eH_0},$$

$$\xi_2=\mathrm{e}^{C_1}\cos\{(H_0/E_0)\ln(t+\cdots)+C_2\}\frac{cm}{eH_0}.$$

至于 ξ_3,那么我们积分

$$\frac{\mathrm{d}\xi_3}{\mathrm{d}t}=\frac{eE_0t}{m}(1-\beta^2)^{1/2}=\frac{eE_0t}{m\{1+e^2E_0^2t^2/m^2c^2\}^{1/2}},$$

得

$$\xi_3=\frac{mc^2}{eE_0}\left\{1+\frac{e^2E_0^2t^2}{m^2c^2}\right\}^{1/2}.$$

以上便是全部的解答.

很显然地,以上的讨论忽略了辐射阻尼项,不会带来有兴趣的

结论. 在以下的例题中,我们引入辐射阻尼项. 在那里我们可以看到两点:

(i) 质点在没有受到外力前,可能已经开始有了加速度;

(ii) 质点在外力过去后,必须以常速度运动.

这两点都是由于在 $s=\pm\infty$ 处引入了条件而引起的. 第(i)点已在§57中提起,现在补充证明.

我们先讨论在一维空间中的运动. 让电子沿 x 轴运动,让外界电场也沿此方向,让外界磁场等于零. 这样的问题已在§57中计算过. 当外界场 E 认为是 s 的函数

$$E = E(s)$$

时,那么一般的解便是

$$c\dot{\tau} = c\cosh q, \quad \dot{\xi}_1 = c\sinh q, \tag{65.15}$$

$$q = C_1 + C_2 e^{s/b} + \frac{e}{cm}\int_{-\infty}^{s} E(s')ds' - \frac{e}{cm}\int_{-\infty}^{s} e^{(s-s')/b}E(s')ds'. \tag{65.16}$$

取一个特殊情形

$$E = E_0\delta(s - s^*),$$

得

$$\begin{cases} q = C_1 + C_2 e^{s/b} + \dfrac{eE_0}{cm}[1 - e^{(s-s^*)/b}] & (s > s^*), \\ q = C_1 + C_2 e^{s/b} & (-\infty < s < s^*). \end{cases} \tag{65.17}$$

如果像§57所说的,我们要求

$$\dot{q}(+\infty) = 0, \quad \dot{q}(-\infty) = 0, \tag{65.18}$$

那么

$$C_2 = (eE_0/cm)e^{-s^*/b},$$

而 C_1 是任意的,得

$$\begin{cases} q = C_1 + (eE_0/cm) & (s > s^*), \\ q = C_1 + (eE_0/cm)e^{(s-s^*)/b} & (-\infty < s < s^*); \end{cases} \tag{65.19}$$

因此

$$\begin{cases}\dot{q}=0 & (s>s^*),\\ \dot{q}=(eE_0/cmb)\mathrm{e}^{(s-s^*)/b} & (-\infty<s<s^*).\end{cases}\tag{65.20}$$

不难自(65.19)中看出(i),(ii)两点. 当 $s^*>s$ 而 $s^*-s=O(b)$ 时,$\dot{q}$ 已经显著地不等于零,亦即在电子中心遇到外界电场前,$\dot{q}$已经开始不等于零. 早出一段的时间,与 b 为同数量级,而 b 与 r_0/c 为同数量级. 因此早出的一段时间,正等于以光速 c 通过经典半径 r_0所需要的时间. 以上可以理解为:电子对外界电场而言,它的行动正好像它有一个半径 r_0似的. 这具体地说明了(i). 至于(ii),在这里它是显然的. 当 $s>s^*$ 时(亦即外界力已过去时),q 是一个常数,亦即电子以常速度运动.(可以附带地在此指出,(65.19)尚有一个未决定的常数. 为了决定这个常数,只消假定 $q(-\infty)=0$,或给定 q 在某一个时刻的值.)

如果外界场为

$$E=E_{01}\delta(s-s_1^*)+E_{02}\delta(s-s_2^*)\quad(s_2^*>s_1^*),$$

同样的讨论给我们以下的结果:

$$q=C_1+(eE_{01}/cm)+(eE_{02}/cm)\quad(s>s_2^*),$$

$$q=C_1+(eE_{01}/cm)+(eE_{02}/cm)\mathrm{e}^{(s-s_2^*)/b}\quad(s_1^*<s<s_2^*),$$

$$q=C_1+(eE_{01}/cm)\mathrm{e}^{(s-s_1^*)/b}+(eE_{02}/cm)\mathrm{e}^{(s-s_2^*)/b}\quad(-\infty<s<s_1^*).$$

一般的情形可以认为是许多 $\delta(s-s^*)$波的合成,因此也有类似的解. 事实上,(65.19)可以写为

$$q=C_1+(eE_0/cm)\left\{\varepsilon(s-s^*)+\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{(s-s^*)/b}\left[-\varepsilon(s-s^*)+\frac{1}{2}\right]\right\},$$

因此如果将 $E(s)$写为

$$E(s)=\int E(s^*)\delta(s-s^*)\mathrm{d}s^*,$$

得

$$q=C+\int \mathrm{d}s^*[eE(s^*)/cm]\Big\{\varepsilon(s-s^*)+\frac{1}{2}$$
$$+\mathrm{e}^{(s-s^*)/b}\Big[-\varepsilon(s-s^*)+\frac{1}{2}\Big]\Big\}.$$

这便是一维空间的运动的一般解. 在上式中,$\varepsilon(x)$乃一函数,定义为

$$\varepsilon(x)=\frac{1}{2}\quad(x>0),\quad \varepsilon(x)=-\frac{1}{2}\quad(x<0).$$

由这个解,不难证实上面所谈的(i),(ii)两点.(在这里,正同(65.17)一样,(65.18)不能完全地决定了 q 的常数. 为决定上式中的 C,必须引入一个新的涉及 q 的条件.)

让我们现在讨论在二维空间中的运动;在这里讨论(i)比较困难,所以我们只讨论第(ii)点. 写出自由电子的运动方程,它们为

$$\begin{cases} m\,\ddot{\xi}_1-\frac{2}{3}(e^2/c^3)[\dddot{\xi}_1-c^{-2}\,\dot{\xi}_1(\ddot{\xi}_1^2+\ddot{\xi}_2^2-c^2\,\ddot{\tau}^2)]=0,\\ m\,\ddot{\xi}_2-\frac{2}{3}(e^2/c^3)[\dddot{\xi}_2-c^{-2}\,\dot{\xi}_2(\ddot{\xi}_1^2+\ddot{\xi}_2^2-c^2\,\ddot{\tau}^2)]=0,\\ m\,\ddot{\tau}-\frac{2}{3}(e^2/c^3)[\dddot{\tau}-c^{-2}\,\dot{\tau}\,(\ddot{\xi}_1^2+\ddot{\xi}_2^2-c^2\,\ddot{\tau}^2)]=0. \end{cases} \tag{65.21}$$

引入

$$\begin{cases} c\,\dot{\tau}=c\cosh q,\quad \dot{\xi}_1=c\sinh q\cos\theta,\\ \dot{\xi}_2=c\sinh q\sin\theta. \end{cases} \tag{65.22}$$

代入(65.21)第三式,得

$$m\,\dot{q}-\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}[\ddot{q}-\sinh q\cosh q\,\dot{\theta}^2]=0. \tag{65.23}$$

由(65.21)第一第二两式,得

$$m(\dot{\xi}_2\ddot{\xi}_1-\dot{\xi}_1\ddot{\xi}_2)-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{\xi}_2\dddot{\xi}_1-\dot{\xi}_1\dddot{\xi}_2)=0,$$

以(65.22)代入，得

$$-m\sinh q\,\dot{\theta}-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\{-2\cosh q\,\dot{q}\,\dot{\theta}-\sinh q\,\ddot{\theta}\}=0,\tag{65.24}$$

或

$$b\ddot{\theta}+2b\coth q\,\dot{q}\,\dot{\theta}-\dot{\theta}=0.$$

对$\dot{\theta}$积分，得

$$\dot{\theta}=C\exp\{(s/b)-2\ln\sinh q\}=C(\sinh q)^{-2}e^{s/b},\tag{65.25}$$

式中 C 为一常数. 以此代入(65.23)，得

$$\dot{q}-b\ddot{q}+C^2be^{+2s/b}\cosh q(\sinh q)^{-3}=0.\tag{65.26}$$

由(65.25)，(65.26)不难证明，如果 $C\neq0$，那么当 $s\to\infty$ 时 q 必然趋近于无穷大. 证明如下：将(65.26)写为

$$\frac{d}{ds}(\dot{q}e^{-s/b})-C^2e^{s/b}\cosh q(\sinh q)^{-3}=0;\tag{65.27}$$

与寻常力学中的运动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{A}{x^3}\quad(A>0)$$

比较，可以看出 q 不可能趋近于零. 因此 q 必须始终为正数，或始终为负数. 讨论第一个情形. 如果 q 在 $s\to\infty$ 时不趋于∞，那么必有两个正数 a_1,a_2，使

$$0<a_1<q<a_2<\infty,$$

亦即有两个正数 a_3,a_4使

$$0<a_3<\sinh q<a_4<\infty.$$

因此

$$\frac{d}{ds}(\dot{q}e^{-s/b})=C^2e^{s/b}\cosh q(\sinh q)^{-3}>C^2e^{s/b}a_4^{-3},$$

亦即

$$\dot{q}e^{-s/b} > C^2 b e^{s/b} a_4^{-3},$$

亦即

$$\dot{q} > C^2 b e^{2s/b} a_4^{-3}, \tag{65.28}$$

亦即

$$q > \frac{1}{2} C^2 b^2 e^{2s/b} a_4^{-3}. \tag{65.29}$$

因此当 $s \to \infty$ 时，q 也 $\to \infty$.（当 q 始终为负数时，也可以同样地证明 $|q| > e^{2s/b}$ 乘上一正常数）. 因此如果 $C \neq 0$，q 在 $s \to \infty$ 时必须趋近于 ∞；这即是我们所欲证明的.

引入条件 $\dot{q}(\infty)=0$ 即是引入 $q(s)$ 在 $s \to \infty$ 时趋近于一个常数的条件. 根据上段计算，要求 $q(+\infty)$ 为一个有限的常数即是要求 $C=0$. 因此引入 $\dot{q}(\infty)=0$ 即是要求 $C=0$. 当 $C=0$ 时，(65.26) 成为 $\dot{q} - b\ddot{q} = 0$，因此

$$q = C_1 + C_2 e^{s/b}.$$

由于条件 $\dot{q}(\infty)=0$，我们令 $C_2=0$. 因此整个解答为

$$q = C_1, \quad \theta = C_3, \tag{65.30}$$

亦即质点以常速运动.

因此在质点受力后再作自由运动时，它必须以常速度运动. 换句话说：自由运动的质点不可能有加速度（虽然运动方程允许这一点），所以不可能有加速度乃是由于 $\dot{q}(\infty)=0$ 或 $q(\infty)$ 为有限数的条件.

人们可能想像，一个自由运动着的质点（即不受外力的质点），似乎可以一面放射，一面由于放射而逐渐减速. 在 (65.1) 的方程及附加条件 $\dot{q}(\infty)=0$ 下，这一个情形是不允许的.

限于讨论中所遇到的数学上的复杂性，我们不讨论 (65.1) 如何应用到氢原子及其他问题，及由此而获得的结果. 读者可参阅第 § 57 的注中的文献.

狄拉克方程的主要缺点为应用它时由于必须引入 $\dot{q}(\infty)=0$ 条

件而带来的不方便.在他的理论中,严格讲来,要解决任何问题,必须完全地求解,以便引入$\dot{q}(\infty)=0$的条件,而不能单独地研究一小段时间中电子的运动.

如果放弃相对论,如果我们只要求辐射能量等于辐射阻尼力所作的功,那么我们还可以设想以下的运动方程:

$$m\,\ddot{\xi}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\ddot{\xi}^2/\dot{\xi}^2)\,\dot{\xi}=\boldsymbol{F}, \tag{65.31}$$

设想它在$\dot{\xi}$取小值时有效.当$\boldsymbol{F}=0$时,我们求得

$$\dot{\xi}=Ce^{-t/b},$$

与以前不同.在这里$\dot{\xi}(\infty)$自然而然地趋近于零.在一般情形下(例如谐振子),(65.31)的积分是比较困难的.由于它显然地不符合相对论,它还没有为人所研究过.

依照作者的猜度,一个自由电子的运动方程可能是一个微分积分方程,而这个方程不能经过多次微分而变为微分方程.理由是这样的,如果电磁场是两个或多个场的和或差,而其中之一的势适合介子场方程(20.1),那么后者不单依赖电子在推迟时刻的情况,而也依赖电子在推迟时刻前的情况,因此辐射阻尼项可能不单与该时的电子情况有关,而与电子在推迟时刻前的情况有关.这样,电子运动方程便可能是一个微分积分方程.如果限于微分方程而又限于相对论的原则,那么(65.1)几乎是惟一的方程(§57),我们也不用多猜了.当然,当运动方程为一个微分积分方程时,我们也不能单独地研究一小段时间中的运动,但我们完全有可能在研究电子在固有时s_1的运动时只需知道电子在固有时$<s_1$的情形,而不必去讨论电子在$s=\infty$时的运动.这一方面使计算变为容易,另一方面也使理论与寻常的因果律一致.

§66 作旋转运动的电子的放射.电子回旋加速器

现在讨论一个作圆周运动的电子的放射.

令电子在 xy 平面中运动(见图 40),沿着一个以原点 O 为中心、a 为半径的圆周而运动着,速度大小不变.令电子的直角坐标为(ξ_1,ξ_2,ξ_3),因此 $\xi_3=0$.令矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 与 Ox 轴成角 ψ,那时

$$\psi=\omega\tau, \tag{66.1}$$

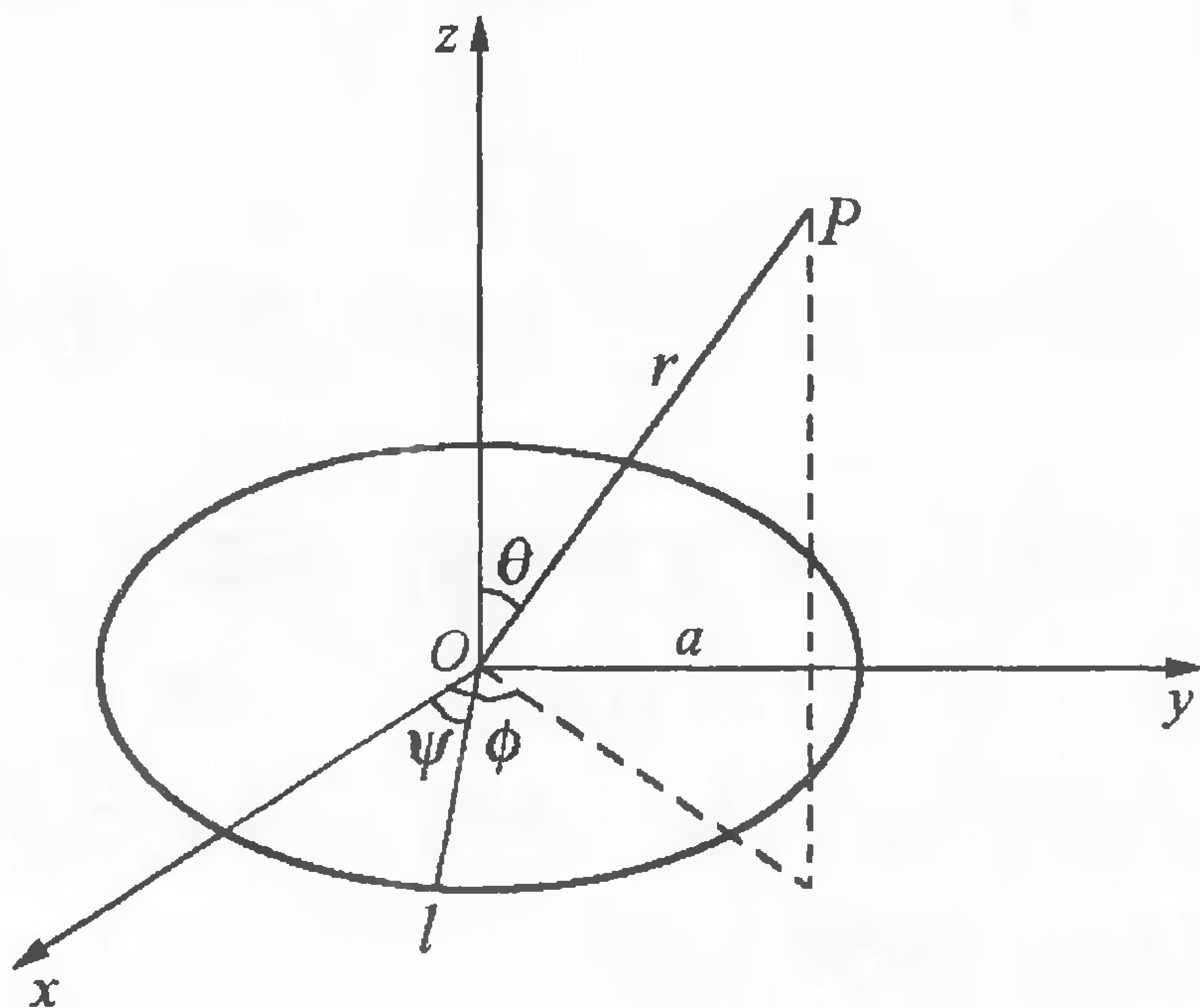


图　40

式中 ω 为一常数,等于(u/a).讨论 P 点在 t 时的 $\boldsymbol{A},\varphi$.称 OP 为 $\boldsymbol{r}$,又令 P 的球面坐标为(γ,θ,φ).根据以前的理论,知 $\boldsymbol{A},\varphi$ 等于

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\dfrac{e}{c}\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{u}(\tau)}{R}\delta\left(\tau-t+\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}\tau,\\ \varphi=e\displaystyle\int\frac{1}{R}\delta\left(\tau-t+\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}\tau,\end{cases} \tag{66.2}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 代表自电子至 P 的矢量,等于

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}(\tau), \tag{66.3}$$

大小等于

$$r\left\{1-\frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\xi}}{r^2}+\frac{\xi^2}{r^2}\right\}^{1/2}.$$

对于极远的 P,上式可以近似为

$$\begin{aligned}r-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\xi})/r&=r-a\sin\theta\cos(\psi-\varphi)\\&=r-a\sin\theta\cos(\omega\tau-\varphi).\end{aligned} \tag{66.4}$$

现在让我们只讨论在极远处的 $\boldsymbol{A},\varphi$.如此,在所求得的 $\boldsymbol{A},\varphi$ 中,我

们便能够忽略$O(1/r^2)$,$O(1/r^3)$,…等等. 以(66.4)代R,(66.2)中的$\boldsymbol{A}$,φ成为

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \dfrac{e}{cr}\displaystyle\int \boldsymbol{u}(\tau)\delta\left\{\tau - t + \dfrac{r}{c} - \dfrac{a\sin\theta\cos(\omega\tau-\varphi)}{c}\right\}\mathrm{d}\tau, \\ \varphi = \dfrac{e}{r}\displaystyle\int \delta\left\{\tau - t + \dfrac{r}{c} - \dfrac{a\sin\theta\cos(\omega\tau-\varphi)}{c}\right\}\mathrm{d}\tau. \end{cases} \tag{66.5}$$

根据上式,我们立即求出φ,它等于e/r. 因此余下的工作乃是求$\boldsymbol{A}$.

在这里,电子运动是带有周期性的,周期T等于

$$2\pi/\omega.$$

因此(66.5)第一式中的$\boldsymbol{u}(\tau)$是一个带有周期性的函数. 我们将利用这一点来求出(66.5)的第一式.

先将(66.5)的第一式写为

$$\frac{e}{cr}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \boldsymbol{u}(\tau)\delta\left(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a\sin\theta\cos(\omega\tau-\varphi)}{c}\right)\mathrm{d}\tau, \tag{66.6}$$

式中τ_0为一常数,我们选择它,使得(τ_0,τ_0+T)的区间包含了推迟时刻$\tau(\mathrm{ret})$. 将上式中δ函数的变数称为g,而将上式中的$\delta(g)$改为一个有周期性的函数$\delta^*(g)$(指对g而言有周期性),周期也是T. 因为$\mathrm{d}g/\mathrm{d}\tau\approx 1$,因此当$\tau(\mathrm{ret})$不靠近顶点$\tau_0$, τ_0+T时,取适当的$\delta^*(g)$,可以不影响在(66.6)的积分区间的被积分项. 我们得

$$\boldsymbol{A} = \frac{e}{cr}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \boldsymbol{u}(\tau)\delta^*\left(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a\sin\theta\cos(\omega\tau-\varphi)}{c}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{66.7}$$

已知$\delta^*(0)\neq 0$, $\delta^*(g)$对于一个周期中的其他点等于零,又已知$\delta^*(g)$对于一个周期的积分等于1,又已知$\delta^*(g)$为一周期性函数,周期为T,那么应用傅里叶级数理论,获得

$$\delta^*(g) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi n i g/T} = \frac{\omega}{2\pi}\sum \mathrm{e}^{in\omega g}. \tag{66.8}$$

以此代入(66.7)，以 β 代替 $u/c=a\omega/c$，获得

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{A}=\sum_n \boldsymbol{A}(n)\exp\left\{-\mathrm{i}n\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right\},\\&\boldsymbol{A}(n)=\frac{e}{cr}\frac{\omega}{2\pi}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T}\boldsymbol{u}\exp\mathrm{i}\left\{n(\omega\tau-\varphi)+n\frac{\pi}{2}\right.\\&\qquad\left.-n\beta\sin\theta\sin\left(\omega\tau-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\right. \tag{66.9}$$

以 $\alpha=\omega\tau-\varphi+(\pi/2)$ 代替 τ，得

$$\boldsymbol{A}(n)=\frac{e}{cr}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{u}\exp\mathrm{i}\{n\alpha-n\beta\sin\theta\sin\alpha\}\mathrm{d}\alpha. \tag{66.10}$$

积分上下限所以能换为$(-\pi,+\pi)$，乃是由于被积分项的周期性.引入

$$\left\{\begin{aligned}&u_\varphi=u\cos(\omega\tau-\varphi)=u\sin\alpha,\\&u_\theta=u\cos\theta\sin(\omega\tau-\varphi)=-u\cos\theta\cos\alpha,\end{aligned}\right. \tag{66.11}$$

分别地代表 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 方向垂直的两个分量，获得 $\boldsymbol{A}(n)$与 $\boldsymbol{r}$ 垂直的两个分量

$$\left\{\begin{aligned}&A_\varphi(n)=\frac{eu}{cr}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\alpha-n\beta\sin\theta\sin\alpha)}\mathrm{d}\alpha,\\&A_\theta(n)=-\frac{eu}{cr}\cos\theta\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\alpha-n\beta\sin\theta\sin\alpha)}\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}\right. \tag{66.12}$$

不难看出，$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 方向的分量等于零.

在贝塞尔函数的理论中，有以下的关系：

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\alpha-x\sin\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\mathrm{J}_n(x),\\&\mathrm{J}_{n+1}(x)+\mathrm{J}_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}\mathrm{J}_n(x).\end{aligned}\right. \tag{66.13}$$

利用此两个关系，将(66.12)化为

$$\left\{\begin{aligned}&A_\varphi(n)=\mathrm{i}\frac{eu}{cr}\mathrm{J}'_n(n\beta\sin\theta),\\&A_\theta(n)=-\frac{e}{r}\cot\theta\,\mathrm{J}_n(n\beta\sin\theta).\end{aligned}\right. \tag{66.14}$$

由此算出

$$\begin{cases} H_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\sum rA_\varphi(n)\mathrm{e}^{-in\gamma} \\ \quad = \dfrac{2e\beta^2}{ar}\sum n\mathrm{J}_n'(n\beta\sin\theta)\cos n\gamma, \\ H_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} = -\dfrac{2e\beta}{ar}\cot\theta\sum n\mathrm{J}_n(n\beta\sin\theta)\sin n\gamma, \\ H_r = 0, \end{cases} \tag{66.15}$$

式中 γ 代表

$$\omega t - (\omega r/c) - \varphi + (\pi/2).$$

当我们只讨论 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 中与 $1/r$ 同级的量，我们有以下的关系：

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r})/r,$$

因此

$$E_\varphi = -H_\theta,\quad E_\theta = H_\varphi,\quad E_r = 0. \tag{66.16}$$

以上便是求 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的全部结果.

不难求出能量的放射的式子. 乌莫夫矢量 $\boldsymbol{Y}$ 的各个分量如下：

$$\boldsymbol{Y} = (c/4\pi)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}),$$

$$Y_r = (c/4\pi)(E_\theta H_\varphi - E_\varphi H_\theta) = (c/4\pi)(H_\varphi^2 + H_\theta^2),$$

$$Y_\theta = Y_\varphi = 0.$$

以求出的 H_φ,H_θ 代入上式，对时间取平均，利用

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos n\gamma\cos n'\gamma\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \sin n\gamma\sin n'\gamma\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\delta_{nn'},$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos n\gamma\sin n'\gamma\,\mathrm{d}t = 0$$

等式，便获得了

$$Y_r = \frac{1}{r^2}\sum_n \frac{e^2n^2\beta^2c}{2\pi a^2}\{\cot^2\theta\ \mathrm{J}_n^2(n\beta\sin\theta) + \beta^2\mathrm{J}_n'^2(n\beta\sin\theta)\}.$$

因此每秒中在立体角 $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ 中的放射等于

$$\sum_n \frac{e^2n^2\beta^2c}{2\pi\sigma^2}\{\cot^2\theta\mathrm{J}_n^2(n\beta\sin\theta) + \cdots\}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{66.17}$$

这一项的详细计算见伊万宁柯与沙科洛夫合著的书①. 在此我们不拟叙述这个计算.

显然,我们希望利用这个计算方法来计算一个有大小的、作自转运动的电子的放射. 如果电子各部分的放射是不相干的,那么能量放射基本上即是(66.17),所差的只是一个常数倍. 这样的电子是难以想像的. 另一方面,如果电子各部分像一个刚体的各部分,使所放射的电磁场可以相互干涉,那么这样的计算便带来了 $\boldsymbol{A}=0$ 的结果. 理由如下：令(66.9)中的 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{F}(t)$. 如果将(66.1)改为

$$\psi=\omega\tau+\delta_i,$$

那么相应的 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{F}(t+(\delta_i/\omega))$. 显然地,在计算整个电子所放射的 $\boldsymbol{A}$ 时,我们遇到了

$$\int_0^{2\pi}\boldsymbol{F}(t+(\delta_i/\omega))\mathrm{d}\delta_i$$

的积分. 以(66.9)的 $\boldsymbol{F}$ 代入上式,获得了 $\boldsymbol{A}(0)$,亦即是零. 因此 $\boldsymbol{H}=0$,因此 $\boldsymbol{E}$ 的辐射部分也等于零. 这个结果是极有兴趣的.

让我们研究用什么外界的电磁场才可以使电子始终在一个圆周上运动. 令圆周在 xy 平面中(见图 41),中心为原点 O,半径为 a,与前相同. 令外界磁场方向到处沿 z 轴,大小只与 $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\equiv\rho$ 有关. 令外界电场大小只是 ρ 的函数,方向是这样的,使得它们的电力线都是以原点为中心的圆,圆所在

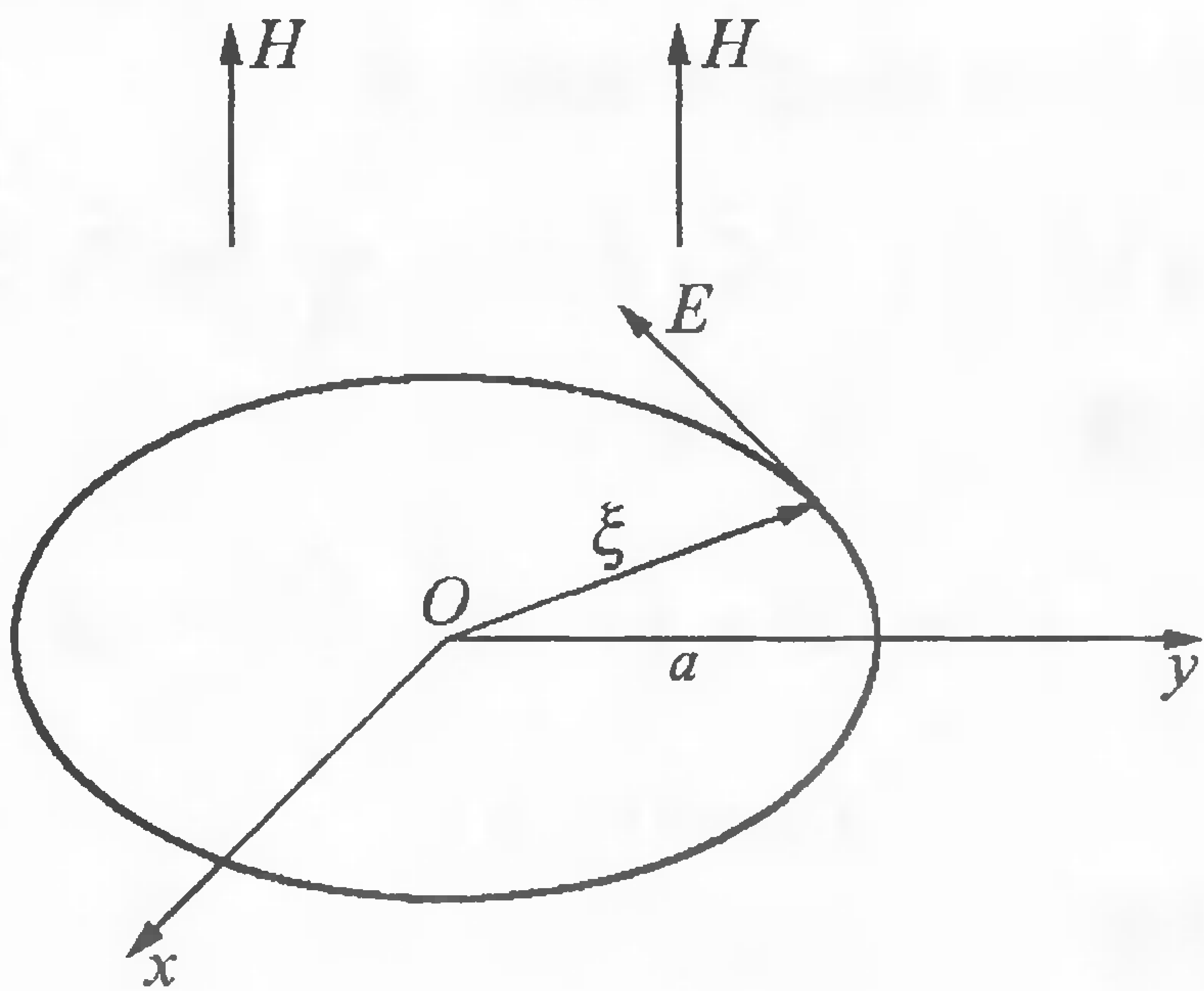


图　41

的平面都与 xy 面平行. 更清楚地说,在 xy 面中各点的 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{\xi}$ 垂直,方向为 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\xi}$($\boldsymbol{k}$ 为沿 z 轴的单位矢量). 这样,运动方程成为

① 见伊万宁柯与沙科洛夫著《经典场论》§ 39.

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{e^2}{c^3}\{\dddot{\xi}_1 - c^{-2}\dot{\xi}_1(\ddot{\xi}_1^2 + \ddot{\xi}_2^2 - c^2\ddot{\tau}^2)\} \\ \quad = \dfrac{e}{c}\dot{\xi}_2 H + \dfrac{eE_1}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \\ m\ddot{\xi}_2 - \dfrac{2}{3}\dfrac{e^2}{c^3}\{\dddot{\xi}_1 - c^{-2}\dot{\xi}_1(\ddot{\xi}_1^2 + \ddot{\xi}_2^2 - c^2\ddot{\tau}^2)\} \\ \quad = -\dfrac{e}{c}\dot{\xi}_1 H + \dfrac{eE_2}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \\ m\ddot{\tau} - \dfrac{2}{3}\dfrac{e^2}{c^3}\{\dddot{\tau} - c^{-2}\dot{\tau}(\ddot{\xi}_1^2 + \ddot{\xi}_2^2 - c^2\ddot{\tau}^2)\} \\ \quad = \dfrac{e}{c^2}\dfrac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \end{cases} \tag{66.18}$$

引入(65.22)，τ 的式子成为

$$m\sinh q\,\dot{q} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\{\sinh q\,\ddot{q} - \cosh q\sinh^2 q\,\dot{\theta}^2\} = \frac{e}{c}E\sinh q,$$

或

$$\dot{q} - b\ddot{q} + b\cosh q\sinh q\,\dot{\theta}^2 = (eE/mc). \tag{66.19}$$

自 ξ_1,ξ_2 的运动方程，得

$$m(\dot{\xi}_2\ddot{\xi}_1 - \dot{\xi}_1\ddot{\xi}_2) - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{\xi}_2\dddot{\xi}_1 - \dot{\xi}_1\dddot{\xi}_2) = \frac{e}{c}H(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2),$$

亦即

$$-mc^2\sinh^2 q\,\dot{\theta} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}[-2c^2\cosh q\sinh q\,\dot{q}\,\dot{\theta} - c^2\sinh^2 q\,\ddot{\theta}]$$
$$= Hce\sinh^2 q,$$

亦即

$$\dot{\theta} - b[2\coth q\,\dot{q}\,\dot{\theta} + \ddot{\theta}] = -(He/mc). \tag{66.20}$$

如果电子以均匀的速度沿着圆周运动(半径为 a，速度大小为 u)，那么

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = u/a, \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

$$\dot{\theta} = u/a(1-\beta^2)^{1/2}, \quad \ddot{\theta} = \dot{q} = \ddot{q} = 0.$$

代入(66.20)，获得了

$$|H|=\frac{mc}{e}\frac{u}{(1-\beta^2)^{1/2}a}. \tag{66.21}$$

代入(66.19)，获得了

$$\begin{aligned}E&=\frac{c}{e}b\cosh q\sinh q\ \dot{\theta}^2\\&=\frac{c}{e}b\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left[\frac{u}{a(1-\beta^2)^{1/2}}\right]^2\\&=\frac{2}{3}\frac{e}{c^3}\frac{u^3}{a^2(1-\beta^2)^2}.\end{aligned} \tag{66.22}$$

在这个运动中，(66.18)第三式花括号中的项等于

$$\begin{aligned}&\sinh q\ \ddot{q}-\cosh q\sinh^2 q\ \dot{\theta}^2\\&\quad=-\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\left[\frac{u}{a(1-\beta^2)^{1/2}}\right]^2\\&\quad=-\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{1}{(1-\beta^2)^2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{u^2}{a}\right)^2\\&\quad=-\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^4\frac{1}{c^2}(u')^2.\quad (u'\equiv du/dt)\end{aligned}$$

(66.18)最末一式左方含有花括号的项，乘以 $c^2(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ 后，即是能量在每秒中的放射(符号的差别不计)，因此每秒中能量的放射等于

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^4(u')^2,$$

与非相对论的结果 $(2/3)(e^2/c^3)(u')^2$ 比较，相差只是 $(d\tau/ds)^4$ 的一个因子.

这是研究电子始终作圆周运动时所需要的外界电磁场 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$. 当 $\boldsymbol{E}$ 比上值小时，电子的轨道便逐渐缩小. 寻常在电子回旋加速器内，主要有两个问题：一个是在已知外界电磁场 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 后求电子轨道最大可能的半径；一个是须引进怎样的外界场 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$，才可以使电子轨道自开始回旋起几乎保证为圆，而同时半径逐渐扩大. 第

一个问题的由来乃是由于电子的能量放射，使得它在一定的 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 下的轨道的半径不能超过某一个数值. 由以上的计算，可见这个半径即是在(66.21)，(66.22)中消去 u 而获得的值.

现在讨论第二个问题. 在这里，运动方程依然是(66.18)，亦即是(66.19)，(66.20). 让我们假定运动几乎是一个圆周运动，而同时假定轨道慢慢地放大. 让我们在此忽略 $\ddot{q}$，$\dot{q}\,\theta$，$\ddot{\theta}$ 等项. 我们得

$$\dot{\theta} = -He/mc, \tag{66.23}$$

$$\dot{q} = (eE/mc). \tag{66.24}$$

由第二式，得

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sinh q = m\cosh q\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = m\,\dot{q} = (eE/c).$$

因此质点上的 H 对 t 的变化为

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc}{e}\,\dot{\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc}{e}\,\frac{u}{a(1-\beta^2)^{1/2}}\right)\\ &= \frac{c}{ea}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\sinh q = \frac{c}{ea}e\,\frac{E}{c} = \frac{c}{a}E.\end{aligned} \tag{66.25}$$

(注意在这个式子中，我们忽略了 a 的变化，理由是 a 的变化与 $\ddot{\theta}$ 同比，比 u 的变化小. 这一点不拟在此证明.)因为质点几乎在圆周上运动，而 H 为 $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\equiv\rho$ 及 t 的函数，上式左方的 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ 即是

$$(\partial H/\partial t)_{x,y,z}. \tag{66.26}$$

因为在轨道放大的过程中的每一瞬间，(66.25)都必须满足，我们将 a 改为 ρ，获得

$$-\frac{\partial H(\rho)}{\partial t} = \frac{c}{\rho}E(\rho). \tag{66.27}$$

必须指出，外界的电场磁场不是独立的. 作一个圆 Γ，圆心为原点，半径为 ρ，利用法拉第定律，我们得

$$-\frac{1}{c}\int_0^{\rho}\frac{\partial H}{\partial t}2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho = \int_{\Gamma}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2\pi\rho E(\rho).$$

以 $\overline{H}(\rho)$代表半径为 ρ 的圆中的 H 的平均，

$$\overline{H}(\rho)=\frac{1}{\pi\rho^2}\int H2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho,$$

得

$$E(\rho)=-\frac{\rho}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\overline{H}(\rho). \tag{66.28}$$

与(66.27)相合并，得

$$H(\rho)=\frac{1}{2}\overline{H}(\rho). \tag{66.29}$$

这便是“电子几乎沿圆周运动而半径逐渐扩大”的条件，亦即是电子回旋加速器可以产生高速电子的条件.

电子回旋加速器在近代实验物理中占极重要的位置. 限于本书的性质，我们不能在此详细地叙述它的原理、应用等等. 对此有兴趣的读者可以参阅伊万宁柯与沙科洛夫合著的《经典场论》的§38及该书所指出的文献.

§67　超光速的电子放射. 切连科夫效应

在介质中，电磁波的传播速率比 c 小，因此电子的运动速率可能比电磁波的传播速率大. 可以想像，这样的电子所放射的电磁场与以前§16，§17中所讨论的情形有很大的不同. 事实上，以下的计算完全证实了这一点.

在实验中，最早观察这样的“超光速”的电子的放射现象的是苏联科学家切连科夫[①]. 因此这里被研究的现象称为切连科夫效应. “超光速”的电子的放射的经典理论，亦即切连科夫效应的经典理论，见于弗郎克(Франк)及塔姆(Тамм)的论文[②]. 在本书中，我们只叙述切连科夫效应的经典理论，至于它的量子理论，则请读者参

---

① П. А. Черенков, *Д АН СССР* **2**(1934)451; С. И. Вавилов, *Д АН СССР* **2**(1934)457.

② И. М. Франк и И. Е. Тамм, *Д АН СССР* **14**(1937)107.

阅伊万宁柯及沙科洛夫所著的《量子场论》的 § 32.

现在我们叙述切连科夫效应的经典理论. 在均匀的介质中,场的方程式为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{D}=k\boldsymbol{E}, \tag{67.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{67.2}$$

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho.\end{cases} \tag{67.3}$$

式中 $\rho,\boldsymbol{j}$ 代表自由电子所产生的电荷密度、电流密度,k 为介电常数,而磁化率假定为 1. 讨论一个以均匀速率 u 沿 x 轴运动着的电子所放射的电磁场. 该时

$$\begin{cases}\rho=e\delta(y)\delta(z)\delta(x-ut),\\ j_1=eu\delta(y)\delta(z)\delta(x-ut), \quad j_2=j_3=0.\end{cases} \tag{67.4}$$

由(67.2)得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}; \tag{67.5}$$

引入洛伦兹规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(k/c)\partial\varphi/\partial t=0$,代入(67.3),便获得了

$$\begin{cases}\left(\nabla^2-\dfrac{k}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-\dfrac{4\pi e}{k}\delta(y)\delta(z)\delta(x-ut),\\ \left(\nabla^2-\dfrac{k}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_1=-\dfrac{4\pi eu}{c}\delta(y)\delta(z)\delta(x-ut),\end{cases} \tag{67.6}$$

$$A_2=A_3=0. \tag{67.7}$$

在这里,我们已经假定了 k 是常数. 事实上,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的比不是常数,因为在光学中我们知道光的折射率与频率有关,而 k 恰好是折射率的平方. (67.1)的第二式应该换为

$$\boldsymbol{D}(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\, n^2(\omega)\int\boldsymbol{E}(x\ y\ z\ t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'\right\}; \tag{67.8}$$

这就是说当 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 写为

$$D=\int D(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \quad E=\int E(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

时，$D(\omega)$，$E(\omega)$中有以下的关系：

$$D(\omega)=n^2(\omega)E(\omega). \tag{67.9}$$

如果我们令 k 为一个常数而不用(67.8)式，电子的能量辐射成为无穷大(见以下的讨论). 为简单起见，我们依旧用(67.7)式，而同时用 n^2 来代替 k.

依照§13 中的讨论，φ，A 应该为 $y,z,x-ut$ 的函数. 令 $\hat{x}$ 为 $x-ut$，得

$$(1-n^2\beta^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{4\pi e}{n^2}\delta(y)\delta(z)\delta(\hat{x})$$

$$(n^2\equiv k)\quad(\beta\equiv u/c), \tag{67.10}$$

及 A_1 的一个类似式子. 由这两个式子的比较，可见

$$A_1=n^2\beta\varphi. \tag{67.11}$$

必须指出：由于电子速度比电磁波的传播速度大，$(1-n^2\beta^2)<0$，因此(67.10)是一个双曲线型的微分方程. 它的通过$(\hat{x}_0,y_0,z_0)$的特征面是

$$\frac{1}{(1-n^2\beta^2)}(\hat{x}-\hat{x}_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0,$$

是一个双曲线型的面. 在这个面上，φ 可以是不连续的. 最简单的求解方法是斯米尔诺夫所著《高等数学教程》第二卷§174 中所述的方法. 依照这个方法，我们获得一个解

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{2e}{n^2\{(x-ut)^2-(n^2\beta^2-1)(y^2+z^2)\}^{1/2}}, \\ \qquad ut-x>(n^2\beta^2-1)^{1/2}(y^2+z^2)^{1/2}, \\ 0,\quad ut-x<(n^2\beta^2-1)^{1/2}(y^2+z^2)^{1/2}.\end{cases} \tag{67.12}$$

(注意上式中的 2 字.)这个计算是不严格的. 情形如下. 根据斯米尔诺夫书(§174，(92)，(93)式)，

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{67.13}$$

具有零起始条件的解为

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\iint\limits_{\rho<a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\{a^2(t-\tau)^2-\rho^2\}^{1/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\tau$$

$$(\rho^2\equiv(x-\xi)^2+(y-\eta)^2).\tag{67.14}$$

将(67.10)写为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\hat{x}^2}=\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)+\frac{4\pi e}{n^2\gamma^2}\delta(y)\delta(z)\delta(\hat{x}+\varepsilon),\tag{67.15}$$

式中 γ^2 代表 $n^2\beta^2-1$，ε 为一个小数，有意地引入，在最后结果中趋近于零，便获得了

$$\varphi(y,z,\hat{x})=\begin{cases}\dfrac{2e}{n^2}\displaystyle\int_0^{\hat{x}}\mathrm{d}\tau\int_{\gamma\rho\leqslant\hat{x}-\tau}\frac{\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(\tau+\varepsilon)}{\{(\hat{x}-\tau)^2-\gamma^2\rho^2\}^{1/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ \qquad(\hat{x}>0),\\ \dfrac{2e}{n^2}\displaystyle\int_0^{-\hat{x}}\mathrm{d}\tau\int_{\gamma\rho\leqslant-\hat{x}-\tau}\frac{\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(\tau-\varepsilon)}{\{(\hat{x}+\tau)^2-\gamma^2\rho^2\}^{1/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ \qquad(\hat{x}<0).\end{cases}\tag{67.16}$$

$\hat{x}<0$ 处的解是在波方程(67.15)中将 $\hat{x}$ 换为 $-\hat{x}$，利用(67.15)在 $\hat{x}>0$ 处的解而获得的. 自(67.16)，知当 $\hat{x}>0$ 时，$\varphi=0$，而当 $\hat{x}<0$，$-(\hat{x}+\varepsilon)>\gamma(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ 时，

$$\varphi(y,z,\hat{x})=\frac{2e}{n^2[(\hat{x}+\varepsilon)^2-\gamma^2(y^2+z^2)]^{1/2}};$$

令 $\varepsilon\to0$，便获得了(67.12)式中的结果.

如果将(67.15)中的 ε 换为 $-\varepsilon$，我们获得了(当 $\varepsilon\to0$ 时)

$$\varphi(y,z,\hat{x})=\begin{cases}0,\quad(\hat{x}<0,\ 0<\hat{x}<\gamma(y^2+z^2)^{1/2})\\ \dfrac{2e}{n^2[\hat{x}^2-\gamma^2(y^2+z^2)]^{1/2}}.\\ \qquad(\hat{x}>\gamma(y^2+z^2)^{1/2})\end{cases}\tag{67.17}$$

在下面，可以看到这不是我们所需要的结果.

根据傅里叶方法(亦即§15所用方法),我们将(67.10)右方的 $\delta(\hat{x})$ 写为

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{ik_0\hat{x}}dk_0, \tag{67.18}$$

将 $\varphi(\hat{x},y,z)$ 写为

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(y,z)e^{ik_0\hat{x}}dk_0, \tag{67.19}$$

获得了

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(y,z)+\gamma^2k_0^2\varphi(y,z)=-\frac{4\pi e}{n^2}\delta(y)\delta(z). \tag{67.20}$$

引入 ρ,θ:

$$y=\rho\cos\theta,\quad z=\rho\sin\theta,\quad \rho^2=y^2+z^2, \tag{67.21}$$

而假定 $\varphi=\varphi(\rho)$,那么在 $\rho\neq 0$ 处

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}+\gamma^2k_0^2\right)\varphi(\rho)=0. \tag{67.22}$$

因此

$$\varphi(\rho)=AJ_0(\gamma k_0\rho)+BY_0(\gamma k_0\rho), \tag{67.23}$$

式中 A,B 为两个常数,J_0,Y_0 为第一种及第二种贝塞尔的零级函数.由于(67.20)右方的 δ 函数,我们要求

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}2\pi\rho\right)=-\frac{4\pi e}{n^2},$$

亦即(67.20)左右两方对一个以原点为中心的小圆的面积分相等.$Y_0(\gamma k_0\rho)$ 在 $\rho\to 0$ 时近似

$$\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{1}{2}\gamma k_0\rho\right),$$

因此

$$\frac{2}{\pi}B\frac{1}{\rho}2\pi\rho=-\frac{4\pi e}{n^2},$$

亦即

$$B = -\pi e/n^2. \tag{67.24}$$

这决定了 B,但 A 的值依然是任意的. 代入(67.19),得

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0\hat{x}} dk_0 \left\{ \frac{1}{2\pi} A J_0(\gamma k_0 \rho) - \frac{e}{2n^2} Y_0(\gamma k_0 \rho) \right\}. \tag{67.25}$$

含有 Y_0 的一项是可以积分的. 这一项等于

$$-\frac{e}{n^2}\int_0^{\infty} \cos k_0\hat{x} Y_0(\gamma k_0 \rho) dk_0 = \begin{cases} \dfrac{e}{n^2}\dfrac{1}{(\hat{x}^2-\gamma^2\rho^2)^{1/2}} & (|\hat{x}|>\gamma\rho),\text{[1]} \\ 0 & (|\hat{x}|<\gamma\rho). \end{cases} \tag{67.26}$$

如果我们取

$$A(k_0) = \begin{cases} (\pi e/n^2)\mathrm{i} & (k_0 > 0), \\ -(\pi e/n^2)\mathrm{i} & (k_0 < 0), \end{cases} \tag{67.27}$$

第一项成为

$$-\frac{e}{n^2}\int_0^{\infty} \sin k_0\hat{x} J_0(\gamma k_0 \rho) = \begin{cases} -\dfrac{e}{n^2}\dfrac{1}{(\hat{x}^2-\gamma^2\rho^2)^{1/2}} & (\hat{x}>\gamma\rho),\text{[2]} \\ 0 & (-\gamma\rho<\hat{x}<\gamma\rho), \\ \dfrac{e}{n^2}\dfrac{1}{(\hat{x}^2-\gamma^2\rho^2)^{1/2}} & (-\gamma\rho>\hat{x}). \end{cases} \tag{67.28}$$

因此取这样的常数 A,便得了所需要的解(67.12). 如果改变了 A 的符号,(67.25)便成为(67.17).

用§19,§20 中的方法来求(67.10)的解是最简便的. 不难看出,用该节的方法后,φ 的一般解为

$$\varphi = \frac{e}{2\pi^2}\frac{1}{n^2}\int e^{i(k_1 y + k_2 z + k_0\hat{x})} \left\{ \frac{1}{(k_1^2+k_2^2-\gamma^2 k_0^2)} + f(k_1,k_2,k_0)\delta(k_1^2+k_2^2-\gamma^2k_0^2) \right\} dk_1\, dk_2\, dk_0.$$

取 $f(k_1,k_2,k_0)$ 为

---

① Watson:《贝塞尔函数》,利用§13.42 的(5)式及§3.54 中 Y_0 的定义.

② Watson:《贝塞尔函数》,§13.42 中的(6)式.

$$\pi \mathrm{i} k_0 / |k_0|,$$

令

$$k_1 = k\cos\varphi, \quad k_2 = k\sin\varphi,$$

对 k 取积分,即获得了

$$\varphi = -\frac{e}{n^2}\int_0^\infty [\sin(k_0\hat{x})\mathrm{J}_0(\gamma k_0\rho) + \cos(k_0\hat{x})\mathrm{Y}_0(\gamma k_0\rho)]\mathrm{d}k_0, \tag{67.29}$$

再度积分,即获得了(67.12)式.

虽然(67.25)是一般的解,不难看出(67.12)或(67.29)是我们所需要的解.因为电子的运动公式为

$$y = z = 0, \quad x = ut,$$

电子运动速度比光传播速度大,因此在任何时刻,在 $x>ut$ 处(亦即 $\hat{x}>0$ 的处),电磁场不可能已经达到,因而必须等于零.满足这个条件的解就是(67.12).

由求得的 φ 及

$$A_1 = \beta n^2\varphi, \quad A_2 = A_3 = 0,$$

我们便求出了 $\boldsymbol{A}$. 代入(67.5)式,我们便求得了 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$. 在 $t=0$ 时,

$$\boldsymbol{E} = -\frac{2\gamma^2 e\boldsymbol{r}}{n^2[r^2 - \beta^2 n^2(y^2+z^2)]^{3/2}}, \quad \boldsymbol{r} = (x,y,z), \tag{67.30}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{n^2}{c}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{E}). \tag{67.31}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 代表矢量(x,y,z),亦即自电子至场点的矢量.在 $t\neq 0$ 时,我们只消以 $x-ut$ 代替上式的 x. 因此令 $\boldsymbol{r}$ 代表矢量

$$(x-ut, y, z)$$

(亦即自电子至场点的矢量),上二式依然有效.

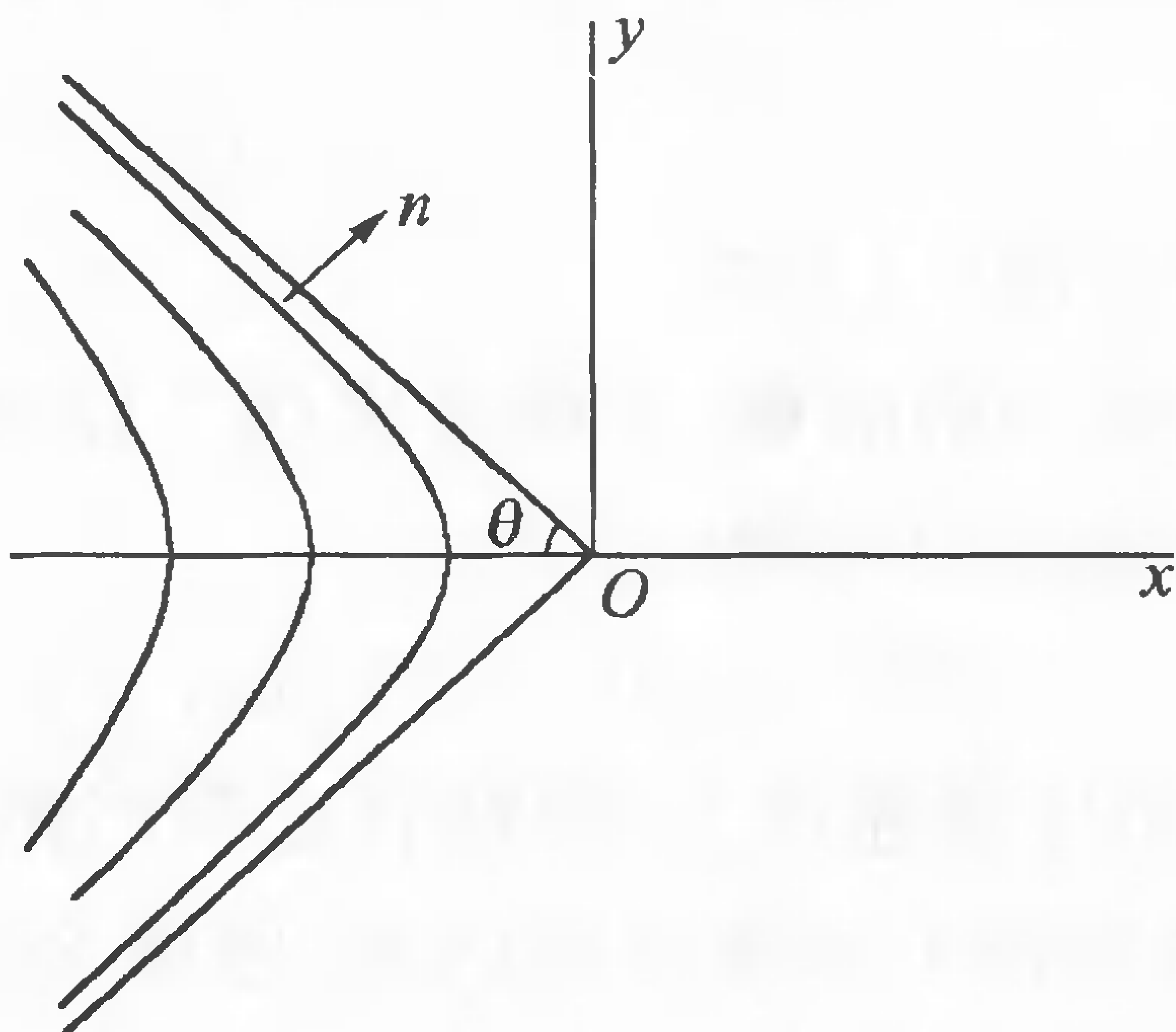
不妨画出 $t=0$ 的情形.电磁场全部集中于一个以原点为顶点的锥面内.这个锥面的公式为

$$-x = \gamma(y^2+z^2)^{1/2}. \tag{67.32}$$

在这个锥面附近，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，φ，$\boldsymbol{A}$ 都是不连续的. 在锥面外，它们等于零，在锥面内附近的点，它们成为无穷大. $\varphi=$ 常数，$A_1=$ 常数等面的式子都是

$$x^2-\gamma^2(y^2+z^2)=C,\quad x<0. \qquad (67.33)$$

它们在图 42 中画出（图中的 θ 等于 $\arctan\gamma$）.



$\theta=\arctan\gamma$

图 42

现讨论在锥面内各点上的乌莫夫矢量 $\boldsymbol{Y}$. 由 $\boldsymbol{Y}=(c/4\pi)\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 及(67.30)，(67.31)式，我们知在 $\boldsymbol{r}$ 点的 $\boldsymbol{Y}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 及 x 轴所构成的平面内，因此在锥面内部邻近锥面的点上，$\boldsymbol{Y}$ 与锥面在该点的法线（向外）$\boldsymbol{n}$ 同一方向. 很显然的，该处的 $\boldsymbol{Y}$ 的大小是无穷大，亦即当所讨论点离锥面无穷地接近时，$\boldsymbol{Y}\to\infty$. 因此在锥面上的 $\int\boldsymbol{Y}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int|\boldsymbol{Y}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{S}|$ 是无穷大，亦即在一秒中流过某一固定锥面的能量是无穷大. 这一点可以如此地体会. 在 $t=0$ 时电磁场集中于以原点为顶点的一个锥面内，在 $t=\Delta t$ 时刻，电磁场集中于另一个锥面内，这个锥面的顶点在 Ox 轴上，在 O 的右方，离 O 为 $u\Delta t$. 两个锥面所夹的体积内的电磁场的能量即是在时间 Δt 中在以原点为顶点的锥面上所流过的电磁场能量. 在两个锥面所夹的体积中，电磁场能量密度几乎是无穷大的，因此在锥面上能量流也是无穷大.

事实上，能量流不是无穷大，因此以上所说的情形乃是理论的一个缺点. 这个缺点的由来乃是由于假定了 $\boldsymbol{D}/\boldsymbol{E}$ 为一个常数，而没有引入更广泛的 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 关系(67.8)或(67.9). 当我们假定了(67.8)而又引入适当的 $n^2(\omega)$，我们可以使能量流变为有限. 在这里我们只写下 $\varphi,\boldsymbol{A}$ 的微分方程，而不讨论应该取怎样的 $n^2(\omega)$ 及解的实际情形. 关于后一个问题，请参阅以上所指文献及伊万宁柯与沙科洛夫合著的《经典场论》§ 27.

令 $\varphi,\boldsymbol{A}$ 分别为

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\varphi_\omega(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,\quad \boldsymbol{A}=\frac{1}{2\pi}\int\boldsymbol{A}_\omega(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

引入洛伦兹规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_\omega(x,y,z)+[n^2(\omega)/c](-\mathrm{i}\omega)\varphi_\omega=0,$$

便获得了

$$\left[\nabla^2+\omega^2\frac{n^2(\omega)}{c^2}\right]\varphi_\omega=-\frac{8\pi^2 e}{n^2(\omega)}\delta(y)\delta(z)\frac{1}{2\pi u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x/u},$$

$$\left[\nabla^2+\omega^2\frac{n^2(\omega)}{c^2}\right]\boldsymbol{A}_\omega=-\frac{8\pi^2 e\boldsymbol{u}}{c}\delta(y)\delta(z)\frac{1}{2\pi u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x/u}.$$

取 φ' 为 $\varphi\exp(\mathrm{i}\omega x/u)$，$\boldsymbol{A}'$ 为 $\boldsymbol{A}\exp(\mathrm{i}\omega x/u)$，代入上式，便获得了类似(67.20)的式子

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{u^2}(n^2\beta^2-1)\right\}\varphi'=-\frac{4\pi e}{n^2 u}\delta(y)\delta(z).$$

求解如(67.20)，最后得

$$\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/u)\hat{x}}\left\{\frac{1}{2\pi}AJ_0\left(\gamma\frac{\omega}{u}\rho\right)-\frac{e}{2n^2(\omega)}\mathrm{Y}_0\left(\gamma\frac{\omega}{u}\rho\right)\right\}\frac{\mathrm{d}\omega}{u}.$$

与(67.25)几乎完全相同，惟一不同处即是此处的 $\boldsymbol{n}$ 乃是 ω 的函数.

§ 68　经典电动力学的应用范围

在结束这本书前，我们必须讨论经典电动力学的应用范围. 但

我们不作深刻的讨论，因为深刻的讨论需要量子电动力学的知识. 这里的讨论仅是一个初步的、一般性的讨论.

在量子力学中我们都熟知，如果令波方程的普朗克常数 h 趋近于零，那么质点的运动便近似于寻常力学中的运动. 事实上，令波函数写为

$$\exp\ (\mathrm{i}S/h),$$

又令 S 写为

$$S = S_0 + S_1 h + S_2 h^2 + \cdots,$$

那么 S_0 所适合的微分方程正是力学中的哈密顿-雅可比方程. 这些讨论可以在任何较完全的量子力学书籍中看到（例如 Д. И. Блохинцев 所著《量子力学原理》第六章 § 35). “h 趋近于零”意味着物质的德布罗意(de Broglie)波的波长

$$h/mu \quad (u = \text{速度}) \tag{68.1}$$

趋近于零. 在光学中，人所共知，当光波的波长趋近于零时，与波性有关的某些现象（如衍射等）逐渐消失，而光线的进行规律逐渐趋近于几何光学中的规律——那时在均匀介质中我们可以将光认为沿直线进行等等. 在这里，情形是同样的，当德布罗意波长趋近于零时，质点的运动失去了与波性有关的性质，而逐渐变成像一个寻常的质点，只带有“粒子性”的质点，服从寻常力学的规律.

以上是力学的情形. 关于电动力学，我们可以想像情形是类似的. 在讨论电动力学中的问题时，如果对象是微观世界，那么严格来讲，我们应该用量子电动力学，正像研究微观世界的力学问题时我们应该用量子力学一样. 但在某些情形下，经典电动力学是一个“足够好”的近似，可以通过它来部分地了解所研究的问题，正像寻常力学是量子力学的一个近似一样. 这些情形一般讲来，正是 h 可以认为是小到可以忽略的情形.

由量纲的考虑，我们知 h 必须与

$$p\xi$$

的乘积，或

$$Et$$

的乘积比较.因此我们要求

$$p\xi \gg h, \tag{68.2}$$

$$Et \gg h. \tag{68.3}$$

只有在这个情形下,经典电动力学才能希望成为量子电动力学的一个"好"的近似.

必须较明确地说明(68.2),(68.3).为了这一点,不妨举几个例.

(i) 讨论电子在回旋加速器中的运动

显然地,(68.2)中的 ξ 不代表电子的坐标,因为坐标的值可以随原点的变化而变化.它代表电子在某一段过程中的位移 $\delta\xi$.同样 p 代表电子在某一段过程中动量的改变 δp.令 u 为速度,a 为轨道圆周半径,得(根据经典力学)

$$\delta p \approx m(u^2/a)(\delta\xi/u),$$

因此

$$\delta p\delta\xi \approx (mu/a)(\delta\xi)^2.$$

(68.2)成为

$$(mu/a)(\delta\xi)^2 \gg h.$$

因 $\delta\xi$ 与 a 同级,得

$$mua \gg h,$$

亦即

$$a \gg h/mu. \tag{68.4}$$

亦即在实验中 ξ 的变化的数量级必须较德布罗意波长大出许多.

(68.3)在

$$a \gg h/mc \tag{68.5}$$

情形下也满足.E 的数量级是 mc^2,t 的数量级是 a/c(假定 $u\approx c$),因此(68.3)左方是

$$mc^2 \cdot (a/c) = mca.$$

当(68.5)成立时,上式比 h 大出许多.

因此,一般地讲,当质点运动极快时,如果轨道的大小比康普顿波长 h/mc 大出很多时,经典电动力学便可以应用.

(ii) 讨论一个束缚电子在原子中受外来电磁波的影响

令它原来所在的轨道相当于能量 W_1,又假定另外有一轨道,相当于能量 W_2. 称 T 为外来电磁波的周期. 在这个情形下,当我们讨论自轨道 W_1 跳跃至轨道 W_2 的问题时,经典电动力学有效的条件(68.3)成为

$$(W_2 - W_1)T \gg h.$$

(因为能量变化可能是 $W_2 - W_1$,T 是 t 的数量级.)上式即是

$$(W_2 - W_1) \gg h\nu,$$

亦即

$$(W_2 - W_1)/h\nu \gg 1, \qquad (68.6)$$

亦即自原来轨道跳跃至其他轨道时能量的变化必须比一个光子的能量大出许多,亦即不是吸收一个光子而跳跃至其他轨道的情形.

因此,对于吸收一个光子而跳跃至另一个轨道的问题,经典电动力学是不能应用的.

不但如此,在光波没有来到前,如果在原来的轨道中 $W<0$,电子运动已经不符合于(68.2). 因此只有在 $W_2 \gg 0$,$W_1 \gg 0$ 及(68.6)的情形下经典电动力学才可以应用. 显然地,由于(68.6),该时电子必须吸收或放射许多光子,不是寻常我们所讨论的光电效应及电子吸收光的情形.

必须指出:(68.2),(68.3)并不是经典电动力学可以应用的惟一条件. 由于量子电动力学中波函数所采取的表示(представление),它可以用来描写一个系统中有不同数目的质点的几率,由这些几率的变化可以求出质点产生或湮没的几率(例如一个光子如何在适当环境下变为一个正电子及一个负电子),而这些现象无法用经典电动力学来描写. 事实上,它们根本无法用经典的语言来叙述. 在这一点上(光子的放射除外),我们无法将经典电动力学看作量子电动力学的一个近似.

在近代量子电动力学所研究的问题中，就“量”的要求而言，只有极少数可以用经典电动力学来作为一个近似解. 一部分理由是：在那里的电子的态常常是分立的量子态，在那里(68.2)不满足. 一部分理由是：波函数必须用以上所说的“表示”，计算的最后结果必须用“几种这样的质点，几种那样的质点的存在的几率”来表出，而不用“电子场或电磁场在各处的平均值”来表出. 如果只讨论各种场在各处的平均值，那么由于爱伦菲斯脱(Ehrenfest)定理，经典与量子的理论还有相似之处. (注意当海森伯(Heisenberg)运动方程对所有的力学量而言不成为线性的，这些力学量的量子平均值便不再适合经典运动方程. 因此量子力学中的平均值(或期待值)不一定适合经典的运动方程. 因此通过爱伦菲斯脱定理，我们最多能说经典的场与量子力学的场的平均值有相似处，而不能说它们一样.)

话虽如此，经典电动力学的研究有理论上的重要性，理由如下. 在电动力学中，我们有以下的问题，一个电子的运动方程，辐射阻尼(即自身的场的作用)，电磁质量等等，它们在经典电动力学中出现，也在量子电动力学中出现，不过出现的方式有所不同. 当然，我们所要求的乃是在量子电动力学中解决这些问题(因为量子力学无疑地是微观世界的一个更正确的反映)，但似乎我们更应该先解决经典电动力学中的这些问题。这是因为这些问题不是由于引入了量子论的观点(或由于“量子化”)而来的，而是与量子观点的引入无关的. 在经典范围中解决了它们，便可以看出问题的本质，使得我们在量子电动力学解决同样问题时有了方向. 既然这些问题在经典及量子理论中都出现，而经典理论是比较简单的，那么要解决这些问题，似乎应该先在经典的理论中摸索一番. 这说明了经典电动力学的研究，依旧是重要的[①].

---

① 与此不同的看法见 Bethe，Schweber，Hoffmann 所著 Mesons and Fields，Vol. I，§20b，p. 262 第一段.

如人所共知，量子电动力学的困难比之经典电动力学，只有更多的而没更少的。除了少数问题外，我们到处遇到了“无穷大”的困难[1]。近来的理论利用了质量的“重正化”(перенормировка массы)才消除了这些“无穷大”。但是这些理论的复杂性，使得人们难以相信它们已经正确地反映了客观实在。这些理论又往往以 S 矩阵的形式出现，换句话说，只讨论过程的最初($t=-\infty$)情形及过程的最末($t=\infty$)情形而不讨论中间的过程，因而无疑地是一个不完善的理论。

可以这样地说：经典电动力学与量子电动力学都是有待于新的发展的。无疑地，如果在经典电动力学中我们能够解决了上面所列的问题，我们对于电磁场与物质的相互作用，一定有更多的了解，而这对于量子电动力学的发展是有所帮助的。因此我们在今天不能完全忽略经典的电动力学，而相反地应该在经典电动力学中更努力解决上面所列的一些问题。

---

① 可以附带地指出：这些困难与经典电动力学中的困难有些不同之处。例如当我们讨论一个以常速运动的电子的电磁场能量，在经典理论中，纵场、横场的贡献的性质是类似的，而在量子理论中，纵场的贡献与经典理论中纵场的贡献相同，都是电子自身的库仑能(可以看作电子各部分的相互作用库仑能)，而横场的能量是由电子与“真空场”(即没有光子的态)发生作用(产生光子而又吸收光子)而获得的。这样的作用在经典理论中是不存在的。

附录　汉英物理学名词对照

标量势及矢量势　scalar and vector potentials

纵场及横场　longitudinal and transverse fields

电偶层　electrical double layer

镜像法　mirror method

变数分解法　method of variable separation

似稳情形　quasi-stationary process

超前势　advanced potential

推迟势　retarded potential

位势理论　potential theory

以太　ether

双星　double star

拖曳理论　drag theory

行差　aberration

洛伦兹变换　Lorentz transformation

斐兹杰惹收缩　Fitzgerald contraction

钟的推迟　retardation of clock

速度及加速度的合成　compositions of velocities and accelerations

相对论原则　relativity principle

正交变换　orthogonal transformation

逆变换　inverse transformation

赝张量　pseudotensor

对偶张量　dual tensor

旋量　spinor

固有时　proper time

实张量　real tensor

静止系统　rest system

波包　wave packet
静质量　rest mass
唯象理论　phenomenological theory
连续介质　continuous medium
动量-能量张量　momentum-energy tensor
拉格朗日方程　Lagrange's equation
切变换　contact transformation
纵场的消除　elimination of longitudinal field
二次量子化　second quantization
湮没　annihilation
产生　creation
含有高阶微商的场方程　field equations including higher-order derivatives
直接相互作用的理论　theory of direct interaction
多时理论　many-time formalism
超多时理论　super many-time formalism
有效截面　effective cross section
悬链线　catenary
螺旋线　helix
超光速的电子放射　radiation of superlight electron
切连科夫效应　Cerenkov effect
表示　representation
质量的重正化　renormalization of mass

北京大学物理学丛书

（已出书目）

1. 广义相对论引论(第二版)　俞允强
2. 量子力学导论(第二版)　曾谨言
3. 近代光学信息处理　宋菲君　S. Jutamulia
4. 理论物理基础　彭桓武　徐锡申
5. 高温超导物理　韩汝珊
6. 数学物理方法(第二版)　吴崇试
7. 原子核理论——它的深化与扩展　张启仁
8. 李代数李超代数及在物理中的应用　韩其智　孙洪洲
9. 电动力学简明教程　俞允强
10. 特殊函数概论　王竹溪　郭敦仁
11. 物理学中的非线性方程　刘式适　刘式达
12. 固体物理基础(第二版)　阎守胜
13. 现代半导体物理　夏建白
14. 热大爆炸宇宙学　俞允强
15. 数理物理基础　彭桓武　徐锡申
16. 近代半导体材料的表面科学基础　许振嘉
17. 物理宇宙学讲义　俞允强
18. 量子力学原理　王正行
19. 电动力学及狭义相对论(第二版)　张宗燧